510.08
P755
197367, v.7

BOOK 510.08.P755 v.7 c.1
POINCARE / DEUVRES DE HENRI
POINCARE
3 9153 00126143 9

Date Due

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55
138265

QA
3
.P65
1916
t.7

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME VII

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

JACQUES LÉVY

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE PARIS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1952

Copyright by Gauthier-Villars, 1952.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

MÉCANIQUE CÉLESTE

ET

ASTRONOMIE

AVANT-PROPOS

La quatrième Section des Œuvres de Henri Poincaré, qui comprend les Tomes VII et VIII, groupe ceux des Mémoires qui traitent principalement de Mécanique analytique, de Mécanique céleste et d'Astronomie. Il est fait constamment appel dans ces Mémoires à des travaux d'Algèbre et d'Analyse figurant dans les Sections précédentes, notamment sur les courbes définies par les équations différentielles et sur les séries trigonométriques, qu'on trouvera dans les Tomes I et IV des *Œuvres*. Inversement, le présent Tome contient, entre autres, les théories des coefficients de stabilité, des formes de bifurcation, des équations aux variations, des invariants intégraux, des propriétés des solutions de l'équation de Mathieu. Le caractère d'unité qu'offre l'œuvre de Henri Poincaré, qui se traduit par exemple par la résolution d'un problème du Calcul des variations au moyen de considérations empruntées à l'Électrostatique, ainsi qu'on le verra plus loin, rendait impossible une nette délimitation des différentes Sections.

J. L.

ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

FAITE PAR HENRI POINCARÉ [1].

Acta Mathematica, t. 38, p. 104-114 (1921).

MÉCANIQUE CÉLESTE.

XVII. — Généralités sur les équations de la Dynamique et de la Mécanique céleste [164, 166, 183, 187, 278, 280].

Les équations de la Dynamique présentent des propriétés remarquables qui ont été mises en évidence par Jacobi dans ses *Vorlesungen*.

Quelles sont les conséquences plus ou moins immédiates de ces propriétés? Quel parti peut-on en tirer pour la mise en équation des problèmes de Dynamique et en particulier des problèmes de Mécanique céleste? Telle est la première question dont je veux parler ici.

J'ai été amené à passer en revue les principales propriétés des équations canoniques [183, 278]. Les propriétés sont classiques; et je n'ai eu qu'à perfectionner certains détails; en me servant surtout du caractère bien connu qui

[1] On n'a reproduit ici que les extraits de cette Analyse qui concernent les matières traitées dans le présent Volume. Les Mémoires figurent sous les numéros qu'ils portent dans la bibliographie qui suit l'Analyse. (J. L.)

permet de reconnaître si un changement de variables conserve la forme canonique des équations.

Ce genre de transformations facilite la mise en équation du problème des trois corps; c'est ce que j'ai montré [164, 187]. On sait que dans le procédé classique on rapporte toutes les planètes à des axes mobiles passant par le Soleil L'inconvénient est que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour toutes les planètes. Un autre procédé consiste à rapporter chaque planète au centre de gravité du système formé par le Soleil et toutes les planètes inférieures à celle que l'on considère. L'inconvénient est évité, mais la fonction perturbatrice est un peu plus compliquée. J'ai proposé un troisième procédé, dans lequel les coordonnées de chaque planète sont rapportées au Soleil, et sa vitesse à des axes fixes.

Malgré les travaux dont les équations canoniques ont été l'objet depuis Jacobi, toutes leurs propriétés ne sont pas connues, ou plutôt on n'a pas insisté sur toutes les formes que peuvent revêtir ces propriétés et qu'il peut être utile de connaître. Si par exemple on étudie les équations aux variations des équations de la Dynamique, c'est-à-dire les équations qui définissent une solution infiniment peu différente d'une solution donnée, on rencontre des propositions importantes sur lesquelles j'ai attiré l'attention [183, 278].

D'un autre côté, j'ai été amené à introduire une notion nouvelle, celle des invariants intégraux [183, 280]. Ce sont certaines intégrales définies simples ou multiples qui demeurent constantes, quand le champ d'intégration varie conformément à une certaine loi définie par une équation différentielle. Si par exemple on envisage les équations différentielles relatives au mouvement d'un fluide incompressible, le volume est un invariant intégral.

Les équations canoniques de la Dynamique possèdent des invariants intégraux remarquables et l'existence de ces invariants jette une grande lumière sur leurs propriétés.

Pour en finir avec ces généralités sur les équations de la Dynamique et le problème des trois corps, je signalerai un dernier travail [166]. On sait que Bruns a démontré que le problème des trois corps ne saurait admettre d'autre intégrale algébrique que les intégrales classiques. Malheureusement dans sa démonstration subsistait une lacune grave et particulièrement délicate à combler. J'ai été assez heureux pour mettre la belle et ingénieuse démonstration de M. Bruns à l'abri de toute objection.

XVIII. — Problème des trois corps ; propriétés qualitatives [38, 92, 163, 167, 183. 204, 278, 280].

Ce qui va suivre est le développement naturel des méthodes dont il a été question plus haut au paragraphe V et leur application à la Mécanique céleste.

J'ai montré de diverses manières [183, 278] qu'en dehors des intégrales classiques le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale analytique et uniforme, et il en résulterait que la plupart des séries proposées jusqu'ici pour l'intégration de ce problème, de même que celles dont il sera question dans le paragraphe suivant ne sont pas convergentes et ne peuvent être utilisées que dans un calcul approché.

D'après ce qui précède, il semble qu'il soit impossible en général d'exprimer les distances mutuelles des astres par des séries purement trigonométriques convergentes. Mais il est des cas particuliers où les séries auxquelles on est conduit ne contiennent qu'un seul argument et où leur convergence est évidente. En effet, j'ai démontré [38, 92] que, dans le problème des trois corps, on peut choisir les éléments initiaux du mouvement de telle façon que les distances mutuelles des trois masses soient des fonctions périodiques du temps. On est ainsi amené à une solution particulière du problème, que l'on peut appeler *périodique*.

Ces solutions périodiques sont de trois sortes : dans les unes, les inclinaisons sont nulles et les excentricités très petites; dans d'autres, les inclinaisons sont nulles et les excentricités finies; dans d'autres, enfin, les inclinaisons sont finies et les excentricités très petites.

Je suis revenu [183, 278] sur ces solutions périodiques et je les ai étudiées en détail. Les procédés dont je me suis servi pour démontrer leur existence sont très simples et se ramènent au calcul des limites.

Mais on peut arriver à cette démonstration par une voie toute différente, qu'il pourra être souvent utile d'adopter, mais dont je n'ai pas encore tiré tout le parti possible. Supposons par exemple que l'on recherche les géodésiques d'une surface indéfinie présentant la même forme générale qu'un hyperboloïde à une nappe. On sera certain alors qu'il doit y avoir une géodésique fermée (correspondant à une solution périodique) parce que, parmi toutes les courbes fermées que l'on peut tracer sur la surface et qui en font le tour, il doit y en avoir une qui est plus courte que toutes les autres.

Les mêmes principes sont susceptibles d'être appliqués à divers problèmes de Mécanique, grâce au principe de moindre action que l'on peut employer soit sous la forme que lui a donnée Hamilton, soit sous celle que lui a donnée Maupertuis. Je n'ai fait qu'esquisser cette méthode dont il y a sans doute encore beaucoup à tirer.

Outre les solutions périodiques, les équations du problème des trois corps admettent aussi d'autres solutions remarquables que j'appelle asymptotiques [183, 278]. Ce qui caractérise ces solutions c'est qu'elles se rapprochent indéfiniment d'une solution périodique, ou bien qu'elles s'éloignent sans cesse d'une solution périodique dont elles sont infiniment rapprochées pour $t = -\infty$.

D'autres solutions remarquables sont plus difficiles encore à apercevoir [280]. Je citerai d'abord les solutions périodiques de deuxième espèce, caractérisées par ce fait que deux des corps se rapprochent périodiquement de façon à presque se choquer.

Nous avons encore les solutions périodiques de deuxième genre; si l'on fait varier d'une manière continue un des paramètres dont dépend le problème, par exemple l'une des masses, on voit une solution périodique du premier genre se déformer d'une façon continue, sa période restant égale à T. A un certain moment, cette solution se dédouble pour ainsi dire, ou plutôt se détriple, je veux dire qu'à un certain moment on a trois solutions périodiques très peu différentes; l'une d'elles a encore pour période T, les deux autres ont pour période un multiple de T. Ce sont les solutions périodiques du deuxième genre.

Je parlerai enfin des solutions doublement asymptotiques. Pour $t = -\infty$, elles sont infiniment voisines d'une solution périodique, puis elles s'en éloignent beaucoup, ensuite elles s'en rapprochent de nouveau, de telle sorte que pour $t = +\infty$, elles en sont encore infiniment voisines.

Pour étudier les propriétés et les rapports de ces différentes solutions, je me suis servi des invariants intégraux. Ces rapports sont très compliqués, de sorte que cette étude est éminemment propre à mettre en évidence la difficulté du problème des trois corps.

Je n'ai pu résoudre rigoureusement et complètement le problème de la stabilité du système solaire, en entendant ce mot dans un sens strictement mathématique. L'emploi des invariants intégraux m'a cependant permis [183, 280] d'atteindre certains résultats partiels, s'appliquant surtout au problème dit restreint, où les deux corps principaux circulent dans des orbites sans excentricité, pendant que le corps troublé a une masse négligeable. Dans ce cas, si

on laisse de côté certaines trajectoires exceptionnelles, dont la réalisation est infiniment peu probable, on peut démontrer que le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa situation initiale. C'est ce que j'ai appelé la stabilité à la Poisson.

XIX. — **Problème des trois corps ; développements approchés et applications** [47, 97, 115, 133, 149, 158, 159, 183, 208, 210, 214, 215, 216, 279].

Tous les théorèmes dont il a été question dans le paragraphe précédent ont un caractère commun, ils sont rigoureux. Ceux dont je vais parler maintenant ne seront en général qu'approchés et auront par conséquent avant tout un intérêt pratique. Ce sont cependant les seuls dont les astronomes fassent et puissent faire effectivement usage.

Dans quelles conditions ces séries divergentes peuvent-elles être utilisées avec succès ? C'est ce que j'ai cherché à éclaircir ([279], Chapitre intitulé *Calcul formel*). J'ai montré dans quelles limites cet emploi est légitime, comme l'est, pour citer un exemple célèbre, celui de la série de Stirling, et j'ai fait voir que les règles du calcul de ces séries sont les mêmes que celles de séries ordinaires.

J'ai justifié ainsi l'emploi que font les astronomes de ce genre de développements; et en particulier des développements trigonométriques. J'ai cherché en outre à perfectionner les méthodes qui permettent de les former.

Rappelons en quelques mots comment le problème se pose.

On ne peut résoudre le problème des n corps que par approximations successives, et la première idée qui s'est présentée a consisté à développer les coordonnées des astres en séries ordonnées suivant les puissances des masses. C'est sur cette idée qu'est fondée toute la Mécanique céleste ancienne. Mais quels que soient les services qu'aient rendus autrefois ces anciens procédés et qu'ils soient capables de rendre encore, on n'a pas tardé à s'apercevoir de leur insuffisance et de leur impuissance à donner une approximation indéfinie. Dans les développements auxquels ils conduisent, on voit en effet le temps entrer non seulement sous les signes sinus et cosinus, mais en dehors de tout signe trigonométrique. Ce fait suffit pour démontrer que le champ où les anciennes méthodes conservent leur efficacité, quelque étendu qu'il puisse être, est certainement limité.

C'est ce qui explique les efforts qu'ont faits les géomètres pour remplacer

les séries anciennes par des développements purement trigonométriques. Dans ces derniers temps, on a proposé deux méthodes remarquables qui paraissent atteindre complètement ce but. La première est celle de M. Gyldén, qui est fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques; la seconde est celle de M. Lindstedt, dont je me suis surtout occupé.

Dans cette dernière méthode, un artifice ingénieux permet à chaque approximation de faire disparaître les termes séculaires qui peuvent s'être introduits. Il est aisé de voir que cet artifice réussira toujours s'il n'y a qu'un terme à faire disparaître; mais il n'en serait plus de même s'il s'était introduit à la fois deux termes séculaires. Il est facile de vérifier d'ailleurs que, dans les premières approximations, on n'a à se débarrasser que d'un seul terme; mais on peut se demander s'il doit en être toujours ainsi. Un examen superficiel pourrait faire croire le contraire, et même M. Lindstedt était disposé à penser que sa méthode ne réussirait que s'il n'y avait entre les arguments aucune relation linéaire.

Je suis parvenu à démontrer que le terme séculaire qui peut apparaître à chaque approximation est toujours unique et que, par conséquent, la méthode de M. Lindstedt est toujours applicable [97]. Pour cela, j'ai eu recours à un théorème qui semblait ne se rapporter en aucune façon à la question, c'est-à-dire au théorème de Green.

J'aurais pu également, comme je l'ai fait ensuite [115, 133], employer les invariants intégraux ou bien me servir des théorèmes de Jacobi sur les équations de la Dynamique.

La méthode de M. Newcomb est fondée sur les mêmes principes; mais elle s'applique plus naturellement aux cas les plus généraux du problème des trois corps. J'y ai apporté de notables perfectionnements [183, 279, 208]. La même question se posait que pour la méthode de M. Lindstedt. On pouvait disposer de certaines arbitraires pour faire disparaître les termes séculaires; mais il y avait deux fois plus de termes à faire disparaître que d'arbitraires. Heureusement chaque fois que l'on fait disparaître l'un de ces termes, un autre disparaît spontanément. Je me suis servi de la méthode de Jacobi [279] pour démontrer cette disparition spontanée et la possibilité du développement. Une fois cette possibilité établie, j'ai donné ([279], Chapitre XIV) le moyen de former effectivement et directement les séries.

Il y avait là toutefois un grave inconvénient, puisqu'il fallait dans deux analyses entièrement séparées démontrer la possibilité du développement et en calculer les coefficients. Ayant remarqué qu'une certaine expression devait être

différentielle exacte, j'en ai profité pour modifier la méthode ([279], Chap. XV). Certaines intégrations peuvent être évitées et remplacées par des différentiations ou des opérations algébriques; il en résulte d'abord que la possibilité du développement devient presque évidente. De plus les calculs sont simplifiés. La partie la plus pénible du calcul, bien qu'elle ne présente aucune difficulté théorique, est en effet la substitution des valeurs approchées des variables dans les deux membres des équations différentielles. La méthode nouvelle permet de diminuer de près de moitié le nombre de ces substitutions.

Mais on peut aller plus loin encore dans cette voie. C'est ce que j'ai montré plus tard [208]. Je me suis servi d'une expression différentielle exacte analogue à celle dont je viens de parler et j'ai pu diminuer encore le nombre des substitutions et des intégrations. On remarquera que le théorème de Poisson (invariabilité des grands axes en tenant compte du carré des masses) devient presque intuitif.

Tous ces procédés se trouvent en défaut quand les moyens mouvements sont près d'être commensurables. Il faut alors employer une méthode dérivée de celle de Delaunay. Dans l'invention première de cette méthode, j'ai été devancé de quelques jours par M. Bohlin, mais j'y ai apporté divers perfectionnements en me servant toujours des mêmes principes. Je me bornerai à dire que cette méthode permet de discuter les cas singuliers dits « de libration » où il y a commensurabilité exacte entre certains mouvements moyens.

Quelle relation y a-t-il entre toutes ces méthodes et avec les anciens procédés? Telle est la question que je me suis posée [210], et j'ai montré qu'on pouvait envisager certaines séries qui embrassent pour ainsi dire toutes ces méthodes. En groupant les termes d'une certaine manière, on retombera sur les anciennes méthodes. Avec d'autres modes de groupement, on tombera sur la méthode de Newcomb, ou bien encore sur celle de Bohlin.

Tous ces procédés s'appliquent naturellement à la Lune. Dans la théorie de cet astre, ils sont même plus nécessaires que partout ailleurs. C'est dans les théories lunaires les plus récentes, comme celles de Hill et de Brown, que l'on voit le mieux l'importance des solutions périodiques dont j'ai parlé plus haut. J'ai donné [214] une méthode pour déterminer le mouvement du périgée de la Lune qui diffère de celle de Hill. Mais j'attirerai plutôt l'attention sur un autre Mémoire [216] où j'applique à notre satellite les procédés du Mémoire [208]. Ces procédés seraient surtout utiles pour obtenir un dévelop-

pement *purement littéral* des coordonnées de la Lune. J'ai signalé en passant diverses circonstances curieuses et presque paradoxales.

Toutes les séries dont je viens de parler ne peuvent être employées qu'au point de vue du calcul formel et par conséquent du calcul approché. J'ai insisté à diverses reprises sur ce point important [183, 278, 279, 158, 159].

Toutes ces méthodes si diverses peuvent être employées pour se servir mutuellement de vérification, sans trop de calculs supplémentaires. Je citerai surtout un procédé de vérification fondé sur l'emploi des invariants intégraux [149].

. . . . . .

XXI. — Équilibre d'un fluide en rotation et figure des planètes [54, 56, 63, 72, 91, 95, 96, 108, 111, 203, 212].

Je me suis occupé également d'une autre question de Mécanique céleste que l'on peut énoncer ainsi :

Une masse fluide homogène ou hétérogène est animée d'un mouvement de rotation autour d'un certain axe. De plus, ses molécules s'attirent d'après la loi de Newton. Quelles sont les formes d'équilibre qu'elle peut affecter?

C'est là un problème qui a beaucoup occupé les géomètres depuis plus d'un siècle et demi, et dont l'importance se comprend sans peine.

Dans le cas de l'homogénéité, auquel nous nous restreindrons, deux solutions étaient depuis longtemps connues : l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi. Mais les conditions de stabilité de l'équilibre n'avaient pas été étudiées.

On ignorait s'il y avait d'autres formes possibles quand M. Mathiessen et, après lui, Sir W. Thomson, annoncèrent l'existence de figures annulaires d'équilibre. Mais la démonstration donnée par ces deux savants n'était pas parfaitement rigoureuse; d'ailleurs, M. Mathiessen supposait *a priori* que la section différait très peu d'une ellipse. J'ai montré [63] que cette hypothèse, légitime quand la section de l'anneau est très petite, est erronée dans le cas général, ce qui rend très douteuse l'existence de certains anneaux très aplatis que le savant de Rostock avait appelés *anneaux* β.

J'ai donc cru nécessaire de faire une étude plus approfondie de ces figures [54, 94, 95]. J'ai mis à l'abri de toute objection la démonstration de leur existence et montré comment on peut en déterminer les principaux éléments avec une approximation indéfinie.

Pour la détermination de ces éléments, j'ai fait usage d'une méthode que Mme Kowalevski avait déjà employée dans son Mémoire sur l'anneau de Saturne et qui est fondée sur le développement des périodes d'une fonction elliptique en séries ordonnées suivant les puissances croissantes du module.

Il convient d'observer que ces anneaux sont des figures d'équilibre instable.

Dans un Mémoire plus étendu [72], j'ai repris la même question, en développant les résultats obtenus dans deux Notes antérieures [56]. Une première difficulté se présentait sur ma route. Quand il s'agit d'intégrer de simples équations différentielles, la méthode des approximations successives est parfaitement justifiée, parce que l'existence de l'intégrale a été tout d'abord rigoureusement démontrée. Il n'en est plus de même dans le problème actuel qui est beaucoup plus compliqué; il peut rester au sujet de la légitimité de cette méthode quelques doutes qu'il s'agissait d'abord de dissiper. Pour démontrer rigoureusement l'existence des diverses solutions du problème, j'ai employé un procédé tout à fait analogue à celui dont j'avais fait usage dans mes recherches sur les solutions périodiques du problème des trois corps et où je prends pour point de départ un théorème de M. Kronecker.

On reconnaît d'abord que les diverses figures d'équilibre d'une masse fluide forment des séries linéaires; dans une même série, ces figures dépendent d'un paramètre variable. Telles sont la série des ellipsoïdes de révolution et celle des ellipsoïdes de Jacobi. Mais il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries différentes. C'est alors une figure d'*équilibre de bifurcation*.

A chaque figure est attachée une suite infinie de coefficients, que j'appelle *coefficients de stabilité*, parce que la condition de la stabilité est qu'ils soient tous positifs. Quand un de ces coefficients s'annule, c'est que la figure correspondante est de bifurcation.

Ainsi, si en suivant une série de figures d'équilibre on voit s'annuler un des coefficients de stabilité, on saura qu'il existe une autre série de formes d'équilibre à laquelle appartient la figure de bifurcation.

Un autre résultat, c'est que les deux séries linéaires dont cette figure fait partie échangent leur stabilité. Si, en suivant l'une des séries, on ne rencontre que des équilibres stables jusqu'à la figure de bifurcation, on n'y trouvera plus ensuite que des figures instables. Les figures stables appartiendront à l'autre série.

Ces principes, appliqués à divers problèmes déjà traités par Laplace, m'ont permis d'en compléter la solution.

Pour trouver les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation qui diffèrent peu d'un ellipsoïde, il faut rechercher si, parmi les ellipsoïdes de révolution et ceux de Jacobi, il y a des figures de bifurcation. Pour cela il faut calculer les coefficients de stabilité de ces ellipsoïdes. On trouve que ces coefficients dépendent des fonctions de Lamé.

J'ai donc dû faire de ces fonctions une étude approfondie. J'ai démontré d'une manière nouvelle que ces polynomes ont toutes leurs racines réelles et j'ai étudié la manière dont ces racines se répartissent.

En égalant à zéro les divers coefficients de stabilité, on obtient des équations qui sont transcendantes, mais qui peuvent néanmoins se discuter d'une manière complète. Cette discussion montre que, parmi les ellipsoïdes de révolution, comme parmi les ellipsoïdes de Jacobi, il y a une infinité de figures de bifurcation.

Il résulte de là qu'il y a d'autres formes d'équilibre que les ellipsoïdes et les anneaux. Ces figures nouvelles sont en nombre infini; elles sont convexes et ont toutes un plan de symétrie. Quelques-unes n'en ont qu'un; d'autres sont de révolution; d'autres enfin ont plusieurs plans de symétrie passant par l'axe.

Il restait à étudier les conditions de stabilité de l'équilibre. J'ai distingué, à l'exemple de Sir W. Thomson, la stabilité séculaire, qui subsiste lorsqu'on tient compte de la viscosité, et la stabilité ordinaire, qui n'a lieu que lorsqu'on néglige cette résistance. En ce qui concerne la première de ces stabilités, j'ai montré qu'elle appartient aux ellipsoïdes de révolution, moins aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi, et que les ellipsoïdes de Jacobi, qui satisfont à une certaine condition, en jouissent également. Les autres ellipsoïdes sont instables et il en est de même des figures annulaires. Quant aux autres figures nouvelles que j'ai découvertes, elles sont toutes instables, à l'exception d'une d'entre elles qui est pour ainsi dire piriforme.

J'ai donné aussi une méthode pour déterminer les conditions de la stabilité ordinaire, mais je n'en ai fait qu'une application partielle qui permet, toutefois, de reconnaître que cette stabilité peut subsister quand la stabilité séculaire a cessé.

Je ne puis d'ailleurs mieux résumer tous ces résultats qu'en faisant l'hypothèse suivante :

Imaginons une masse fluide se contractant par refroidissement, mais assez lentement pour rester homogène et pour que la rotation soit la même dans

toutes ses parties. D'abord très voisine d'une sphère, la figure de cette masse deviendra un ellipsoïde de révolution qui s'aplatira de plus en plus; puis, à un certain moment, se transformera en un ellipsoïde à trois axes inégaux. Plus tard, la figure cessera d'être ellipsoïdale et deviendra piriforme, jusqu'à ce qu'enfin la masse, se creusant de plus en plus dans sa partie médiane, se scinde en deux corps distincts et inégaux.

L'hypothèse qui précède ne peut certainement s'appliquer au système solaire. Quelques astronomes ont pensé qu'elle pourrait être vraie pour certaines étoiles doubles, et que des étoiles doubles du type de β de la Lyre présenteraient des formes de transition analogues à celles dont nous venons de parler.

Dans un de ces Mémoires [94], j'ai montré qu'aucune forme d'équilibre stable n'est possible si la vitesse de rotation dépasse une certaine limite.

On peut faire de ce principe une application aux anneaux de Saturne. Clerk Maxwell a démontré que ces anneaux ne peuvent être solides et que, s'ils sont fluides, leur densisé ne peut dépasser les 3/100 de celle de la planète. D'autre part [96], je démontre que, si les anneaux sont fluides, ils ne peuvent être stables que si leur densité est supérieure au 1/16 de celle de Saturne. L'analyse semble donc confirmer l'hypothèse de M. Trouvelot, qui considère les anneaux comme formés d'une multitude de satellites extrêmement petits et ne croit pas pouvoir expliquer autrement certaines apparences observées.

J'ai donné [108] une démonstration plus simple d'un théorème de M. Liapounoff, en vertu duquel la sphère correspond au maximum de la fonction potentielle, et je suis encore revenu à diverses reprises sur des questions analogues [111, 212] en donnant quelques égalités et inégalités curieuses.

M. Radau avait remarqué qu'aucune hypothèse ne peut rendre compte à la fois de l'aplatissement adopté et la valeur observée de la précession. Dans deux articles consacrés à la figure de la Terre [203], j'ai confirmé la conclusion de M. Radau.

BIBLIOGRAPHIE DES TRAVAUX DE MÉCANIQUE CÉLESTE

RELATIVE A

L'ANALYSE DE SES TRAVAUX PAR HENRI POINCARÉ.

XVII. — GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE ET DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

[164] *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 1031-1035).

[166] *Sur la méthode de Bruns* (*Ibid.*, t. 123, 1896, p. 1224-1228).

[183] *Sur les problèmes des trois corps et les équations de la Dynamique* (*Acta Math.*, t. 13, 1890, p. 1-270).

[187] *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps* (*Bull. astron.*, t. 14, 1897, p. 53-67).

[278, 280] *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I (1892) et t. III (1899), Paris.

XVIII. — PROBLÈME DES TROIS CORPS; PROPRIÉTÉS QUALITATIVES.

[38] *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 97, 1883, p. 251-252).

[92] *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps* (*Bull. astron.*, t. I, 1884, p. 65-74).

[163] *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 915-918).

[167] *Les solutions périodiques et le principe de moindre action* (*Ibid.*, t. 124, 1897, p. 713-716).

[183] Cf. *supra*.

[204] *Sur le problème des trois corps* (*Bull. astr.*, t. 8, 1891, p. 12-24).

[278, 280] Cf. *supra*.

XIX. — PROBLÈME DES TROIS CORPS; DÉVELOPPEMENTS APPROCHÉS ET APPLICATIONS.

[47] *Sur une équation différentielle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 98, 1884, p. 793-795).

[97] *Sur une méthode de M. Lindstedt* (*Bull. astron.*, t. 3, 1886, p. 57-61).

[115] *Sur les séries de M. Lindstedt* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 108, 1889, p. 21-24).

[133] *Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps* (*Ibid.*, t. 114, 1892, p. 1305-1309).

[149] *Sur un procédé de vérification, applicable au calcul des séries de la Mécanique céleste* (*Ibid.*, t. 120, 1895, p. 57-59).

[158] *Sur la divergence des séries de la Mécanique céleste* (*Ibid.*, t. 122, 1896, p. 497-499).

[159] *Sur la divergence des séries trigonométriques* (*Ibid.*, t. 122, 1896, p. 557-559).
[183] Cf. *supra*.
[208] *Sur l'intégration des équations du problème des trois corps* (*Bull. astron.*, t. 14, 1897, p. 241-270).
[210] *Sur la façon de grouper les termes des séries trigonométriques qu'on rencontre en Mécanique céleste* (*Ibid.*, t. 15, 1898, p. 289-310).
[214] *Sur le mouvement du périgée de la Lune* (*Bull. astron.*, t. 17, 1940, p. 87-104).
[215] *Sur le déterminant de Hill* (*Ibid.*, t. 17, 1900, p. 134-143).
[216] *Sur les équations du mouvement de la Lune* (*Ibid.*, t. 17, 1900, p. 167-204).
[279] *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II, Paris, 1893.

XXI. — Équilibre d'un fluide en rotation et figures des planètes.

[54] *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 100, 1885, p. 346-348).
[56] Id., (*Ibid.*, t. 100, 1885, p. 1068-1070 et t. 101, 1885, p. 307-309).
[63] *Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Ibid.*, t. 102, 1886, p. 970-972).
[72] *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta Math.*, t. 7, 1885, p. 259-380).
[94] Id., (*Bull. astron.*, t, 2, 1885, p. 109-118).
[95] Id., (*Ibid.*, t. 2, 1885, p. 405-413).
[96] *Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne* (*Ibid.*, t. 11, 1885, p. 507-508).
[108] *Sur un théorème de M. Liapounoff, relatif à l'équilibre d'une masse fluide* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 104, 1887, p. 622-625).
[111] *Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation* (*Ibid.*, t. 106, 1886, p. 1571-1574).
[203] *Sur la figure de la Terre* (*Bull. astron.*, t. 6, 1889, p. 5-11 et 49-60).
[212] *Sur l'équilibre d'un fluide en rotation* (*Ibid.*, t. 16, 1899, p. 161-169).

Le présent Volume contient tous les Mémoires mentionnés ici, à l'exception de ceux portant les n°s 96, 203, 214, 215, 216, qu'on trouvera dans le Tome VIII des *Œuvres*. Il contient aussi ceux que H. Poincaré a publiés depuis 1901, époque à laquelle remonte son Analyse. L'ordre que nous avons adopté pour la publication est très sensiblement celui que E. Lebon a fixé dans la bibliographie se trouvant dans son Volume : *Savants du jour : Henri Poincaré*, 2e édition, Paris, 1912; toutefois, les Mémoires qui figurent à cette bibliographie dans la Section *Séries* de la division *Mécanique céleste* sous les n°s 10, 13, 11, 12 ont paru antérieurement dans les *Œuvres* : les deux premiers dans le Tome I, pages 162 et 164, les deux autres dans le Tome IV. Ils n'ont pas été reproduits, pages 585 et 588. (J. L.)

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 100, p. 346-348 (9 février 1885).

Dans la deuxième édition de leur *Traité de Philosophie naturelle*, MM. Tait et Thomson énoncent sans démonstration le résultat suivant, au sujet de la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène, dont toutes les molécules s'attirent suivant la loi newtonienne et qui est animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe. Outre les figures ellipsoïdales bien connues, il y a, d'après les géomètres anglais, une autre forme d'équilibre, qui consiste en une surface annulaire de révolution analogue à un tore.

Je suis parvenu à retrouver la démonstration du résultat de MM. Tait et Thomson en m'appuyant sur le principe suivant, qu'il est aisé d'établir rigoureusement :

Si un système quelconque, en équilibre stable sous l'action de certaines forces, vient à être soumis à des forces perturbatrices infiniment petites, il y aura, pour ce nouvel état de forces, une nouvelle position d'équilibre stable infiniment voisine de la première.

J'ai cherché ensuite à déterminer les principaux éléments de la surface annulaire d'équilibre. A cet effet, j'ai choisi les unités de masse et de temps de telle façon que la densité de notre masse fluide soit égale à 1 et que l'unité de force soit l'attraction newtonienne de deux unités de masse à l'unité de distance. C'est ce qui est le plus convenable dans une étude théorique.

J'appelle R la distance du centre de gravité de la section méridienne à l'axe

de révolution. La section méridienne admet un axe de symétrie qui est la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur l'axe de révolution. J'écrirai l'équation de cette section méridienne, en prenant pour pôle le centre de gravité, et pour axe polaire l'axe de symétrie. L'équation s'écrira alors

$$\rho = r + \beta \cos 2\varphi + \gamma \cos 3\varphi + \ldots,$$

r, β et γ étant des constantes telles que les rapports $\frac{r}{R}$, $\frac{\beta}{r}$, $\frac{\gamma}{r}$, ... soient très petits.

Cela posé, j'ai négligé d'abord β, γ, ... de façon que la surface se réduise à un tore de rayons R et r, et j'ai cherché à exprimer le potentiel V en un point quelconque de la surface du tore. J'y suis arrivé à l'aide des séries qui donnent les périodes K et K′ d'une fonction elliptique, développées selon les puissances de k^2 et de $\log k$. On trouve que V, qui ne dépend évidemment que de l'angle φ, peut se développer suivant les puissances de r, de $\frac{r}{R}$, de $\log \frac{R}{r}$ et de $\cos\varphi$. Les coefficients de cette série s'expriment par des intégrales définies.

Si l'on tient compte des quantités appelées plus haut β, γ, ..., on devra ajouter à V certains termes correctifs. Il faudra enfin disposer de la vitesse angulaire ω et des coefficients β et γ, de façon que l'expression

$$V + \frac{\omega^2}{2}(R + \rho\cos\varphi)^2$$

soit indépendante de φ. On trouve ainsi [1]

$$\omega^2 = \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{R^2}\left(\log\frac{8R}{r} - \frac{15}{8}\right)$$

en négligeant des termes de l'ordre de $\frac{r^3}{R^3}\log\frac{R}{r}$.
On obtient de même

$$\beta = \frac{5}{16}\frac{r^3}{R^2}\log\frac{8R}{r} + K\frac{r^3}{R^2},$$

K étant une constante numérique qui s'exprime par une intégrale définie.

Les autres coefficients γ, δ, ... sont infiniment petits par rapport à p, de sorte que la section méridienne peut être assimilée à une ellipse dont l'aplatissement serait $\frac{5\omega^2}{4\pi}$.

---

[1] Cette formule et les suivantes ont été légèrement modifiées par H. Poincaré. *Voir* ci-après, p. 23, et aux Notes, *Figures annulaires*. (J. L.)

Le moment de la quantité de mouvement est approximativement

$$2\pi^2 r^3 R^3 \sqrt{\frac{\pi}{2} \log \frac{8R}{r}} = M r R \sqrt{\frac{\pi}{2} \log \frac{8R}{r}},$$

M désignant la masse du fluide.

La même méthode pourrait s'appliquer à une autre solution du même problème, énoncée également sans démonstration par MM. Tait et Thomson et où la masse fluide se répartit en plusieurs anneaux concentriques.

Je n'ai pu encore approfondir la question de la stabilité de ces masses annulaires. J'ai fait seulement, en passant, une remarque que je crois nouvelle.

Si la vitesse angulaire ω est supérieure à $\sqrt{2\pi}$ (avec les unités adoptées), il n'y a plus pour la masse fluide aucune figure d'équilibre stable possible.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION [1]

Bulletin astronomique, t. 2, p. 109-118 (mars 1885).

On s'est préoccupé depuis longtemps de déterminer les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi newtonienne et qui est animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe. On est même arrivé assez promptement à deux solutions du problème, les ellipsoïdes de révolution et les ellipsoïdes de Jacobi; mais on ignorait jusqu'à ces derniers temps s'il existait d'autres figures d'équilibre possible. Dans la dernière édition de leur *Traité de Philosophie naturelle* (1er vol., IIe Part., p. 332), MM. Tait et Thomson ont énoncé sans démonstration un certain nombre de résultats fort intéressants. Ils annoncent, par exemple, trois classes nouvelles de figures d'équilibre, à savoir :

1° Un système de deux ou plusieurs masses sphéroïdales, animé d'un mouvement de rotation commun autour d'un certain axe dans l'espace.

2° Une surface annulaire de révolution, analogue à un tore.

[1] Je viens de recevoir communication d'un Mémoire de Mme de Kowalewski dont je n'avais pas connaissance au moment où j'ai rédigé le présent travail. Ce Mémoire, intitulé *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe*, a été écrit en 1874 et envoyé à cette époque à l'Université de Göttingen; mais il vient seulement d'être imprimé dans le n° 2643 des *Astronomische Nachrichten*. Bien que le problème traité par la savante mathématicienne ne soit pas tout à fait le même que celui dont je me suis occupé, son analyse se rapproche beaucoup de la mienne et je n'ai ajouté que peu de chose aux résultats qu'on pourrait facilement déduire de son Mémoire.

3° Un système de plusieurs anneaux concentriques, animés d'une même vitesse de rotation autour de leur axe commun.

Je n'ai rien à ajouter sur la première solution, qui est celle à laquelle on est conduit en envisageant le système d'une planète et d'un satellite dont l'excentricité serait nulle et dont les deux vitesses de rotation seraient égales entre elles et à celle de révolution; ou bien encore le système de plusieurs masses se mouvant en restant en ligne droite, conformément au principe du Chapitre VI du livre X de la *Mécanique céleste* de Laplace.

Mais je crois utile de revenir sur la deuxième solution, en donnant une démonstration du résultat de MM. Tait et Thomson et en cherchant à déterminer approximativement les principaux éléments de la figure annulaire d'équilibre.

Dans des questions de cette nature, on ne peut compter sur les méthodes d'approximation successive pour démontrer rigoureusement la possibilité d'une solution. Il faut au contraire faire usage de considérations de continuité, ainsi que je l'ai fait dans ma Note sur certaines intégrales particulières du problème des trois corps (1). L'existence de la solution une fois rigoureusement établie, on se sert ensuite des méthodes habituelles pour la calculer approximativement.

Je choisirai les trois unités fondamentales de longueur, de temps et de massse de telle façon que la densité de la masse fluide que je considère soit égale à 1 et que l'unité de force soit l'attraction newtonienne de deux unités de masses à l'unité de distance. J'envisagerai une figure annulaire de révolution très peu différente d'un tore. J'appellerai R la distance du centre de gravité de la section méridienne à l'axe de révolution. Je supposerai de plus que la perpendiculaire abaissée sur l'axe de révolution de ce centre de gravité soit un axe de symétrie de cette section méridienne.

Il reste à écrire l'équation de la section méridienne. Pour cela je prendrai pour pôle le centre de gravité et pour axe polaire l'axe de symétrie de cette section, et j'aurai pour cette équation, en appelant ρ et φ les coordonnées polaires, (2)

$$\rho = r + \beta_2 \cos 2\varphi + \beta_3 \cos 3\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots$$

(1) *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 253.
(2) *Voir* aux Notes, *Figures annulaires*.

Je supposerai que les rapports $\frac{r}{R}$, $\frac{\beta_n}{r}$ sont très petits, ainsi que la vitesse angulaire de rotation ω.

J'envisagerai le potentiel V et l'énergie potentielle W :

$$V = \int \frac{dm}{\Delta}, \qquad W = \int \frac{dm\,dm'}{\delta},$$

dm et dm' désignant deux éléments de masse de notre fluide, Δ étant la distance de l'élément dm au point P dont les coordonnées sont x, y et z, et δ étant la distance des deux éléments dm et dm'. Le potentiel V est une fonction de x, y et z, tandis que W est une constante qui ne dépend que de la forme de la surface.

Pour que la surface soit une figure d'équilibre, il suffit que l'expression

$$W + \frac{\omega^2 I}{2},$$

où I est le moment d'inertie de la surface par rapport à son axe de révolution, voie s'annuler toutes ses dérivées premières par rapport à R et aux β.

Étudions donc les variations de cette expression quand on fait varier ω, r, R, et les β_n, et montrons que ces dérivées devront s'annuler pour des valeurs de ces quantités variables satisfaisant aux conditions de grandeur relative que nous nous sommes imposées.

Soient dS et dS' deux éléments de l'aire de la section méridienne, y et y' les distances de ces éléments à l'axe de révolution. Ces éléments engendreront par leur révolution deux anneaux infinitésimaux dont les masses seront

$$\mu = 2\pi y\,dS \qquad \text{et} \qquad 2\pi y'\,dS' = \mu'.$$

Soient a et b la plus petite et la plus grande distance de ces deux anneaux infinitésimaux, $M(a, b)$ la moyenne arithmético-géométrique de Gauss de ces deux distances. L'énergie potentielle provenant de l'attraction mutuelle de ces deux anneaux s'écrira

$$\frac{\mu\mu'}{M(a, b)} = \frac{\mu\mu'}{\pi}\frac{J}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

où

$$J = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(z+x)}}, \qquad x = \frac{a^2}{b^2 - a^2}.$$

La théorie des fonctions elliptiques nous enseigne que, lorsque x est très petit, J peut se mettre sous la forme

$$\varphi(x)\log x + \psi(x),$$

φ et ψ étant des séries ordonnées suivant les puissances de x et dont il est aisé de calculer les coefficients. Le terme de degré le moins élevé dans cette expression est $-\log\frac{x}{16}$. Nous aurons

$$W = \iint \frac{\mu\mu' J}{\pi\sqrt{b^2 - a^2}} = \iint 2\pi\sqrt{yy'}\, J\, dS\, dS'.$$

Si l'on réduisait $\sqrt{yy'}$ à sa valeur approchée R, et J à sa valeur approchée $\log\frac{16}{x}$ ou encore $2\log\frac{8R}{a}$, on trouverait

$$W = 4\pi \iint R \log\frac{8R}{a}\, dS\, dS.$$

Nous pourrons donc poser

$$W = 4\pi \iint R \log\frac{8R}{a}\, dS\, dS' + W',$$

le rapport $\frac{W'}{W}$ étant de même ordre de grandeur que $\frac{r}{R}$.

On trouve, d'autre part, sans trop de difficultés,

$$4\pi \iint R \log\frac{8R}{a}\, dS\, dS' = \frac{\pi^2 r^4 R}{2}\left(\log\frac{8R}{r} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r^2 R}{2}\,\Sigma\beta_n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + W'',$$

W'' contenant en facteurs des puissances supérieures des β.

Pour le moment d'inertie I on trouve

$$I = \pi^2\left(2r^2R^3 + \frac{3}{2}Rr^4\right) + I'.$$

I' s'annulant avec les β.

Nous poserons, pour abréger

$$W + \frac{\omega^2 I}{4} = U.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il suffit que, pour toute déformation virtuelle infiniment petite de notre surface, la variation δU soit nulle. Or toute déformation virtuelle peut être considérée comme la somme de deux autres que nous pourrons étudier séparément.

Dans la première déformation, R reste constant. La variation δU dépend alors des variations des quantités β. Si, d'autre part, nous appelons M la masse totale de notre fluide, nous aurons

$$M = 2\pi^2 R\left(r^2 + \sum\frac{\beta_n^2}{2}\right).$$

Il suit de là que, si R est constant, il devra en être de même de

$$r^2 + \sum \frac{\beta_n^2}{2} = r_0^2.$$

On peut donc écrire

$$U = \frac{\pi^2 r_0^4 R}{2} \log \frac{\lambda R}{r_0} + \Sigma \beta_n^2 \frac{\pi^2 r_0^2 R}{2} \left(\frac{1}{n} - 1 - \log \frac{8R}{r_0} \right) + \frac{\omega^2}{2} I_0 + U'.$$

Dans cette formule on a posé

$$\lambda = 8 e^{\frac{1}{4}}, \qquad I_0 = \pi^2 \left(2 r_0^2 R^3 + \frac{3}{2} R r_0^4 \right),$$

et le rapport $\frac{U'}{U}$ est infiniment petit.

Soit U_0 la valeur de U quand on y annule tous les β; soit U_1 la valeur de U quand on donne aux β des valeurs telles que

$$\Sigma \beta_n^2 = K r_0^2,$$

K étant une quantité très petite, mais d'ordre moindre que $\frac{U'}{U}$. On trouve alors

$$U_1 - U_0 = AK + U'_1 - U'_0,$$

A étant un coefficient négatif dépendant de R et de r_0. On en déduit, en tenant compte des hypothèses faites sur les grandeurs relatives des quantités K et U' :

$$U_1 < U_0.$$

D'où cette conséquence, que, si l'on fait varier les β d'une manière continue, la quantité $\Sigma \beta_n^2$ ne pourra devenir plus grande que $K r_0^2$, sans que U passe par une valeur inférieure à U_0; ce qui prouve que la fonction U doit admettre un maximum pour des valeurs des β inférieures à $r_0 \sqrt{K}$ et par conséquent très petites. Ce maximum qne j'appelle u est fonction de R, r_0 et ω.

Il reste à étudier la deuxième espèce de déformation de la surface annulaire, pour laquelle R et par conséquent r_0 varieraient pendant que la section méridienne resterait semblable à elle-même. Il faut montrer qu'on peut trouver des valeurs de R et des β, telles que la variation δU soit également nulle pour les deux espèces de déformations, c'est-à-dire que l'on ait à la fois

$$U = u \frac{dU}{dR} = 0.$$

Or il est aisé de vérifier l'égalité

$$\frac{dU}{dR} = -\frac{M^2}{8\pi^2} \frac{1}{R^2} \log \frac{\lambda' R}{r} + \omega^2 MR + H,$$

Il représentant un ensemble de termes négligeables devant les deux termes conservés et λ' une constante facile à déterminer.

Supposons que, R restant constant, on fasse varier ω; u sera alors une fonction de ω, mais pour des valeurs suffisamment grandes de ω (lesquelles satisfont pourtant aux conditions de grandeur relative que nous nous sommes imposées) $\frac{dU}{dR}$ sera certainement positif, et pour des valeurs assez petites de ω, $\frac{dU}{dR}$ sera certainement négatif. Donc, à chaque valeur de R correspond une valeur de ω telle que l'on ait à la fois

$$U = u, \qquad \frac{dU}{dR} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'existence de la forme annulaire d'équilibre étant ainsi rigoureusement établie, il nous reste à en déterminer approximativement les éléments. A cet effet, nous abandonnerons la fonction W dont nous nous sommes servis jusqu'ici pour considérer le potentiel V.

Je considère d'abord le tore et j'étudie l'expression du potentiel V en un point de sa surface; ce potentiel est évidemment une fonction de l'angle φ qui définit la position du point de la surface sur la section méridienne. En partant de l'expression que j'ai donnée plus haut pour l'intégrale J, je suis arrivé à montrer que V pouvait se mettre sous la forme [1]

$$V = r^2\left(v_0 + v_1 \log\frac{8R}{r}\right);$$

v_0 et v_1 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{r}{R}$ et de $\cos\varphi$.

Les coefficients de ces séries s'expriment par des intégrales définies et les premiers termes sont

$$V = \pi r^2 \log\frac{8R}{r} + \frac{9\pi}{16}\frac{r^3}{R}\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{R}\cos\varphi\log\frac{8R}{r} + \ldots$$

Il faut ensuite introduire dans cette expression les termes correctifs qui proviennent des coefficients que nous avons appelés β, c'est-à-dire que nous devons maintenant tenir compte de ce fait que notre figure annulaire n'est pas exactement un tore. Comme on voit sans peine que les coefficients β_3, β_4, ... sont très petits par rapport à β_2, nous négligerons ces coefficients ainsi que le carré de β_2.

---

[1] *Voir* aux Notes, *Figures annulaires*.

Les termes correctifs que nous nous proposions de calculer se réduisent alors à

$$-\frac{\pi\beta_2 r}{2}\cos 2\varphi.$$

L'expression du potentiel V étant ainsi corrigée, nous pouvons écrire les conditions d'équilibre. La condition nécessaire et suffisante est, en effet, que l'expression

$$V - \frac{\omega^2}{2}(R + r\cos\varphi + \beta_2\cos 2\varphi\cos\varphi + \beta_3\cos 3\varphi\cos\varphi + \ldots)$$

soit indépendante de l'angle φ. Dans l'expression précédente nous négligerons tous les termes qui contiennent en facteur $\frac{r^3}{R^3}$ ou β_3, β_4, ..., ou β_2^2, ou $\omega^2\beta_2$. Elle ne contiendra plus alors que des termes en $\cos\varphi$ ou $\cos 2\varphi$. Égalons à zéro les coefficients de $\cos\varphi$ et $\cos 2\varphi$. Nous obtiendrons les deux équations suivantes :

$$-\frac{\pi}{2}\frac{r^3}{R}\log\frac{8R}{r} + \frac{9\pi}{16}\frac{r^3}{R} + \omega^2 rR = 0,$$

$$\frac{\omega^2}{4}r^2 - \frac{\pi\beta_2 r}{2} + g\frac{r^4}{2R^2} + \frac{3\pi}{16}\frac{r^4}{R^2}\log\frac{8R}{r} = 0.$$

g étant exprimé par une intégrale définie.

On tire de là les valeurs approximatives de ω^2 et de β_2 :

$$\omega^2 = \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{R^2}\left(\log\frac{8R}{r} - \frac{9}{8}\right) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{5}{16}\frac{r^3}{R^2}\log\frac{hR}{r},$$

h étant une constante numérique exprimée par une intégrale définie.

On voit ainsi que la section méridienne peut être assimilée à une ellipse dont l'aplatissement est approximativement $\frac{5\omega^2}{4\pi}$. Quant au moment de la quantité de mouvement, il a pour valeur asymptotique

$$MrR\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(\log\frac{8R}{r} - \frac{9}{8}\right)},$$

ce qui montre que ce moment croît indéfiniment quand R croît lui-même, tandis que la vitesse angulaire tend au contraire vers zéro.

Les mêmes méthodes sont applicables à la troisième solution de MM. Tait et Thomson, qui est celle où la figure d'équilibre est formée de plusieurs anneaux concentriques. L'existence de la solution se démontrerait comme plus haut. Nous allons chercher à en déterminer les éléments.

Nous prendrons seulement deux anneaux que nous assimilerons à des tores

de rayons r et R', r et R, en négligeant les aplatissements des sections méridiennes. Ces deux tores devront avoir un plan de symétrie commun, perpendiculaire à l'axe. Nous appellerons φ l'angle que fait avec ce plan de symétrie le rayon qui joint un point M de la surface du tore au centre de la section méridienne correspondante; nous appellerons de même φ' l'angle analogue pour le second tore. Nous supposerons $R > R'$. Nous appellerons V_0 le potentiel en un point de la surface du premier tore et V'_0 la valeur du potentiel en un point de la surface du second tore. Nous trouverons, en nous bornant aux premiers termes :

$$V_0 = \pi r^2 \log \frac{8R'}{r'} - \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{R}\cos\varphi\left(\log\frac{8R}{r} - \frac{9}{8}\right) + \pi r'^2 \log\frac{8R'}{R-R'} - \frac{\pi r'^2 r\cos\varphi}{R-R'},$$

$$V'_0 = \pi r'^2 \log \frac{8R'}{r'} - \frac{\pi}{2}\frac{r'^3}{R'}\cos\varphi'\left(\log\frac{8R'}{r'} - \frac{9}{8}\right) + \pi r^2 \log\frac{8R}{R-R'} + \frac{\pi r^2 r'\cos\varphi'}{R-R'}.$$

Soient ω et ω' les vitesses de rotation des deux tores; il faudra pour l'équilibre que les deux expressions

$$V_0 + \frac{\omega^2}{2}(R + r\cos\varphi), \quad V'_0 + \frac{\omega'^2}{2}(R' + r'\cos\varphi')$$

soient indépendantes de φ et φ', ce qui nous donne les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 R r - \frac{\pi r^3}{2R}\log\frac{\lambda R}{r} - \frac{\pi r'^2 r}{R-R'} &= 0 \\ \omega'^2 R' r' - \frac{\pi r'^3}{2R'}\log\frac{\lambda R'}{r'} - \frac{\pi r^2 r'}{R-R'} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = 8e^{-\frac{9}{8}}).$$

Si l'on veut que $\omega = \omega'$, il faut donc que l'on ait

$$M = \pi^2 r r'(R - R')\left(\frac{Rr'}{rR'}\log\frac{\lambda R'}{r'} - \frac{R'r}{r'R}\log\frac{\lambda R}{r}\right),$$

M étant la masse totale du fluide. Cette équation montre que $R - R'$ doit être très petit par rapport à R, ou bien que l'on doit avoir approximativement

$$\frac{r}{R} = \frac{r'}{R'}.$$

Si en effet $R - R'$ n'est pas très petit par rapport à R, le produit $\pi^2 r r'(R - R')$ est de même ordre de grandeur que $r^2 R$, $r'^2 R'$, où M, et par conséquent le dernier facteur du second membre, doit être fini.

Je réserve pour un article ultérieur la discussion de la stabilité de ces figures d'équilibre. Je me bornerai, pour terminer, à faire la remarque suivante qui, malgré sa simplicité, n'a pas été faite encore à ma connaissance.

Si la vitesse angulaire ω dépasse une certaine limite, il n'y a aucune figure d'équilibre stable possible [1].

En effet, pour que l'équilibre soit stable, une condition nécessaire, mais non suffisante, c'est que la résultante de l'attraction et de la force centrifuge, qui doit être normale à la surface d'équilibre, soit dirigée vers l'intérieur de la masse.

Soient V le potentiel dû à l'attraction, ω la vitesse angulaire, r la distance à l'axe, et posons

$$U = V + \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Les composantes de la force seront $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ et la force estimée suivant la normale $\frac{dU}{dn}$. On aura d'ailleurs

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 2\omega^2 = -4\pi + 2\omega^2.$$

Le théorème de Green donnera donc

$$\int \frac{dU}{dn}\, d\omega = M(2\omega^2 - 4\pi),$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la surface d'équilibre. Si donc $\omega > \sqrt{2\pi}$, l'intégrale sera positive; il sera donc impossible que $\frac{dU}{dn}$ soit toujours négatif, ce qui est nécessaire pour que la résultante de toutes les forces soit toujours dirigée vers l'intérieur de la masse. L'équilibre stable est donc impossible. C. Q. F. D.

---

[1] *Voir* aux Notes, *Masses fluides en rotation (résultats divers)*.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

Bulletin astronomique, t. 2, p. 405-413 (septembre 1885).

Dans le travail que j'ai récemment publié sur le même sujet [1], je n'ai pas donné les détails des calculs. Bien que mon analyse diffère peu de celle qu'à employée Mme de Kowalewski dans ses recherches sur l'anneau de Saturne, il ne sera peut-être pas inutile de revenir sur ces détails, ne fût-ce que pour faire voir quelles sont les simplifications qui peuvent être dues aux hypothèses que l'on a droit de faire sur l'extrême petitesse de certaines quantités.

Il s'agit d'abord de calculer le potentiel du tore. Soient O le centre du tore, C le centre d'un cercle méridien, M un point quelconque du plan de ce cercle, R la distance OC, ω l'angle du plan OCM avec un plan méridien fixe, x et y les coordonnées rectangulaires du point M rapporté à deux axes passant par le point C, le second parallèle à l'axe du tore. Les coordonnées de M rapportées à trois axes rectangulaires dans l'espace seront alors $(R+x)\cos\omega$, $(R+x)\sin\omega$ et y.

Nous poserons de plus

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi$$

et nous appellerons r le rayon du cercle méridien du tore, de telle sorte que l'équation du tore, dans ce système particulier de coordonnées, se réduira à $\rho = r$.

[1] *Bulletin astronomique*, t. 2, p. 103 (*Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 17).

Pour évaluer le potentiel du tore par rapport au point M, nous décomposerons la surface du cercle méridien en une infinité d'éléments infiniment petits $d\omega'$. Chacun de ces éléments engendrera, par sa révolution autour de l'axe, un anneau élémentaire. Soient x' et y' les coordonnées de l'élément $d\omega'$ rapporté aux deux axes rectangulaires définis plus haut, $d\mu$ la masse de l'anneau élémentaire correspondant, dV le potentiel de cet anneau, V le potentiel du tore complet. Soient enfin

$$a = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, \qquad b = \sqrt{(2R+x+x')^2+(y-y')^2}$$

la plus petite et la plus grande distance du point M à l'anneau considéré, et $M(a, b)$ la moyenne arithmético-géométrique de ces deux distances. On trouvera, en conservant les mêmes unités que dans le Mémoire cité,

$$d\mu = 2\pi(R+x')\,d\omega', \qquad dV = \frac{d\mu}{M(a, b)}, \qquad V = \int dV.$$

La théorie des fonctions elliptiques nous apprend que l'on a

$$\frac{1}{M(a, b)} = \frac{1}{b}\left(S_0 \log\frac{a}{b} + S_1\right),$$

S_0 et S_1 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{a}{b}$. La même théorie nous donnerait également les coefficients de ces séries; mais je vais indiquer un autre moyen de les calculer.

Soit

$$\frac{1}{M(a, b)} = \frac{A_0}{b}\log\frac{a}{b} + \frac{A_1 a^2}{b^3}\log\frac{a}{b} + \frac{B_0}{b} + \frac{B_1 a^2}{b^2} + \ldots$$

Remplaçons dans cette identité a par $\sqrt{ab}$ et b par $\frac{a+b}{2}$, il viendra

$$\frac{1}{M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)} = \frac{A_0}{b}\log\frac{a}{b} + \frac{A'_1 a}{b^2}\log\frac{a}{b} + \frac{B'_0}{b} + \frac{B'_1 a}{b^2} + \ldots.$$

Mais on a

$$M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Les deux séries doivent donc être identiques; ce qui conduit aux identités

$$\begin{aligned}
B_0 &= A_0 \log 4 + 2B_0,\\
0 &= -A_0 + 4A_1,\\
0 &= -2A_0 - A_0\log 4 + 4A_1\log 4 - 2B_0 + 8B_1.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{M(a,b)} = A_0\left(\frac{1}{b}\log\frac{a}{4b} + \frac{a_2}{4b^3}\log\frac{a}{4b} + \frac{a^2}{4b^3}\right),$$

en négligeant les termes de l'ordre de $\frac{r^3}{R^3}\log\frac{r}{R}$.

Il reste à déterminer A_0. Pour cela nous appliquerons un cas particulier du théorème de Green, c'est-à-dire le théorème du flux de force. Considérons un cercle de rayon très petit décrit autour de l'élément $d\omega'$. Ce cercle engendrera par sa révolution un tore enveloppant l'anneau élémentaire considéré. En un point de ce tore, a sera très petit et peu différent du rayon du cercle méridien. b différera peu de $2(R+x')$. La surface du tore sera donc $4\pi^2 a(R+x')$; l'attraction exercée par l'anneau $d\mu$ sur un point du tore différera peu de

$$-\frac{A_0\,d\mu}{ab} = -\frac{A_0\,d\mu}{2a(R+x')},$$

ce qui fait pour le flux de force $-2\pi^2 A_0\,d\mu$. Or ce flux doit être égal, d'après le théorème de Green, à $4\pi\,d\mu$. On a donc

$$A_0 = -\frac{2}{\pi}.$$

Nous poserons, pour abréger

$$\xi = x + x', \qquad \zeta = y - y',$$

et nous trouverons aisément les développements suivants :

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2R} - \frac{\xi}{4R^2} + \frac{\xi^2}{8R^3} + \frac{\zeta^2}{16R^3},$$

$$\log\frac{1}{b} = \log\frac{1}{2R} - \frac{\xi}{2R} + \frac{\xi^2}{8R^2} - \frac{\zeta^2}{8R^2},$$

$$\frac{4R^2}{b^3} = \frac{1}{2R} - \frac{3\xi}{4R^2} + \frac{3\xi^2}{4R^3} - \frac{3\zeta^2}{16R^3},$$

$$\frac{1}{b}\log\frac{2R}{b} = -\frac{\xi}{4R^2} + \frac{3\xi^2}{16R^3} - \frac{\zeta^2}{16R^3}\,\frac{4R^2}{b^3},$$

$$\log\frac{2R}{b} = -\frac{\xi}{4R^2} + \frac{7\xi^2}{16R^3} - \frac{\zeta^2}{16R^3}.$$

En tenant compte de ces développements, on trouve avec le même degré d'approximation que plus haut

$$\frac{1}{A_0 M(a,b)} = \frac{1}{2R}\log\frac{a}{8R} - \frac{\xi}{4R^2}\log\frac{a}{2\alpha R} - \frac{\xi^2}{8R^3}\log\frac{a}{2\beta R} - \frac{\zeta^2}{16R^3}\log\frac{a}{2\alpha R} + \frac{a^2}{8R^3}\log\frac{a}{2\alpha R}$$

$$\left(\alpha = 4e^{-1},\ \beta = 4e^{-\frac{3}{2}}\right).$$

On trouve ensuite

$$V = -\int \frac{\zeta(R + x')\,d\omega'}{A_0 M(a, b)}, \qquad \frac{dV}{d\omega} = -\frac{\zeta(R + x')}{A_0 M(a, b)}.$$

On en déduit, toujours avec le même degré d'approximation,

$$-\frac{dV}{2\,d\omega'} = \log\frac{a}{\zeta} - \xi\log\frac{a}{\alpha} + \xi^2\log\frac{a}{\zeta} - \frac{\zeta^2}{2}\log\frac{a}{\alpha} + \frac{a^2}{\zeta}\log\frac{a}{\alpha} + 2x'\log\frac{a}{\zeta} - 2x'\xi\log\frac{a}{\alpha}.$$

J'ai écrit cette dernière formule, pour abréger, en prenant $2R$ pour unité de longueur, quitte à rétablir plus tard l'homogénéité.

Pour obtenir la valeur de V lui-même, il reste à calculer un certain nombre d'intégrales doubles de la forme suivante :

$$\int \varphi(x', y')\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la section méridienne du tore. Une pareille intégrale n'est autre chose que le potentiel logarithmique du cercle méridien par rapport au point M supposé attiré en raison inverse de la distance, et de telle sorte que la densité de la matière attirante soit égale à $\varphi(x', y')$. Si cette densité est uniforme en tous les points également distants de C, le potentiel est le même que si toute la masse était concentrée au centre C du cercle méridien. On a donc

$$\int f(x'^2 + y'^2)\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \log\frac{\zeta}{\alpha}\int f(x'^2 + y'^2)\,d\omega'.$$

Si f est nul sur la circonférence du cercle méridien, c'est-à-dire pour $x'^2 + y'^2 = r^2$, l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx'}[f(x'^2 + y'^2)]\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' &= -\int f(x'^2 + y'^2)\frac{d}{dx'}\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' \\ &= \int f(x'^2 + y'^2)\frac{d}{dx}\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{d}{dx}\log\frac{\zeta}{\alpha}\int f(x'^2 + y'^2)\,d\omega'.\end{aligned}$$

On trouve de même

$$(1) \qquad \int \frac{d^{m+n}}{dx'^m\,dy'^n}[f(x'^2 + y'^2)]\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{d^{m+n}}{dx^m\,dy^n}\log\frac{\zeta}{\alpha}\int f(x'^2 + y'^2)\,d\omega',$$

pourvu que f soit nul ainsi que ses $m + n - 1$ premières dérivées pour $x'^2 + y'^2 = r^2$.

Ces formules donnent

$$\int \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^2 \log\frac{\rho}{\alpha},$$

$$\int (x'^2 + y'^2)\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{2}\log\frac{\rho}{\alpha},$$

$$\int (x'^2 + y'^2 - r^2)\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^4}{2}\log\frac{\rho}{\alpha},$$

$$\int (x'^2 + y'^2 - r^2)^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^6}{2}\log\frac{\rho}{\alpha}.$$

J'appliquerai maintenant la formule (1) en différentiant la troisième des intégrales précédentes par rapport à x', ou par rapport à y', et la quatrième deux fois par rapport à y'; j'obtiendrai ainsi

$$2\int x' \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^4}{2}\,\frac{\cos\varphi}{\rho}, \qquad 2\int y' \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^4}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\rho},$$

$$2\int (x'^2 + y'^2 - r^2)\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' + 4\int x'^2 \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^6}{3}\,\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2};$$

d'où je tire

$$\int x'^2 \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{4}\log\frac{\rho}{\alpha} - \frac{\pi r^6}{12}\,\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2},$$

$$\int y'^2 \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{4}\log\frac{\rho}{\alpha} + \frac{\pi r^6}{12}\,\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}.$$

Si nous supposons que le point M est sur la surface du tore de telle façon que $\rho = r$, ces formules se simplifieront un peu, de sorte qu'on aura

$$\int \xi \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^3 \cos\varphi \log\frac{r}{\alpha} - \frac{\pi r^3 \cos\varphi}{4},$$

$$\int \xi^2 \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^4 \log\frac{r}{\alpha}\left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) - \pi r^4\left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{3}\right),$$

$$\int \zeta^2 \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^4 \log\frac{r}{\alpha}\left(\frac{3}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) + \pi r^4\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{6}\right),$$

$$\int a^2 \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{3}{2}\pi r^4 \log\frac{r}{\alpha} + \pi r^4,$$

$$\int x'\xi \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{4}\log\frac{r}{\alpha} - \frac{\pi r^4}{5}\left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\cos 2\varphi\right).$$

Toutes ces intégrales sont des fonctions linéaires de $\cos\varphi$ et $\cos 2\varphi$; si nous les substituons dans l'expression de V, nous trouverons

$$V = F + G\cos\varphi + H\cos 2\varphi.$$

F, G et H étant indépendants de φ; on a, en rétablissant l'homogénéité

$$G = \frac{2\pi r'^3}{R}\log\frac{r}{2\alpha R} + \frac{\pi r^3}{2R}, \qquad H = \frac{3\pi r^4}{2R^2}\log\frac{2\mu R}{r},$$

μ étant une constante facile à calculer d'après ce qui précède. Quant à F, il n'intervient pas dans la suite et nous n'écrirons que son terme principal qui est $2\pi r^2 \log \frac{8R}{r}$.

Supposons maintenant que la masse considérée, au lieu d'affecter la forme du tore dont l'équation était $\rho = r$, prenne la forme d'une surface de révolution S, peu différente de ce tore, et ayant pour équation

$$\rho = r + \beta_2 \cos 2\varphi + \beta_3 \cos 3\varphi + \ldots + \beta_i \cos i\varphi + \ldots.$$

Nous pourrons alors regarder l'attraction de cette masse comme la somme de l'attraction du tore et de la différence entre la surface S et le tore. Nous appellerons δV le potentiel dû à cette différence, V le potentiel du tore par rapport à un point de sa propre surface, et $V + \Delta V$ le potentiel du tore par rapport à un point de la surface S, de sorte que le potentiel total par rapport à un point de la surface S sera

$$V + \Delta V + \delta V = \int \frac{dV}{d\omega'} d\omega',$$

l'intégrale du second membre étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la section méridienne de la surface S. Mais, les β étant très petits, nous pourrons, dans le calcul de ΔV et de δV, ne tenir compte que du terme principal de $\frac{dV}{d\omega'}$ qui est $-2 \log \frac{a}{8R}$. Nous trouverons ainsi

$$\Delta V = 2\pi r^2 \log \frac{8R}{\rho} - 2\pi r^2 \log \frac{8R}{r} = -2\pi r \Sigma \beta_i \cos i\varphi,$$

en négligeant les carrés de β. On trouve encore avec le même degré d'approximation

$$\delta V = -2r \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r}{4R} \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| \Sigma(\beta_i \cos i\varphi')\, d\varphi',$$

si l'on observe que, pour les éléments de la différence entre la surface S et le tore, on peut écrire

$$a = \left| 2r \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|, \qquad d\omega' = r\, d\varphi' \Sigma \beta_i \cos i\varphi'.$$

On peut écrire également

$$\delta V = -2r \int_0^{2\pi} \log \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| (\Sigma \beta_i \cos i\theta \cos i\varphi + \Sigma \beta_i \sin i\theta \sin i\varphi)\, d\theta.$$

Cette intégrale peut s'évaluer sans peine. On a, en effet,

$$\log\frac{1}{1-z}=\sum\frac{z^n}{n},\qquad \text{d'où}\qquad \log\frac{1}{1-e^{i\theta}}=\sum\frac{e^{in\theta}}{n},$$

ou, en égalant les parties réelles

$$\log\frac{1}{2}-\log\sin\frac{\theta}{2}=\sum\frac{\cos n\theta}{n}.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi}\log\sin\frac{\theta}{2}\cos i\theta=-\frac{\pi}{i}\qquad\text{et}\qquad \delta V=\sum\frac{2\pi r\beta_i\cos i\varphi}{i}.$$

Il reste donc

$$V-\Delta V+\delta V=F+G\cos\varphi+H\cos 2\varphi+2\pi r\Sigma\beta_i\cos i\varphi\left(\frac{1}{i}-1\right).$$

D'autre part, le potentiel dû à la force centrifuge a pour valeur, en appelant n la vitesse de rotation et en négligeant $n^2\beta$

$$\frac{n^2}{2}(R+x)^2=\frac{n^2}{2}\left(R^2+\frac{r^2}{2}\right)+n^2Rr\cos\varphi-\frac{n^2}{4}r^2\cos 2\varphi.$$

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que l'expression

$$V+\Delta V+\delta V+\frac{n^2}{2}(R+x)^2$$

soit indépendante de φ, ce qui montre d'abord que, avec le degré d'approximation adopté, tous les β sont négligeables, sauf β_2, c'est-à-dire que la section méridienne peut être regardée comme une ellipse dont l'aplatissement

$$\lambda=\frac{2\beta_2}{r}.$$

En égalant à o les coefficients de $\cos\varphi$ et $\cos 2\varphi$, on obtient les deux équations

$$G+n^2Rr=H-\pi r\beta_2+\frac{n^2}{4}r^2=0,$$

d'où l'on tire

$$n^2=\frac{2\pi r^2}{R^2}\left(\log\frac{8R}{r}-\frac{5}{4}\right),$$

et approximativement

$$\lambda=\frac{2n^2}{\pi}.$$

Ces résultats ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux de mon premier travail, par suite d'une faute de calcul que j'y avais commise.

Occupons-nous maintenant du cas où la masse fluide est répartie en deux volumes annulaires séparés, peu différents de deux tores. J'appellerai R et r les deux rayons du plus grand de ces deux tores, R′ et r' les deux rayons du plus petit. Le potentiel, en un point de la surface du premier tore, sera égal au potentiel dû à son attraction propre, c'est-à-dire à $F + G\cos\varphi$ $\left(\text{en négligeant H et les termes du même ordre, c'est-à-dire de même ordre que } \frac{r^4}{R^2}\log\frac{R}{r}\right)$, plus le potentiel dû à l'attraction du second tore, que je puis réduire à son terme principal, si $\frac{r'}{R-R'}$ est assez petit. Si l'on observe que la distance d'un point du premier tore au second est à fort peu près $R - R' + r\cos\varphi$, on verra que ce terme principal peut s'écrire

$$2\pi r'^2 \log\frac{8R'}{R - R' + r\cos\varphi} = 2\pi r'^2 \log\frac{8R'}{R-R'} - \frac{2\pi r'^2 r\cos\varphi}{R-R'}.$$

Il faut pour l'équilibre que ce potentiel augmenté de $\frac{n^2}{2}(R+x)^2$ soit indépendant de φ; on doit donc avoir

$$G + n^2 R r - \frac{2\pi r'^2 r}{R-R'} = 0.$$

Si l'on appelle G′ et n' les quantités qui sont au second tore ce que G et n sont au premier, on trouvera de même

$$G' + n'^2 R' r' + \frac{2\pi r^2 r'}{R-R'} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$G = \frac{2\pi r^3}{R}\log\frac{r}{\varepsilon R}, \qquad G' = \frac{2\pi r'^3}{R'}\log\frac{r'}{\varepsilon R'},$$

ε étant une constante facile à calculer. Si donc on veut que les deux vitesses de rotation n et n' soient les mêmes, il faut que l'on ait

$$\frac{r^2}{R^2}\log\frac{r}{\varepsilon R} - \frac{r'^2}{R'^2}\log\frac{r'}{\varepsilon R'} = \frac{1}{R-R'}\left(\frac{r'^2}{R} + \frac{r^2}{R'}\right).$$

En appelant

$$M = 2\pi^2(r^2 R + r'^2 R')$$

la masse totale du fluide, nous pouvons écrire

$$M = 2\pi^2 RR'(R-R')\left(\frac{r^2}{R^2}\log\frac{r}{\varepsilon R} - \frac{r'^2}{R'^2}\log\frac{r'}{\varepsilon R'}\right),$$

ce qui est la formule que j'avais donnée à la fin du travail cité.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 100, p. 1068-1070 (20 avril 1885).

Une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton, et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, est susceptible d'une infinité de figures d'équilibre. Les seules qui aient été signalées jusqu'ici sont l'ellipsoïde de révolution, l'ellipsoïde de Jacobi et les figures annulaires de MM. Tait et Thomson, que j'ai étudiées en détail dans une Note récente, insérée au *Bulletin astronomique* (1). Mais le problème admet une infinité d'autres solutions.

Je considérerai des séries linéaires de figures d'équilibre, c'est-à-dire des séries telles, qu'à chaque valeur de la vitesse de rotation corresponde une figure, et une seule, ou un nombre fini de figures, et que ces figures d'équilibre varient d'une façon continue quand on fait varier cette vitesse. Ainsi les ellipsoïdes de révolution forment une série linéaire, les ellipsoïdes de Jacobi en forment une autre. Il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries linéaires. Ainsi il y a un ellipsoïde de révolution qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi.

Je me suis alors proposé de rechercher s'il existe des séries linéaires de figures d'équilibre parmi lesquelles il y en ait une qui se réduise à un ellipsoïde.

(1) *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 17.

On arrive aisément au résultat suivant : Soient ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ les trois axes de l'ellipsoïde, et soit R une fonction de Lamé quelconque. On devra avoir

$$(1) \qquad R^2 \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = (\rho^2 - c^2) \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2 - c^2)\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Réciproquement, on arrive à démontrer que, si, pour une des fonctions de Lamé, les axes d'un ellipsoïde de révolution ou d'un ellipsoïde de Jacobi satisfont à l'équation (1), cet ellipsoïde appartiendra non seulement à la série des ellipsoïdes d'équilibre, mais encore à une autre série linéaire de figures d'équilibre non ellipsoïdales.

J'ai discuté les équations (1) dans le cas des ellipsoïdes de révolution aplatis. Posons

$$b = 0, \qquad c = 1, \qquad \rho = \sqrt{k^2 + 1},$$

$$R = (k^2 + 1)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}(k^2 + 1)^n}{dk^{i+n}} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Nous n'aurons à considérer que les valeurs de n au moins égales à 2. Nous trouverons que l'équation (1) n'a pas de racine quand $i + n$ est impair et en a une, et une seule, quand $i + n$ est pair. Ainsi à tout système de nombres entiers i et n, tels que

$$n > 2, \qquad i \leq n, \qquad i \geq 0 \qquad [i \equiv n \pmod 2]$$

correspond une série linéaire de figures d'équilibre. Il faut faire exception pour le cas de $i = 0$, $n = 2$; la racine de l'équation (1) correspondante ne donne pas de série nouvelle de figures d'équilibre. Elle correspond à l'ellipsoïde de révolution dont la vitesse de rotation est maximum. Dans le cas de $i = n = 2$, on retrouve les ellipsoïdes de Jacobi.

Si $i = 0$, les figures d'équilibre correspondantes seront de révolution. Elles ne le seront pas dans le cas contraire.

Le même procédé peut servir pour déterminer les conditions de stabilité de l'ellipsoïde de révolution. MM. Tait et Thomson ont annoncé que les ellipsoïdes de révolution que l'on rencontre, en partant de la sphère et en allant jusqu'à celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi, sont tous stables, et que les autres sont séculairement instables.

Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que, parmi toutes les

équations (1), celle qui a la plus grande racine est celle qui correspond au cas de $i = n = 2$, ou bien encore que tous les rapports

$$\frac{R}{k^2+1} \qquad [i \equiv n \pmod 2]$$

vont constamment en croissant quand k croît de zéro à l'infini. Or cela est aisé à vérifier.

Il est possible que les séries linéaires de figures d'équilibre que j'ai signalées plus haut contiennent des figures stables; mais il est certain au moins que celles de ces figures qui diffèrent peu de l'ellipsoïde, et qui sont les seules que nous connaissions un peu, sont toutes séculairement instables (à l'exception, bien entendu, des ellipsoïdes de Jacobi).

Il y aurait intérêt à répéter, pour les ellipsoïdes de Jacobi, la discussion que je viens de faire pour les ellipsoïdes de révolution, d'autant plus que, parmi les figures d'équilibre que l'on découvrirait ainsi, il y en a qui sont stables. C'est ce que je chercherai à faire dans une Communication ultérieure, si l'Académie veut bien le permettre.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 101, p. 307-309 (27 juillet 1885).

Dans une Communication faite à l'Académie le 20 avril 1885 [1], j'ai montré qu'une masse fluide homogène, soumise à l'attraction newtonienne et animée d'un mouvement de rotation, était susceptible d'une infinité de figures d'équilibre, outre celles qui sont déjà connues. J'en ai défini un certain nombre qui, sans être ellipsoïdales, diffèrent infiniment peu d'un ellipsoïde de révolution, J'ai montré que ces figures nouvelles étaient instables.

J'ai reconnu depuis qu'il existe également des ellipsoïdes de Jacobi appartenant en même temps à une série linéaire de figures d'équilibre *non ellipsoïdales*.

Soient ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ les trois axes de l'ellipsoïde; soit R une fonction de Lamé quelconque de ρ; soit

$$S = (2n+1)R \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

la fonction S conjuguée de R d'après la notation de Liouville. Nous distinguerons les fonctions

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2},$$

ainsi que les fonctions R_3, R_4, ..., R_n, ... définies comme il suit : la

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 34.

fonction R_n sera une fonction de Lamé d'ordre n ne contenant en facteur ni $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ni $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et ne s'annulant que pour des valeurs de ρ^2 comprises entre zéro et b^2. Pour toute valeur n, il y en a toujours une et une seule; $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ seront alors les fonctions conjuguées de $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Cela posé, tout ellipsoïde de Jacobi satisfera à la condition

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5};$$

s'il satisfait en outre à la condition

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_n S_n}{2n+1}, \tag{1}$$

il appartiendra à la fois à deux séries linéaires de figures d'équilibre : à savoir, la série des ellipsoïdes de Jacobi, et une série de figures Σ_n non ellipsoïdales. Quel que soit n, il y aura toujours un ellipsoïde de Jacobi satisfaisant à la condition (1). Nous avons donc démontré l'existence d'une infinité de figures d'équilibre nouvelles $\Sigma_3, \Sigma_4, \ldots, \Sigma_n$.

La figure Σ_n a mêmes plans de symétrie que l'ellipsoïde si n est pair; si n est impair, elle est symétrique par rapport aux plans des xy et des xz, mais non par rapport au plan des yz.

Les figures Σ_3 sont stables, toutes les autres sont instables.

Les ellipsoïdes de révolution sont stables, s'ils sont moins aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi (c'est ce que sir W. Thomson avait déjà démontré en supposant qu'on imposait à la masse fluide *comme liaison* la condition de rester ellipsoïdale; cette condition n'est pas nécessaire). Les ellipsoïdes de Jacobi sont stables s'ils sont moins allongés (suivant le grand axe) que celui qui appartient en même temps à la séris des figures Σ_3.

Pour résumer les résultats obtenus, faisons l'hypothèse suivante :

Supposons une masse fluide homogène, se contractant par un refroidissement, et imaginons que ce refroidissement soit assez lent pour qu'elle conserve un mouvement de rotation uniforme dans toutes ses parties et que l'homogénéité subsiste constamment.

Il arrivera alors que cette masse, d'abord presque sphérique, affectera la forme d'un ellipsoïde de révolution dont l'excentricité ira sans cesse en croissant, jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur 0,81; la masse deviendra ensuite un ellipsoïde de Jacobi, puis une figure Σ_3. Pour expliquer grossièrement la déformation qu'elle subit alors, imaginons que l'ellipsoïde soit coupé en deux

moitiés par un plan perpendiculaire au grand axe. En devenant une figure Σ_3, l'une des moitiés de l'ellipsoïde s'aplatira et se rapprochera de la forme hémisphérique, l'autre moitié s'allongera au contraire de plus en plus. Il est difficile de dire ce qui arrivera ensuite si le refroidissement continue, mais l'examen des figures Σ_3 porte à croire que la masse ira en s'étranglant dans sa petite moyenne pour se partager ensuite en deux masses isolées et inégales.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION [1]

Acta Mathematica, t. 7, p. 259-380 (16 septembre 1885)

TABLE DES MATIÈRES.

		Pages.
I.	Introduction	41
II.	Équilibre de bifurcation	43
III.	Échange des stabilités	50
IV.	Cas d'un nombre infini de variables	55
V.	Première application : figures annulaires	62
VI.	Exemples d'équilibres de bifurcation	67
VII.	Stabilité de l'équilibre relatif	70
VIII.	Fonctions de Lamé	76
IX.	Détermination des coefficients de stabilité	86
X.	Discussion de l'équation fondamentale	93
XI.	Ellipsoïdes de révolution	98
XII.	Ellipsoïdes de Jacobi	107
XIII.	Petits mouvements d'un ellipsoïde	113
XIV.	Stabilité des ellipsoïdes	127
XV.	Conclusions	139

[1] Manuscrit remis le 16 juillet 1885.

I. — Introduction.

Quelles sont les figures d'équilibre relatif que peut affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent conformément à la loi de Newton et qui est animée autour d'un certain axe d'un mouvement de rotation uniforme?

Quelles sont les conditions de stabilité de cet équilibre?

Tels sont les deux problèmes qui forment l'objet de ce Mémoire.

On en connaît depuis longtemps deux solution : l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi. Je me propose d'établir qu'il y en a une infinité d'autres,

Mais je vais avant d'aller plus loin signaler un certain nombre de résultats que l'on trouve dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. Tait et Thomson, 2e édition, § 778. Sir William Thomson énonce la plupart de ces propositions sans aucune démonstration; pour quelques-unes d'entre elles, il renvoie à des Mémoires plus étendus insérés au *Philosophical Transactions*.

Voici ces résultats, qui doivent nous servir de point de départ.

a. L'ellipsoïde de révolution aplati est une figure d'équilibre toujours stable, si l'on impose à la masse fluide la condition d'affecter la forme d'un ellipsoïde de révolution.

b. Si nous imposons à notre masse la condition d'être de révolution, mais non plus celle d'être ellipsoïdale, on trouve, si le moment de la quantité de mouvement est assez grand, deux figures d'équilibre : une figure annulaire qui est stable et une figure ellipsoïdale qui est instable. (Nous verrons dans la suite de ce Mémoire qu'il y en a une infinité d'autres parmi lesquelles il y en a de stables grâce à la condition imposée à la masse de rester de révolution.)

c. Il existe également des figures d'équilibre, probablement instables, où la masse se subdivise en plusieurs anneaux concentriques.

d. La figure annulaire d'équilibre est stable si l'on impose à la masse la condition de rester de révolution, et probablement instable si l'on supprime cette liaison.

e. Si l'on impose à la masse la condition d'être ellipsoïdale, mais non d'être de révolution, l'ellipsoïde de révolution est stable, si l'excentricité est inférieure à 0,8127 et instable dans le cas contraire. (Nous verrons dans la suite de ce

Mémoire que les conditions de stabilité restent les mêmes si l'on ne s'impose aucune liaison.)

L'ellispoïde de Jacobi est toujours stable, si l'on impose à la masse la condition d'être ellipsoïdale.

f et *g*. L'ellipsoïde de Jacobi, si l'on ne s'impose aucune condition est certainement instable dans certains cas, bien qu'il soit probablement stable dans d'autres. (Nous démontrerons dans la suite de ce Mémoire qu'il y a effectivement des ellipsoïdes de Jacobi qui sont stables.)

Une autre forme d'équilibre stable, si le moment de la quantité de mouvement est assez grand, sera celle où la masse se subdivise en deux corps isolés, comparables à une planète et un satellite dont les vitesses de rotation seraient égales entre elles et à celles de révolution.

h. Il existe également des configurations où le fluide se subdivise en plus de deux masses détachées, mais elles sont instables.

i. Il subsiste une importante lacune entre le plus grand moment de la quantité de mouvement qui correspond à un ellipsoïde de Jacobi stable et le plus petit moment qui correspond à l'équilibre stable de deux masses isolées. Il y aurait intérêt à combler cette lacune par des figures intermédiaires. (J'ai fait à la fin de ce Mémoire une tentative dans ce sens, mais je n'ai réussi pour ainsi dire qu'à amorcer le problème et à indiquer la voie à suivre.)

j. Si l'énergie avec un moment donné est un minimum ou un maximum, l'équilibre est stable, pourvu que le liquide soit parfaitement dépourvu de viscosité. Il est probable qu'il est instable si l'énergie est un « minimax » mais cela n'a pas encore été démontré. (Nous verrons dans la suite de ce Mémoire un exemple où l'équilibre est stable à la condition que le fluide soit *absolument* dépourvu de viscosité et bien que l'énergie soit un « minimax »).

k. Si le liquide est visqueux, et si peu qu'il le soit, l'équilibre sera certainement instable si l'énergie est un maximum ou un minimax, et certainement stable si elle est un minimum.

Je donnerai dans la suite de ce travail la démonstration de quelques-unes des propositions que sir William Thomson avait seulement énoncées, et je les compléterai même sur divers points, comme je l'ai déjà indiqué dans les parenthèses que j'ai intercalées dans le précédent exposé.

Je démontrerai aussi l'existence de figures d'équilibre tout à fait différentes de celles dont parlent MM. Tait et Thomson.

J'ai déjà donné dans le *Bulletin Astronomique* [1] une courte Note où j'étudie plus en détail l'anneau simple ou multiple dont il est question dans le passage cité plus haut (b, c et d).

Dans cette étude, je me suis rencontré avec Mme Kowalevski qui avait déjà employé les mêmes procédés d'analyse dans un Mémoire sur l'anneau de Saturne, qui avait été communiqué en 1874 à l'Université de Göttingen et qui n'a été imprimé qu'en 1885 dans les *Astronomische Nachrichten*.

II. — Équilibre de bifurcation.

Considérons d'abord le cas où il s'agit d'un équilibre absolu et d'un système dont la position est définie par n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons qu'il y ait une fonction des forces $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de façon que l'équilibre ait lieu quand toutes les dérivées de cette fonction s'annulent et qu'il soit stable quand cette fonction est maximum. Je supposerai qu'outre les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il entre dans la fonction F un paramètre variable y, de telle sorte que les valeurs des x qui correspondent à l'équilibre dépendent de ce paramètre y.

Supposons que y ait une valeur déterminée; les équations d'équilibre :

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0 \tag{1}$$

auront un certain nombre de racines; quand on fera varier y, (si F est une fonction holomorphe des x et des y, ce que nous supposerons d'abord), ces racines varieront d'une manière continue. Nous aurons ainsi un certain nombre de séries linéaires de racines :

$$\begin{array}{llll}
x_1 = \varphi_{11}(y), & x_2 = \varphi_{12}(y), & \ldots, & x_n = \varphi_{1n}(y); \\
x_1 = \varphi_{21}(y), & x_2 = \varphi_{22}(y), & \ldots, & x_n = \varphi_{2n}(y); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \\
x_1 = \varphi_{k1}(y), & x_2 = \varphi_{k2}(y), & \ldots, & x_n = \varphi_{kn}(y).
\end{array}$$

Dans chacune de ces séries linéaires, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions continues du paramètre y. Pour certaines valeurs de y, deux ou plusieurs racines peuvent se confondre. Quelle est la condition pour qu'il en soit ainsi?

Soit Δ le déterminant fonctionnel des n dérivées $\frac{dF}{dx_1}, \frac{dF}{dx_2}, \ldots, \frac{dF}{dx_n}$ par rapport aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou, en d'autres termes, le hessien de

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 17.

la fonction F par rapport à ces n variables. La condition nécessaire et suffisante pour que deux ou plusieurs racines se confondent, c'est que Δ soit nul.

Supposons que pour une certaine valeur α de y, pour laquelle Δ s'annule, p racines des équations (1) viennent à se confondre, ou en d'autres termes, qu'une même racine appartienne à la fois à p séries linéaires. Parmi les p racines qui appartiennent à ces p séries linéaires, il y en aura $2q$ qui seront imaginaires et $p-2q$ qui seront réelles pour $y<\alpha$; il y en aura d'autre part $2r$ qui seront imaginaires et $p-2r$ qui seront réelles pour $y>\alpha$.

Si $p=2$, $q=r=0$, les racines des deux séries linéaires sont réelles, et l'on a ainsi une racine qui appartient à la fois à deux séries réelles.

Si $p=2$, $q=0$, $r=1$, les racines sont toutes deux réelles pour $y<\alpha$, et toutes deux imaginaires pour $y>\alpha$. Quand y en croissant atteint et dépasse la valeur α, deux racines réelles se confondent, puis deviennent imaginaires.

Si $p=3$, $q=r=1$, il y a pour $y<\alpha$ et pour $y>\alpha$, une racine réelle et deux imaginaires, de sorte que la racine qui correspond à $y=\alpha$ n'appartient qu'à une seule série réelle. Mais il est aisé de voir dans ce cas que Δ s'annule sans changer de signe.

Il est inutile de citer d'autres cas particuliers, j'arrive tout de suite au résultat général que j'ai en vue. Soit

$$x_1=\varphi_1(y),\qquad x_2=\varphi_2(y),\qquad \ldots,\qquad x_n=\varphi_n(y) \tag{2}$$

une série linéaire de racines; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions continues et uniformes de y. Supposons de plus que pour les valeurs de y voisines de α, qu'elles soient inférieures ou supérieures à cette quantité, les fonctions φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ restent réelles. Si l'on substitue dans $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cette fonction Δ ne dépendra plus que de y. Je suppose que pour $y=\alpha$, la fonction $\Delta(y)$ change de signe. Je dis alors que la racine $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)$ appartiendra non seulement à la série (2) mais à une autre série linéaire de racines réelles.

Avant de démontrer ce résultat général, donnons quelques exemples. Soit

$$F=Ax_1^2+\frac{1}{3}x_2^3-y^2x_2-\alpha yx_2.$$

Il vient pour les équations d'équilibre :

$$x_1=0,\qquad x_2=\pm\sqrt{y^2+\alpha y};$$

d'où

$$\Delta=4Ax_2=\pm 4A\sqrt{y^2+\alpha y}.$$

Pour les valeurs de y comprises entre zéro et $-\alpha$ les valeurs de x_2 sont imaginaires; elles sont réelles pour les autres valeurs de y. Pour $y=0$, et pour $y=-\alpha$, les racines passent du réel à l'imaginaire ou réciproquement; c'est aussi pour ces mêmes valeurs que Δ s'annule.

Faisons en particulier : $\alpha=0$; il y aura deux séries linéaires de positions d'équilibre :

$$x_1=0, \qquad x_2=y \tag{2}$$

et

$$x_1=0, \qquad x_2=-y. \tag{3}$$

Considérons la première de ces séries; pour chacune des positions qui lui appartiennent on aura

$$\Delta=4Ay.$$

Quand y variera depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, les valeurs de x_1 et de x_2 resteront réelles, mais quand y passera par zéro, Δ changera de signe. Donc en vertu du principe que je viens d'énoncer, la position d'équilibre qui correspond à la valeur $y=0$, c'est-à-dire

$$x_1=0, \qquad x_2=0,$$

appartiendra non seulement à la série (2), mais encore à une autre série linéaire de positions d'équilibre. Il est aisé en effet de constater qu'elle appartient également à la série (3).

Soit maintenant

$$F=Ax_1^2+\frac{x_2^4}{4}-y^3x_2.$$

Les équations d'équilibre deviennent

$$x_1=0, \qquad x_2^3=y^3.$$

Il n'y a qu'une série de positions d'équilibre *réelles*, à savoir :

$$x_1=0, \qquad x_2=y,$$

et l'on voit que ces positions restent réelles quand y varie de $-\infty$ à $+\infty$. Aucune de ces positions ne peut donc appartenir à plusieurs séries de positions d'équilibre réelles comme cela avait lieu tout à l'heure. Cependant

$$\Delta=6Ay^2$$

s'annule pour $y=0$, *mais sans changer de signe.*

Pour démontrer ce principe que je viens d'énoncer et d'illustrer par quelques exemples, je supposerai que $n=1$, de telle façon que je n'aie plus que

deux variables : x qui définit la position du système et le paramètre y. On aura

$$\Delta = \frac{d^2 F}{dx^2}$$

et l'équation d'équilibre sera

$$\frac{dF}{dx} = F'(x, y) = 0.$$

L'équation $F'(x, y) = 0$ pourra être considérée comme représentant une courbe plane C. Soit $x = \varphi(y)$ une fonction uniforme, réelle, finie et continue de y qui satisfasse à l'équation

$$F'[\varphi(y), y] = 0.$$

L'équation $x = \varphi(y)$ représentera alors une des branches B de la courbe C. Soit $M(x = \alpha, y = \beta)$ un des points de cette branche de courbe. Supposons que lorsqu'on suit cette branche de courbe, on voie Δ changer de signe au moment où l'on franchit le point M. Je dis qu'il passera par le point M une autre branche de la courbe C.

Soient en effet P le point de la branche B qui a pour ordonnée $y = \beta - \varepsilon$ et Q le point qui a pour ordonnée $y = \beta + \varepsilon$ (ε étant très petit). Ces deux points sont réels, puisque par hypothèse $\varphi(y)$ est une fonction réelle de y. Je suppose par exemple qu'au point P, $\frac{d^2 F}{dx^2} = \Delta$ soit positif, et négatif au point Q.

Par les points P et Q, je mène des parallèles à l'axe des x et je prends sur ces parallèles deux points P′ et Q′ à gauche de P et de Q. Au point P, $\frac{dF}{dx}$ est nul et $\frac{d^2 F}{dx^2}$ positif; donc si le point P′ est assez voisin de P, la dérivée première $\frac{dF}{dx}$ y sera négative. On verra de la même façon que si le point Q′ est assez voisin de Q, $\frac{dF}{dx}$ y sera positive. Allons du point P′ au point Q′ en suivant une courbe qui s'éloigne très peu de la branche B, mais qui ne coupe pas cette branche; cela est toujours possible. Nous verrons $\frac{dF}{dx}$ changer de signe; il faut donc qu'à un certain moment $\frac{dF}{dx}$ s'annule et par conséquent que nous traversions une branche de la courbe C. Il y a donc une seconde branche de cette courbe qui vient passer par le point M.

En d'autres termes, ce point M est au moins un point double de la courbe C; je puis même affirmer que c'est un point multiple d'ordre pair.

Il est à remarquer que dans la démonstration précédente, nous n'avons pas été obligés de supposer que la fonction F est holomorphe, mais seulement

qu'elle est finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Il y a un cas particulier sur lequel il est nécessaire d'attirer l'attention. Soit

$$F = yx^2, \qquad \frac{dF}{dx} = 2xy, \qquad \Delta = 2y.$$

Nous avons une première série de positions d'équilibre réelles qui nous sont données par l'équation $x = 0$. Comme Δ s'annule avec y, il doit passer par le point $x = y = 0$ une seconde branche de la courbe C et en se reportant à la valeur de $\frac{dF}{dx}$, on voit que cette seconde branche n'est autre chose que la droite $y = 0$. Cette droite ne représente pas une série linéaire de positions d'équilibre analogue à celles que nous avons rencontrées jusqu'ici. C'est une série de positions d'équilibre indifférent; car si y s'annule, l'équilibre subsiste quel que soit x.

Supposons maintenant que la fonction F ne contenant toujours qu'une seule variable x, dépende non plus d'un seul paramètre y, mais de deux paramètres y_1 et y_2. Nous pourrons regarder x, y_1 et y_2 comme les coordonnées d'un point dans l'espace; alors l'équation

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

représentera une surface S dont chacun des points correspondra à une position d'équilibre.

L'équation

$$\Delta = \frac{d^2F}{dx^2} = 0$$

représentera une seconde surface S'. Supposons que l'on considère une nappe N de la surface S représentée par une équation

$$x = \varphi(y_1, y_2),$$

où φ est une fonction finie, continue et *réelle* de y_1 et de y_2. Supposons que cette nappe soit coupée par la surface S' et de telle sorte que Δ change de signe quand on traverse la surface S' en suivant la nappe N. Alors la courbe d'intersection de N et de S' est une courbe double (ou multiple d'ordre supérieur, mais pair) de la surface S, par laquelle vient passer une autre nappe N' de cette surface S.

Il suffit en effet pour être ramené au cas d'un seul paramètre, de supposer entre y_1 et y_2 une relation linéaire

$$y_1 = ay_2 + b$$

ou en d'autres termes, de couper les surfaces S et S′ par un plan quelconque parallèle à l'axe des x.

On arriverait évidemment à un résultat analogue dans le cas où l'on aurait p paramètres $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Supposons maintenant $n = 2$; de telle façon que nous ayons deux variables x_1 et x_2 définissant la position du système, et un seul paramètre y. Je regarderai alors x_1, x_2 et y comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Les équations d'équilibre :

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_2} = 0$$

représenteront alors deux surfaces S_1 et S_2 dont l'intersection sera une courbe gauche C. Soient

$$(4) \qquad x_1 = \varphi_1(y), \qquad x_2 = \varphi_2(y)$$

deux fonctions finies, continues et réelles de y et supposons que ces équations (4) représentent une branche B de la courbe C. Soit M un point de cette branche B; supposons que si l'on suit la branche B dans le sens des y croissants, on voie Δ changer de signe au moment où l'on franchit le point M. Soient P et Q deux points de B ayant pour ordonnées $y = \beta - \varepsilon$, $y = \beta + \varepsilon$; (l'ordonnée du point M étant $y = \beta$). Au point P, Δ sera par exemple positif, et négatif au point Q.

S'il en est ainsi, je dis qu'il passera par le point M une seconde branche de la courbe C.

En effet, par les divers points de l'arc de courbe PQ faisons passer des plans parallèles au plan des $x_1 x_2$ et dans chacun de ces plans décrivons une circonférence de rayon r ayant son centre au point correspondant de l'arc PQ. Ces diverses circonférences engendreront une certaine surface Σ qui sera doublement connexe et limitée par les deux circonférences K et K′ qui ont pour centres les points P et Q. De plus, d'après ce mode de génération aucun point de la branche B ne peut se trouver sur la surface Σ.

Pour trouver le nombre des points d'intersection de cette surface Σ avec la courbe C, il faut maintenant chercher ce que M. Kronecker appelle (*Berliner Monatsberichte*, mars 1869) la *caractéristique* du système des surfaces Σ, S et S_1. Le nombre des points d'intersection de ces trois surfaces (ou si l'on veut de la surface Σ et de la courbe C) qui satisfont à certaines conditions, diminué du nombre des points d'intersection qui ne satisfont pas à ces mêmes conditions, est égal d'après le Mémoire cité de M. Kronecker à une certaine

intégrale. Cette intégrale est prise le long des limites du domaine Σ, c'est-à-dire le long des deux circonférences K et K'.

L'espace pourra être regardé comme partagé en quatre régions a, b, c, d suivant le signe des deux fonctions $\frac{dF}{dx_1}$ et $\frac{dF}{dx_2}$. Dans la région a, par exemple, les deux fonctions seront positives; dans la région b, $\frac{dF}{dx_1}$ sera positif et $\frac{dF}{dx_2}$ négatif, etc. Δ étant positif au point P, on rencontrera en suivant la circonférence K les quatre régions dans l'ordre circulaire $abcd$, pourvu toutefois que r soit suffisamment petit. Nous supposons qu'on ait parcouru K de façon à laisser à sa gauche le domaine Σ. L'intégrale de M. Kronecker le long de K est alors égale à 1. Δ étant négatif au point Q, on rencontrera en suivant K' les quatre régions dans l'ordre circulaire $adcb$, si l'on décrit cette circonférence dans le même sens que K. Mais si l'on veut laisser le domaine Σ à sa gauche, il faut décrire K' en sens contraire et alors les quatre régions se succèdent dans l'ordre $abcd$. L'intégrale est donc encore égale à 1 et l'intégrale totale est égale à 2.

Le nombre des points d'intersection de Σ et de C est donc au moins égal à 2; et aucun de ces points ne peut appartenir à B. Il faut donc que par le point M passe une seconde branche de la courbe C. C. Q. F. D.

(Dans le cas où le théorème de M. Kronecker s'applique à une multiplicité à deux dimensions et à deux fonctions X et Y, et où par conséquent son intégrale doit être prise le long d'une courbe fermée, on voit aisément que cette intégrale est égale à la demi-différence du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ et du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$.)

Le résultat s'étendrait sans peine au cas où nous aurions un plus grand nombre de variables. Le théorème de M. Kronecker serait en effet encore applicable.

Résumons les résultats de ce paragraphe.

Les formes d'équilibre du système considéré sont données par les n équations

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0.$$

Ces n équations auront un certain nombre de solutions réelles et quand y variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d'une façon continue de manière à former diverses *séries linéaires de formes d'équilibre*.

Il pourra d'ailleurs arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une *forme de bifurcation*. On peut, en effet, pour une valeur de y infiniment voisine de celle qui correspond à cette forme, trouver *deux* formes d'équilibre qui diffèrent infiniment peu de la forme de bifurcation.

Il peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles viennent, quand on fait varier y, à se confondre, puis à disparaître, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite*.

Une forme d'équilibre ne peut être une forme de bifurcation ou une forme limite qu'à la condition que Δ soit nul. Il résulte de là que si les équations d'équilibre admettent pour une certaine valeur de y une solution pour laquelle Δ ne soit pas nul, elles en admettront encore une et infiniment peu différente de la première, pour les valeurs de y suffisamment voisines de celle que l'on avait considérée d'abord. En effet s'il n'en était pas ainsi, la forme d'équilibre qui correspond à la première solution serait une forme limite, ce qui exigerait que Δ fût nul.

Si l'on suit une série linéaire de formes d'équilibre réelles en faisant varier y et que l'on voie Δ s'annuler et changer de signe, la forme d'équilibre correspondante ne peut être une *forme limite* puisque les formes d'équilibre très voisines qui appartiennent à la série linéaire sont supposées réelles. Il résulte de ce qui précède que c'est toujours une *forme de bifurcation*.

Si, enfin, en suivant une série linéaire de formes réelles, on voit Δ s'annuler, mais sans changer de signe, on est sûr, pour la raison que je viens de dire, que la forme correspondante n'est pas une forme limite. Elle peut être une forme de bifurcation, mais il n'en est pas toujours ainsi.

III. — Échange des stabilités.

Considérons la forme quadratique

$$\Phi = \sum \frac{d^2 V}{dx_i dx_k} X_i X_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$$

contenant les n indéterminées $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Cette forme aura pour discriminant Δ.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit (puisqu'il s'agit d'un équi-

libre absolu) que la fonction des forces F soit maximum, c'est-à-dire que la forme Φ soit définie négative.

Imaginons qu'on ait décomposé la forme Φ en une somme de n carrés :

$$\Phi = \Sigma \alpha_i Y_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où Y_i est une fonction linéaire des X. Supposons que parmi les coefficients α, que j'appellerai coefficients de stabilité, il y en ait ν positifs et $n - \nu$ négatifs. Δ sera positif si $n - \nu$ est pair, et négatif si $n - \nu$ est impair. Δ sera nul quand un des coefficients α s'annulera. Enfin il y aura stabilité si tous les coefficients de stabilité sont négatifs. Il est inutile de faire observer que le nombre ν est indépendant de la manière dont la forme Φ a été décomposée en carrés.

Supposons que pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $y = 0$, on ait une forme d'équilibre de bifurcation, c'est-à-dire que les n dérivées partielles $\frac{dF}{dx_i}$ s'annulent ainsi que Δ. Je dis que nous pourrons toujours supposer que l'on a aussi

$$\frac{d^2 F}{dx_1 dx_k} = 0 \qquad (i \neq k).$$

En effet, cela revient à dire que la forme Φ ne contient pas de termes rectangles; or, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours décomposer la forme Φ en carrés, comme on l'a dit plus haut, c'est-à-dire qu'on pourrait, par une transformation linéaire, faire disparaître les termes rectangles. Les coefficients de stabilité sont alors $\frac{d^2 F}{dx_1^2}, \frac{d^2 F}{dx_2^2}, \ldots, \frac{d^2 F}{dx_n^2}$. Pour que Δ s'annule, il faut et il suffit qu'un ou plusieurs de ces coefficients s'annulent. Supposons par exemple que $\frac{d^2 F}{dx_1^2}$ s'annule et que les autres coefficients ne s'annulent pas. Supposons enfin que la fonction F soit holomorphe et puisse se développer suivant les puissances de x et de y.

De l'équation $\frac{dF}{dx_2} = 0$ nous tirerons x_2 en fonction holomorphe de x_1, $x_3, \ldots, x_n$ et y. Pour que cela soit possible, il suffit que $\frac{d^2 F}{dx_2^2}$ ne soit pas nul, ce qui a lieu en effet. Substituons ensuite partout à la place de x_2 la valeur ainsi trouvée. De l'équation $\frac{dF}{dx_3} = 0$, nous tirerons ensuite x_3 en fonction holomorphe de $x_1, x_4, \ldots, x_n$ et y. Cela est encore possible parce que $\frac{d^2 F}{dx_3^2}$ n'est pas nul. On continuera de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux variables x_1 et y et une seule équation d'équilibre $\frac{dF}{dx_1} = 0$. Quant à x_2,

$x_3, \ldots, x_n$, les autres équations d'équilibre, résolues comme on vient de le dire, les fournissent sous la forme

$$(1) \qquad x_2 = \varphi_2(x_1, y), \qquad x_3 = \varphi_3(x_1, y), \qquad \ldots \qquad x_n = \varphi_n(x_1, y),$$

les φ étant holomorphes.

Quant à l'équation $\frac{dF}{dx_1} = 0$, elle s'écrira, toutes réductions faites,

$$(2) \qquad 0 = ax_1^2 + 2bx_1y + cy^2 + \Theta,$$

Θ représentant un ensemble de termes de degré supérieur au second en x_1 et y. On voit que si x_1 et y sont les coordonnées d'un point dans un plan, cette équation représente une courbe à point double, ce qui montre de nouveau que la forme d'équilibre considérée est une forme de bifurcation. Nous supposerons [1]

$$b^2 - ac > 0.$$

Nous tirerons alors, de l'équation (2), x_1 en fonction de y de deux manières différentes

$$(3) \qquad x_1 = \psi_1(y), \qquad x_1 = \psi_2(y),$$

les ψ étant holomorphes. Les deux équations (3) jointes aux équations (1) nous donnent les deux séries linéaires de forme d'équilibre.

Formons Δ et considérons le d'abord comme fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et y. En remplaçant $x_2, \ldots, x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (1), Δ ne sera plus fonction que de x_1 et de y et l'on reconnaîtra aisément que

$$\Delta = 2M(ax_1 + by) + \Delta_1,$$

M étant le produit des $n-1$ dérivées $\frac{d^2F}{dx_2^2}, \frac{d^2F}{dx_3^2}, \ldots, \frac{d^2F}{dx_n^2}$ et Δ_1 étant un ensemble de termes de degré supérieur au premier.

L'équation $\Delta = 0$ représentera alors une courbe Δ passant par l'origine dans le plan des x, y et l'équation (2) représentera une courbe C formée de deux branches B et B'. Les équations de ces deux branches de courbe qui ne sont autres que les équations (3) pourront s'écrire

$$x_1 = y\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right) + \Lambda_1, \qquad x_1 = y\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right) + \Lambda_2,$$

---

[1] Si $b - ac$ est nul, la forme d'équilibre est en général une forme limite; cependant, elle est de bifurcation dans certains cas exceptionnels. (J. L.).

Y_1 et Y_2 étant des termes de degré supérieur au premier. Si dans l'expression Δ on remplace x_1 par $\psi_1(y)$ ou par $\psi_2(y)$, on trouve

$$\Delta = \pm 2M\sqrt{b^2 - ac}\, y + \Delta_2,$$

Δ_2 représentant un ensemble de termes de degré supérieur au premier. Le signe $+$ se rapporte à la substitution de ψ_1, c'est-à-dire à la branche B et le signe $-$ à la substitution de ψ_2, c'est-à-dire à la branche B'.

Ainsi, que l'on suive la branche B ou la branche B', on verra Δ changer de signe en même temps que y. De plus pour toutes les valeurs de y, voisines de zéro, Δ a des valeurs de signe contraire, selon qu'on suit la branche B ou la branche B'. Par exemple, pour y positif, Δ sera positif sur la branche B et négatif sur la branche B'; pour y négatif, ce sera le contraire, Δ sera négatif sur la branche B et positif sur la branche B'.

Supposons qu'à l'origine, un des coefficients de stabilité soit nul (ce qui est conforme à l'hypothèse faite plus haut), que ν de ces coefficients soient négatifs et $n - \nu - 1$ positifs. Dans le voisinage de l'origine, il y aura toujours (par raison de continuité) ν ou $\nu + 1$ coefficients de stabilité négatifs. Si ν est pair, il y en aura ν toutes les fois que Δ sera positif et $\nu + 1$ toutes les fois que Δ sera négatif. Ce sera le contraire si ν est impair.

Il résulte de là que, si pour y positif, on a ν coefficients négatifs sur la branche B et $\nu + 1$ coefficients négatifs sur la branche B', ce sera l'inverse pour y négatif et l'on aura alors $\nu + 1$ coefficients négatifs sur la branche B et ν sur la branche B'. Si au contraire on a pour y positif, $\nu + 1$ coefficients négatifs sur la branche B et ν sur la branche B', on aura inversement, pour y négatif, ν coefficients négatifs sur la branche B et $\nu + 1$ sur la branche B'.

Pour qu'il y ait stabilité, il faut et il suffit que tous les coefficients de stabilité soient négatifs. Si donc pour y positif il y a stabilité sur la branche B et instabilité sur la branche B', ce sera l'inverse pour y négatif. De même si pour y positif il y a instabilité sur la branche B et stabilité sur B', ce sera encore l'inverse pour y négatif. En d'autres termes, il y a *échange des stabilités* entre les deux branches B et B' au moment où elles se croisent.

Pour établir ce résultat, j'ai supposé, non seulement que F était continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, mais encore que cette fonction était holomorphe. Cette hypothèse n'est nullement nécessaire. Pour le faire voir, je vais reprendre le raisonnement en supposant $n = 1$.

Dans ce cas, la courbe C se réduit à une courbe plane et Δ à $\frac{d^2F}{dx^2}$. Soit O le

point du plan qui correspond à la forme d'équilibre de bifurcation. Du point O comme centre, décrivons un cercle K de rayon très petit. Ce cercle K rencontrera la courbe C en un certain nombre de points. Il résulte du raisonnement du paragraphe précédent, que si un arc de courbe joint deux points de C où le signe de Δy ne soit pas le même, cet arc devra couper la courbe C en un nombre impair de points; et que si au contraire Δy a même signe aux deux extrémités, l'arc de courbe considéré devra couper C en un nombre pair de points. Donc si l'on envisage les différents points d'intersection de C et de K dans l'ordre où l'on rencontre en suivant le cercle K, on verra que Δy y sera alternativement positif et négatif. Le nombre total des points d'intersection est donc pair. Si nous supposons en particulier que deux branches de courbe seulement viennent passer au point O, nous aurons alors deux points d'intersection α_1 et α_2 où y sera négatif et deux points d'intersection β_1 et β_2 où y sera positif. La branche $O\beta_1$ devra alors être regardée comme le prolongement de la branche $\alpha_1 O$, de même que $O\beta_2$ comme le prolongement de $\alpha_2 O$. Je suppose, pour fixer les idées, qu'en α_1, Δ soit positif. Alors d'après la règle qui précède, Δ sera négatif en α_2, négatif encore en β_1 et positif en β_2, ce qui confirme le résultat précédemment obtenu. Il serait aisé, d'après les considérations que je viens d'exposer, de voir ce qui se passerait si plus de deux branches de courbes venaient passer en O.

Nous avons dit plus haut que si en suivant une série réelle de formes d'équilibre, on voyait Δ s'annuler sans changer de signe, on ne pouvait affirmer que la forme correspondante fût une forme de bifurcation. Nous pouvons remarquer que Δ peut de deux manières s'annuler sans changer de signe. Il peut arriver ou bien que plusieurs coefficients de stabilité s'annulent sans changer de signe; ou bien que deux (ou un nombre pair) de ces coefficients changent de signe. Dans le premier cas, nous ne pouvons en effet rien affirmer; voyons ce qui se passe dans le second.

Nous supposerons pour fixer les idées que

$$\frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k} = 0 \quad (i \gtrless k), \qquad \frac{d^2 F}{dx_1^2} = \frac{d^2 F}{dx_2^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 F}{dx_3^2} < 0, \qquad \frac{d^2 F}{dx_4^2} < 0, \qquad \ldots \qquad \frac{d^2 F}{dx_n^2} < 0.$$

Il arrivera alors que des $n - 2$ équations d'équilibre

$$\frac{dF}{dx_2} = \frac{dF}{dx_3} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

on pourra tirer $x_3, x_4, \ldots, x_n$ en fonctions holomorphes de x_1, x_2 et y. Si dans les deux autres équations d'équilibre

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = 0$$

on substitue ces valeurs de $x_3, x_4, \ldots, x_n$, ces équations deviennent

$$(4) \qquad \Phi_1 + \Phi_2 = 0, \qquad \Phi'_1 + \Phi'_2 = 0,$$

où Φ_1 et Φ'_1 représentent un ensemble de termes du deuxième degré en x_1, x_2, y et Φ_2 et Φ'_2 un ensemble de termes de degré supérieur au second: (si l'on suppose comme plus haut que la position d'équilibre envisagée soit $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = y = 0$).

Regardons x_1, x_2 et y comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Les deux équations (4) représenteront deux surfaces ayant chacune à l'origine un point conique du deuxième ordre. L'intersection de ces deux surfaces sera la courbe C. On voit que par l'origine passeront quatre branches de la courbe C, réelles ou imaginaires. Mais une de ces quatre branches est certainement réelle, puisque j'ai supposé au début qu'on a pu suivre, dans le voisinage de la position d'équilibre envisagée, une série de formes d'équilibre réelles. Il faut donc qu'il y ait une autre des quatre branches qui soit réelle. La forme d'équilibre envisagée est donc de bifurcation.

D'où la conclusion suivante :

Pour qu'une forme d'équilibre appartenant à une série linéaire réelle soit de bifurcation, il suffit, non seulement que Δ change de signe, mais que l'un quelconque des coefficients de stabilité change de signe.

IV. — **Cas d'un nombre infini de variables.**

Les problèmes traités dans les deux paragraphes précédents ne présentent aucune espèce de difficulté. Malheureusement, lorsqu'on recherche la figure d'équilibre d'une masse fluide soumise à diverses forces, la question est beaucoup plus compliquée. En effet, la figure d'une pareille masse dépend, non pas d'un nombre fini de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais d'un nombre infini de variables.

Supposons par exemple une aire plane A peu différente d'un cercle ; l'équation

de la courbe qui limite cette aire plane pourra s'écrire, en coordonnées polaires (ρ et φ) :

$$\rho = r + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots$$
$$+ \gamma_1 \sin\varphi + \gamma_2 \sin 2\varphi + \ldots + \gamma_n \sin n\varphi + \ldots,$$

les β et les γ étant très petits par rapport à r, et la figure de l'aire plane dépendra des coefficients r, β et γ qui sont en nombre infini.

Supposons que tous les éléments de l'aire A s'attirent en raison inverse des distances et en raison directe de leurs surfaces. Il résultera de cette attraction une énergie potentielle W qui sera représentée par l'intégrale suivante :

$$W = \iint d\omega\, d\omega' \log \frac{1}{\Delta},$$

$d\omega$ et $d\omega'$ étant deux éléments quelconques de l'aire A et Δ la distance de ces deux éléments. On reconnaît alors que W est une fonction holomorphe de r, des β et des γ. Je veux dire que si l'on fait varier seulement un nombre fini n de ces coefficients, les autres restant constants, W sera une fonction holomorphe des n coefficients variables.

Supposons que les β et γ étant regardés comme très petits, on calcule l'intégrale W en négligeant les cubes des β et des γ. On trouvera

$$W = \frac{\pi^2 r^4}{2}\left(\log\frac{1}{r} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r^2}{2}\sum_n (\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1 + \log\frac{1}{r}\right).$$

On pourra tirer de là la conclusion suivante :

Si l'on suppose que l'aire A soit assujettie à être équivalente à une aire donnée πr_0^2 de telle sorte que

$$r^2 + \sum \frac{\beta_n^2 + \gamma_n^2}{2} = r_0^2 \tag{1}$$

et qu'en même temps β_1 et γ_1 soient assujettis à être nuls, le cercle dont le rayon est r_0 sera une forme d'équilibre de l'aire A.

On déduit de (1) que

$$r^2 = r_0^2 - \sum \frac{\beta_n^2 + \gamma_n^2}{2}$$

et en négligeant toujours les cubes des β et des γ

$$W = \frac{\pi^2 r_0^4}{2}\left(\log\frac{1}{r_0} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r_0^2}{2}\Sigma(\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que si l'on regarde W comme une fonction d'un

nombre fini des coefficients β et γ, les autres coefficients restant constants, on aura

$$\frac{d^2 W}{d\beta_n\, d\gamma_n} = 0, \qquad \frac{d^2 W}{d\beta_n^2} = \frac{d^2 W}{d\gamma_n^2} = \pi r_0^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right),$$
$$\frac{d^2 W}{d\beta_i\, d\beta_k} = \frac{d^2 W}{d\gamma_i\, d\gamma_k} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Il résulte de là que la série infinie

$$\pi^2 r_0^2 \Sigma(\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

joue le même rôle que jouait la forme quadratique Φ dans le paragraphe précédent, avec cette différence, qu'au lieu d'un nombre fini de variables X_1, X_2, ..., X_n, il y entre un nombre infini de variables β_n et γ_n.

Les coefficients de stabilité sont alors les quantités $\pi r_0^2\left(\frac{1}{n} - 1\right)$. On voit que tous ces coefficients sont négatifs, de telle façon que l'équilibre est stable.

Cet exemple permet de voir comment la notion des coefficients de stabilité peut s'étendre au cas où l'équilibre dépend d'un nombre infini de conditions.

On peut de même étendre à ce cas la notion des formes d'équilibre de bifurcation et des formes d'équilibre limite. Supposons en effet que les forces auxquelles sont soumis les éléments de l'aire A dépendent d'un paramètre y. Pour chaque valeur de y nous aurons un certain nombre de formes d'équilibre. Lorsque y variera, ces formes varieront aussi, en général d'une manière continue. On aura ainsi un certain nombre de séries linéaires de formes d'équilibre. Pour chacune de ces séries, les coefficients β et γ seront des fonctions finies, continues, uniformes et réelles de y. Il pourra arriver alors que quand y tendra vers une certaine valeur α, deux formes d'équilibre réelles, appartenant à deux de ces séries linéaires, tendront à se confondre. Lorsque y aura dépassé cette valeur α, il arrivera, ou bien que les deux formes d'équilibre envisagées disparaîtront et cesseront d'être réelles, ou bien qu'elles resteront réelles et cesseront de se confondre. Dans le premier cas, on aura une forme d'équilibre limite. Dans le second cas, une forme d'équilibre de bifurcation. Rien n'est donc changé à ces définitions qui restent les mêmes que dans les cas précédemment examinés.

Il reste à étendre les résultats du paragraphe précédent au cas qui nous occupe actuellement. Il faut montrer que :

1° Pour une forme d'équilibre limite, l'un des coefficients doit s'annuler.

2° Si l'on suit une série linéaire de formes d'équilibre et si l'on voit un des coefficients de stabilité changer de signe, la forme qui correspond à la valeur de y pour laquelle se fait le changement de signe est une forme de bifurcation.

3° La loi de l'échange des stabilités s'étend au cas qui nous occupe.

Nous démontrerons ces trois propositions en partant de l'hypothèse suivante :

Le nombre des variables étant infini, celui des coefficients de stabilité devra également être infini; *mais je supposerai que parmi les coefficients, il n'y en a qu'un nombre fini de positifs.*

J'appellerai $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ les variables qui définissent la forme du système et y un paramètre dont dépendront les forces qui agissent sur ce système. Je supposerai que ces variables ont été choisies de telle sorte que pour la forme d'équilibre envisagée et que nous appellerons A, on ait

$$0 = y = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots.$$

Si dans la fonction des forces $F(x, y)$ on fait $y = 0$, nous pouvons encore supposer que les variables x aient été choisies de telle sorte que l'on puisse écrire, en négligeant les cubes des quantités x supposées très petites :

$$F(x, 0) = A + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 + \alpha_{n+1} x_{n+1}^2 + \ldots + \alpha_p x_p^2 + \ldots.$$

Nous supposerons, conformément à l'hypothèse faite plus haut, que parmi les n coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ il peut y en avoir de positifs ou de nuls, mais que tous les coefficients suivants $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_p, \ldots$ sont négatifs.

Avant d'aller plus loin, je dois faire une autre remarque. Quand nous n'avions qu'un nombre fini de variables, nous regardions la fonction F comme définie pour toutes les valeurs de x, ou du moins pour toutes les valeurs suffisamment petites de ces variables. Il n'en peut plus être de même ici. La fonction F ne sera définie que quand une certaine série à termes positifs

$$(2) \qquad \lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2| + \lambda_3 |x_3| + \ldots + \lambda_n |x_n| + \ldots$$

sera convergente. Le choix des variables x étant encore arbitraire dans une certaine mesure, nous pouvons supposer qu'on les ait choisies de façon que tous les λ soient égaux à 1.

Cela posé, nous pouvons passer à la démonstration des trois propositions énoncées ci-dessus.

1° Je dis d'abord que si aucun des coefficients α n'est nul, la forme A ne

pourra être une forme limite, c'est-à-dire que pour des valeurs de y très petites (mais d'ailleurs positives ou négatives), le système sera susceptible d'une forme d'équilibre très voisine de cette forme A.

Pour le démontrer, je vais introduire dans le système des liaisons exprimées par les équations suivantes :

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = y_n,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant des constantes que nous regarderons comme données. Les conditions de l'équilibre du système, assujetti à ces liaisons, dépendront naturellement du choix des $n+1$ paramètres $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ et elles seront exprimées par les équations en nombre infini :

$$0 = \frac{dF}{dx_{n+1}} = \frac{dF}{dx_{n+2}} = \ldots = \frac{dF}{dx_p} = \ldots$$

Dans le cas particulier où

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0,$$

l'équilibre aura lieu pour

$$0 = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_p = \ldots,$$

c'est-à-dire en même temps que l'équilibre du système supposé libre. Mais il y a une différence importante entre les deux cas. L'équilibre du système libre est instable parce que parmi les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, il y en a de positifs. L'équilibre du système à liaisons sera stable parce que tous les coefficients α_{n+1}, $\alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_p, \ldots$ sont négatifs.

Je dis que pour les valeurs des $n+1$ paramètres y suffisamment voisines de zéro, le système à liaisons sera susceptible d'une forme d'équilibre stable très voisine de la forme A. En d'autres termes, si l'on fait

$$(3) \qquad y = \beta, \qquad y_1 = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad y_n = \beta_n,$$

on pourra prendre les β assez petits pour que la fonction F soit susceptible d'un maximum (en tenant compte des liaisons) et pour que ce maximum ait lieu pour des valeurs des x aussi petites que l'on veut.

Appelons en effet D le domaine comprenant tous les systèmes de valeurs des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p, \ldots$ qui sont telles que la série

$$(4) \qquad -\alpha_{n+1}x_{n+1}^2 - \alpha_{n+2}x_{n+2}^2 - \ldots - \alpha_p x_p^2 - \ldots$$

soit convergente et ait une somme plus petite que ε. La limite du domaine D

se composera d'un domaine δ comprenant tous les systèmes des valeurs des x tels que la série (4) soit convergente et ait une somme égale à ε.

Quand les y sont nuls, la fonction F est égale à A quand les x sont nuls, et à $A - \varepsilon + \zeta$ quand les x appartiennent au domaine δ (ζ étant un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de ε). Donnons maintenant aux y les valeurs (3). La fonction F étant continue, nous pourrons prendre les β assez petits pour que F diffère aussi peu que nous voudrons de A quand les x sont nuls, et aussi peu que nous voudrons de $A - \varepsilon + \zeta$ quand les x appartiennent au domaine δ. On pourra donc prendre les β assez petits pour que F soit plus grand quand les x sont nuls qu'en aucun point du domaine δ.

Il en résulte que la fonction F prendra en certains points du domaine D des valeurs plus grandes qu'en aucun des points de la limite de ce domaine. Il faut donc conclure qu'en un certain point du domaine D, la fonction F atteint un maximum. Il est nécessaire toutefois, pour que cette conclusion s'impose, que l'on admette que la fonction F ne va pas en augmentant indéfiniment à mesure que la série (2) devient de moins en moins convergente. Il y aurait bien des objections à faire, mais on ne saurait exiger en Mécanique la même rigueur qu'en Analyse pure pour ce qui concerne l'infini.

Le principe auquel nous sommes ainsi conduits peut s'énoncer ainsi :

Si un système mécanique quelconque, et en particulier une masse fluide, est en équilibre stable sous l'action de certaines forces, et si l'on vient y appliquer en outre des forces perturbatrices infiniment petites, ce système prendra sous l'action de ces forces une figure d'équilibre stable infiniment peu différente de sa figure primitive.

Je ne crois pas qu'on puisse le mettre sérieusement en doute, malgré les objections dont je viens de parler et qui sont de nature à intéresser plutôt l'analyste que le mécanicien.

Cela posé, la forme d'équilibre stable du système à liaisons doit être regardée comme définie; elle le sera, par exemple, par les équations

$$(5) \qquad x_{n+1} = \varphi_{n+1}(\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n); \qquad x_{n+2} = \varphi_{n+2}(\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n); \qquad \ldots$$

Les fonctions φ seront des fonctions continues des β et elles s'annuleront avec β quelles que soient les valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Si nous substituons dans F ces valeurs des $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p, \ldots$, cette fonction ne dépendra plus que de $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Il faut maintenant chercher quelles valeurs on doit donner à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

pour que l'équilibre subsiste (sans toutefois rester stable) quand on supprime les liaisons. Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{dF}{d\beta_1} = \frac{dF}{d\beta_2} = \ldots = \frac{dF}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes, il faut considérer que, les x étant définis par les équations (5), la figure du système ne dépend plus que des n variables $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et il faut chercher les conditions d'équilibre du système ainsi défini.

Je veux faire voir que pour les valeurs de β voisines de zéro, ce système admet une forme d'équilibre. Pour cela il me suffit, puisque ce système ne dépend plus que d'un nombre fini de variables, de chercher les coefficients de stabilité pour $\beta = 0$.

Or pour $\beta = 0$, puisque les fonctions φ s'annulent, on a

$$F = A + \alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2\beta_2^2 + \ldots + \alpha_n\beta_n^2 + Z,$$

Z étant un ensemble de termes d'ordre supérieur au second par rapport aux β. Les coefficients de stabilité sont donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et, comme aucun d'eux n'est nul, la forme d'équilibre considérée ne peut être une forme limite, et l'équilibre sera encore possible pour les valeurs de β voisines de zéro.

Ainsi, même lorsque la forme du système dépend d'un nombre infini de variables, une figure d'équilibre ne peut être une figure limite à moins que l'un des coefficients de stabilité ne s'annule.

2° et 3° Il resterait à établir les deux autres propositions énoncées plus haut. On les démontrerait par une méthode absolument identique. On introduirait dans le système les liaisons

$$(6) \qquad x_1 = \beta_1, \qquad x_2 = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = \beta_n,$$

de façon que la forme d'équilibre A devienne stable. On trouverait alors que pour

$$x = \beta, \qquad x_1 = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad x_n = \beta_n$$

le système à liaisons est susceptible d'une position d'équilibre stable définie par les équations

$$(5) \qquad x_{n+1} = \varphi_{n+1}(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_n); \qquad \ldots$$

Si l'on suppose maintenant les x assujettis à ces équations (5), mais que l'on supprime les liaisons (6), la fonction F ne dépend plus que des β, la figure du système ne dépend plus que de n variables. On est donc ramené au cas

d'un nombre fini de variables, auquel les propositions énoncées s'appliquent d'elles-mêmes.

En résumé, il résulte des considérations exposées dans ce paragraphe que les résultats des paragraphes II et III s'étendent au cas d'un système dont la figure dépend d'une infinité de variables, et en particulier au cas d'une masse fluide soumise à différentes forces.

V. — Première application.

MM. Tait et Thomson ont annoncé sans démonstration que, parmi les figures d'équilibre dont est susceptible une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, il y a une figure annulaire de révolution.

On peut démontrer ce résultat en appliquant les principes exposés dans les trois paragraphes précédents.

Je considère une masse fluide homogène égale à M et animée d'une vitesse de rotation ω autour d'un axe quelconque que je prendrai pour axe des z. Je suppose que toutes les molécules de cette masse s'attirent conformément à la loi de Newton. Je choisirai les unités de telle façon que la densité du fluide soit égale à 1, et que l'attraction de deux unités de masse à l'unité de distance soit égale à l'unité de force.

Je puis assujettir la masse fluide à affecter la forme d'une figure de révolution. Si l'équilibre a lieu en tenant compte de cette liaison, il arrivera, en vertu de la nature même du problème, que l'équilibre subsistera encore quand elle sera supprimée. Cette liaison ne change pas les conditions d'équilibre, elle n'influe que sur les conditions de stabilité dont nous ne nous occuperons pas pour le moment.

Soit R la distance à l'axe du centre de gravité de la section méridienne et πr_0^2 l'aire de cette section. On aura

$$M = 2\pi^2 r_0^2 R. \tag{1}$$

Le plan des xy sera le plan perpendiculaire à l'axe et passant par ce centre de gravité. J'assujettirai encore, pour simplifier un peu les calculs qui vont suivre, la figure de la masse fluide à rester symétrique par rapport au plan des xy. Il est clair que si l'équilibre a lieu avec cette liaison, il subsistera encore sans cette liaison.

Pour définir la section méridienne, je me servirai des coordonnées polaires ρ

et φ, en prenant le pôle au centre de gravité et l'axe polaire dans le plan des xy. Soit

$$\rho = r + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots$$

l'équation de la section méridienne.

Ecrivons que l'aire de cette section est égale à πr_0^2, il viendra

$$r_0^2 = r^2 + \frac{\Sigma\beta^2}{2}. \tag{2}$$

Écrivons que le centre de gravité de cette section est au pôle, il viendra

$$r^2\beta_1 + r(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \ldots + \beta_n\beta_{n+1} + \ldots) + S = 0, \tag{3}$$

S étant une série convergente dont les termes sont homogènes et du troisième degré par rapport aux β.

J'ai à rechercher s'il existe une figure d'équilibre peu différente d'un tore. Je dois donc supposer que les β sont très petits par rapport à r.

Je supposerai de plus que les rapports $\frac{r}{R}$ et par conséquent $\frac{r_0}{R}$ sont très petits, ainsi que ω.

Cela posé, soit I le moment d'inertie de la masse fluide par rapport à l'axe. Soit

$$W = \int \frac{dm\,dm'}{\Delta}$$

l'énergie potentielle due à l'attraction newtonienne (où dm et dm' sont deux éléments quelconques de la masse et Δ la distance de ces deux éléments). Soit $\frac{\omega^2}{2}$ I l'énergie potentielle due à la force centrifuge. L'équilibre aura lieu quand la variation première de l'expression

$$U = W - \frac{\omega^2}{2} I$$

sera nulle.

Nous allons encore introduire une liaison nouvelle. Nous supposerons que r_0 et par conséquent R sont assujettis à conserver des valeurs données. Cette liaison, à la différence des précédentes, change les conditions d'équilibre. Posons

$$\beta_i = \gamma_i r_0, \qquad U = A r_0^4 R \left(\log \frac{8R}{r_0} + V + H\right). \tag{4}$$

Il viendra [1], en tenant compte de (2),

$$(5)\qquad U = A\left[r_0^4 R\left(\log\frac{8R}{r_0} + \frac{1}{4}\right) + \Sigma R\beta_n^2 r_0^2\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right] + B + C + \frac{\omega^2\pi^2}{2}\left(2r_0^2 R^3 + \frac{3}{2}Rr_0^4\right) + \omega^2 D.$$

Dans cette équation, A désigne une constante numérique qu'il est inutile de déterminer davantage: B est un ensemble de termes contenant r_0^5 en facteur; C est un ensemble de termes de degré supérieur au second par rapport aux β; enfin D est un ensemble de termes s'annulant avec les β.

Nous donnerons à A la même valeur dans les équations (4) et (5). Il viendra alors

$$V = \frac{1}{4}\Sigma\gamma_n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{B}{Ar_0^4 R} + \frac{C}{Ar_0^4 R} + \frac{\pi^2\omega^2}{2A}\left(\frac{2R^2}{r_0^2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{\omega^2 D}{Ar_0^4 R} - H.$$

On trouve aisément

$$I = \pi\int_0^{2\pi} R^3\rho^2\,d\varphi + 2\pi\int_0^{2\pi} R^2\rho^3\cos\varphi\,d\varphi + \frac{3}{2}\pi\int_0^{2\pi} R\rho^4\cos^2\varphi\,d\varphi + \frac{2\pi}{5}\int_0^{2\pi}\rho^5\cos^3\varphi\,d\varphi.$$

Mais les équations (2) et (3) peuvent s'écrire

$$\int\rho^2\,d\varphi = 2\pi r_0^2, \qquad \int\rho^3\cos\varphi\,d\varphi = 0,$$

de sorte qu'il reste simplement

$$D = \frac{3}{4}\pi R\int(\rho^4 - r_0^4)\cos^2\varphi\,d\varphi + \frac{\pi}{5}\int(\rho^5 - r_0^5)\cos^3\varphi\,d\varphi.$$

Nous prendrons

$$H = \frac{\pi^2\omega^2}{A}\,\frac{R^2}{r_0^2},$$

de sorte que V sera désormais déterminé.

Comme r_0 et R sont provisoirement regardés comme des constantes, le maximum de U aura lieu en même temps que celui de V, de sorte que l'équilibre de notre système à liaisons aura lieu dans les mêmes conditions que si V était la fonction des forces.

Supposons que dans V, on fasse $r_0 = 0$, il viendra

$$V = \frac{1}{4} + \Sigma\gamma_n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{C}{Ar_0^4 R} + \frac{3}{4}\,\frac{\pi^2\omega^2}{A} + \frac{3}{4}\,\frac{\pi\omega^2}{A}\int\left(\frac{\rho^4}{r_0^4} - 1\right)\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

---

[1] *Voir* aux Notes, *Figures annulaires*.

Si nous faisons encore $\omega = 0$, il viendra

$$V = \frac{1}{4} + \Sigma\gamma_n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{C}{A r_0^3 R}.$$

Si l'on tient compte de l'équation (3), il vient

$$\gamma_1 = E,$$

E étant un ensemble de termes du second degré au moins par rapport à $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$. On peut donc écrire

$$V = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + F,$$

F étant un ensemble de termes du troisième degré au moins par rapport à $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$.

Cette équation prouve que si l'on fait $\omega = r_0 = 0$, la fonction V est susceptible d'un maximum qui est atteint quand tous les γ s'annulent. Les coefficients de stabilité sont

$$\frac{1}{2} - 1, \quad \frac{1}{3} - 1, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n} - 1, \quad \ldots.$$

Comme aucun de ces coefficients n'est nul, la forme d'équilibre correspondante ne pourra être une forme limite, c'est-à-dire que pour les valeurs très petites de r_0 et de ω, le système à liaisons considéré sera susceptible d'une forme d'équilibre, pour laquelle les γ auront des valeurs très petites.

On aura alors pour cette forme d'équilibre

$$\gamma_0 = \varphi_n(r_0, \omega), \tag{6}$$

φ_n étant une fonction continue de r_0 et de ω s'annulant avec ces variables.

Il reste à chercher quelle valeur il faut donner à r_0 pour que l'équilibre subsiste encore quand on supprime la liaison que nous avions provisoirement introduite, et quand on n'assujettit plus r_0 et R à avoir des valeurs données.

Supposons qu'on remplace dans U les γ par leurs valeurs (6) et R par sa valeur tirée de l'équation (1). Alors U ne sera plus fonction que de r_0 et de ω, et l'on aura la condition pour que l'équilibre subsiste après la suppression de la liaison, en écrivant

$$\frac{dU}{dr_0} = 0. \tag{7}$$

Je dis que pour les valeurs très petites de ω, il y aura toujours une valeur

très petite de r_0 pour laquelle cette condition (7) sera remplie. Nous pourrons écrire

$$(8) \qquad U = A r_0^2 \log \frac{a}{r_0^3} + \frac{B\omega^3}{r_0^4} + C.$$

Les lettres A, α et B désignent des constantes ne dépendant que de M et C un ensemble de termes très petits par rapport aux deux premiers quand r_0 et ω sont très petits. Inutile d'ajouter que les lettres A, B et C n'ont plus la même signification que dans la première partie de cette démonstration.

Soit s une quantité très petite que nous regarderons comme constante et qui sera telle que

$$2As \log \frac{a}{s^3} - 3As - \frac{4B\omega^2}{s^5} = 0.$$

Nous allons faire varier r_0 depuis $2s$ jusqu'à zéro. Pour $r_0 = 2s$, les deux premiers termes de l'expression (8) se réduisent à

$$4As^2 \log \frac{a}{8s^3} + \frac{1}{32} As^2 \log \frac{a}{s^3} - \frac{3}{64} As^2 = \frac{125}{32} As^2 \log \frac{a}{s^3} + S_1.$$

Pour $r_0 = s$, ces deux mêmes termes se réduisent à

$$As^2 \log \frac{a}{s^3} + \frac{1}{2} As^2 \log \frac{a}{s^3} - \frac{3}{4} As^2 = \frac{48}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + S_2.$$

Enfin pour $r_0 = 0$, on a $U = +\infty$. Dans ces égalités, S_1 et S_2 désignent des termes très petits par rapport à $s^2 \log \frac{a}{s^3}$.

On a donc :

pour $r_0 = 2s$:

$$U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = \frac{25}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + \Sigma_1;$$

pour $r_0 = s$:

$$U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = -\frac{52}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + \Sigma_2;$$

pour $r_0 = 0$:

$$U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = +\infty;$$

Σ_1 et Σ_2 sont des ensembles de termes très petits par rapport à $s^2 \log \frac{a}{s^3}$, et qui n'influent pas sur le signe de l'expression

$$U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3}.$$

Cette expression est donc positive pour $r_0 = 2s$, négative pour $r_0 = s$ et positive pour $r_0 = 0$. Elle s'annule donc deux fois quand r_0 varie de $2s$ à zéro; sa dérivée $\frac{dU}{dr_0}$ doit donc s'annuler une fois dans le même intervalle.

C. Q. F. D.

Ainsi pour une valeur donnée très petite de ω, on peut trouver un système de valeurs de r_0 et des γ qui satisfasse aux conditions d'équilibre, et cela après suppression de la liaison que j'avais d'abord provisoirement introduite.

Il en résulte qu'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation est susceptible d'une forme annulaire d'équilibre, qui d'ailleurs est probablement instable.

J'ai donné une esquisse de la présente démonstration dans le Tome 2 du *Bulletin Astronomique* (¹). J'ai donné également dans ce même Volume une façon de calculer approximativement les éléments de cette figure annulaire. L'analyse que j'ai employée pour déterminer ces éléments présente les plus grandes analogies avec celle dont Mme Kowalevski a fait usage dans ses recherches sur l'anneau de Saturne.

VI. — Exemples d'équilibres de bifurcation.

Dans les n°s 27 et 28 du Livre III de la *Mécanique céleste*, Laplace traite le problème suivant : Une sphère solide de densité ρ et de rayon c est recouverte d'une couche fluide homogène de densité 1. Quelle est la figure d'équilibre de cette couche fluide? Quelle sera à l'état d'équilibre la forme de la surface libre de cette couche ?

Une des formes d'équilibre est évidemment une sphère concentrique à la sphère solide, auquel cas l'épaisseur de la couche fluide est uniforme.

On peut se demander s'il y en a d'autres. Pour cela appelons

$$r = a(1 + \alpha y)$$

la distance au centre d'un point quelconque de la surface libre. On développera y en série de fonctions sphériques

$$y = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_i + \ldots$$

(¹) *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 17.

et l'équation d'équilibre, comme l'indique Laplace, page 87 (édition de 1878), s'écrira

$$(1)\qquad 0=\left[(1-\rho)\frac{c^3}{a^3}+2\right]Y_0+(1-\rho)\frac{c^3}{a^3}Y_1+\left[(1-\rho)\frac{c^3}{a^3}-\frac{2}{5}\right]Y_2+\ldots$$

pourvu toutefois que l'on néglige le carré de α.

Quant à l'énergie potentielle, elle a pour expression

$$W=A-g\alpha^2\int\left[(\rho_1-1)Y_1^2+\left(\rho_1-\frac{3}{5}\right)Y_2^2+\ldots\right]d\omega$$

en négligeant le cube de α. A est une constante et l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface sphérique (*Cf.* Résal, *Mécanique céleste*, 1re, édition, p. 238).

J'ai posé pour abréger

$$1-\rho_1=(1-\rho)\frac{c^3}{a^3}.$$

Cette expression de W montre qu'on a une forme d'équilibre quand tous les Y s'annulent, c'est-à-dire quand l'épaisseur de la couche fluide est uniforme. Les coefficients de stabilité sont

$$\rho_1-1,\quad \rho_1-\frac{3}{5},\quad \ldots,\quad \rho_1-\frac{3}{2\nu+1},\quad \ldots.$$

L'un d'eux s'annulera si l'on a

$$\rho_1=\frac{3}{2\nu+1},$$

ν étant un entier positif. A chaque valeur de ρ_1 correspond une forme d'équilibre parfaitement définie qui est la sphère. Ces sphères forment une série linéaire de figures d'équilibre réelles. Si donc l'un des coefficients de stabilité s'annule, c'est que la sphère correspondante est une forme d'équilibre de bifurcation.

Étudions d'un peu plus près ce qui se passe. Dans le n° 27, Laplace suppose que la couche fluide considérée est assujettie à conserver une figure de révolution autour de l'axe des z. Dans cette hypothèse, la fonction sphérique Y_ν se réduit au $\nu^{\text{ième}}$ polynome de Legendre, de sorte qu'il n'y a qu'un seul coefficient de stabilité qui soit égal à $\rho_1-\frac{3}{2\nu+1}$. On est ainsi ramené au cas le plus simple, celui où un seul coefficient de stabilité s'annule et où la forme de bifurcation appartient à deux séries linéaires de forme d'équilibre réelles.

Laplace semble dire qu'il ne peut y avoir en général qu'une seule forme d'équilibre lorsque l'on n'a pas

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}$$

et que lorsque cette relation a lieu, il y a deux formes d'équilibre, puisque αy est susceptible de deux valeurs, dont l'une est donnée par la supposition de $y = 0$, et dont l'autre est donnée par la supposition de y égal au $\nu^{\text{ième}}$ polynome de Legendre.

Ce passage a dû paraître obscur à plus d'un lecteur. En effet Laplace ayant négligé les puissances supérieures de α, ce coefficient n'intervient plus dans l'équation d'équilibre (1); il semble donc qu'on puisse le choisir arbitrairement, et alors on n'aurait plus deux figures d'équilibre, mais une infinité, qui seraient comprises dans l'équation générale

$$y = \lambda Y_\nu,$$

λ étant une constante arbitraire et Y_ν le $\nu^{\text{ième}}$ polynome de Legendre.

Il semblerait donc que pour les valeurs de ρ_1 différentes de $\frac{3}{2\nu + 1}$, la sphère serait la seule figure d'équilibre possible, et que pour les valeurs de ρ_1 de la forme $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y aurait une infinité de figures d'équilibre indifférent. Mais les termes de degré supérieur en α empêchent qu'il en soit ainsi.

Pour les valeurs de ρ_1 très voisines de $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y a deux figures d'équilibre : l'une est une sphère, et l'autre est très peu différente d'une sphère. Toutes deux se confondent pour

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}.$$

Il y a cependant une exception; pour $\nu = 1$, on trouve $\rho_1 = 1$. La densité de la sphère solide étant alors la même que celle de la couche fluide, le sphéroïde est homogène, et l'équilibre subsistera quand la surface libre, au lieu d'être une sphère concentrique à la sphère solide, sera une sphère dont le centre sera quelconque (pourvu toutefois que les deux sphères ne se coupent pas).

L'équilibre est donc indifférent. Pour $\rho_1 = 1$, la figure formée par les deux sphères concentriques est donc encore une figure de bifurcation, mais on se trouve dans un de ces cas exceptionnels que j'ai signalés au paragraphe II. Cette figure appartient bien encore à deux séries linéaires de formes d'équilibre. Mais il n'arrive plus, comme cela a lieu d'ordinaire, que pour chaque

valeur ρ_1 voisine de 1, on trouve dans chacune des deux séries une figure d'équilibre et une seule. Une seule des deux séries présente ce caractère; l'autre est une série de formes d'équilibre indifférent qui correspondent toutes au cas de $\rho_1 = 1$.

Dans le n° 28, Laplace passe au cas où la figure d'équilibre n'est plus assujettie à être de révolution. Dans ce cas il y a $2\nu + 1$ fonctions sphériques Y_ν linéairement indépendantes. Donc quand ρ_1 devient égal à $\frac{3}{2\nu+1}$, il y a $2\nu + 1$ coefficients de stabilité qui s'annulent à la fois. Donc pour les valeurs de ρ_1 très voisines de $\frac{3}{2\nu+1}$, il y a non pas deux figures d'équilibre peu différentes d'une sphère, mais un plus grand nombre. Il y en a même une infinité, si l'on tient compte de ce fait que si l'on a une figure d'équilibre non sphérique, l'équilibre subsiste quand on oriente cette figure d'une manière quelconque.

Je pense que ces remarques suffiront pour éclaircir ce qu'il pouvait y avoir d'obscur dans le texte de Laplace.

VII. — **Stabilité de l'équilibre relatif.**

Il est très facile de trouver les conditions de stabilité de l'équilibre absolu d'un système matériel rapporté à des axes fixes; pour qu'un tel équilibre soit stable, il faut et il suffit que la fonction des forces soit maximum. Mais le problème de la stabilité de l'équilibre relatif d'un système matériel rapporté à des axes mobiles est infiniment plus compliqué. Cette théorie n'a jamais, à ma connaissance, été convenablement traitée que dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. Tait et Thomson. Elle repose sur la distinction de la stabilité séculaire et de la stabilité ordinaire; j'en vais rappeler les principaux résultats, en donnant sur un point des compléments qui me seront utiles dans la suite.

Supposons que la position du système envisagé par rapport aux axes mobiles soit définie par n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, choisies de telle sorte que l'équilibre ait lieu pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'on dérange très peu le système de sa position d'équilibre, les valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_n$ seront très petites et, si l'on néglige les carrés de ces quantités, les équations différentielles qui en définiront les variations seront linéaires.

On trouvera donc

$$x_i = \sum_m A_m [i, m] e^{\lambda_m t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Dans cette formule les A_m sont des constantes d'intégration, les $[i, m]$ et les λ_m sont des constantes qu'il est aisé de déduire des équations différentielles du problème.

Si tous les λ_m sont purement imaginaires, il y a stabilité. Si tous les λ_m ont leur partie réelle nulle ou négative, il y a encore stabilité (et ce cas peut se présenter si l'on tient compte des résistances passives, telles que la viscosité des liquides). Si enfin un des λ_m a sa partie réelle positive, il y a instabilité.

Les λ_m sont donnés par une équation algébrique de degré $2n$, de sorte que pour trouver les conditions de stabilité, il suffit de discuter cette équation en λ.

Nous supposerons que toutes les forces réelles auxquelles le système est soumis sont les actions mutuelles de ses parties, de telle sorte que le moment de la quantité de mouvement du système soit constant. Parmi ces forces réelles, nous distinguerons les forces indépendantes de la vitesse qui devront admettre une fonction des forces dépendantes de la vitesse, c'est-à-dire les résistances passives dues à la viscosité. Le travail de ces dernières forces doit toujours être négatif.

Outre les forces réelles, le système sera soumis à deux sortes de forces apparentes : la force centrifuge ordinaire, indépendante de la vitesse, et la force centrifuge composée, dépendante de la vitesse; le travail de cette dernière est toujours nul.

Soit T la demi-force vive et U l'énergie potentielle due à toutes les forces indépendantes de la vitesse, y compris la force centrifuge ordinaire. Si nous négligeons, comme il convient de le faire, les puissances supérieures des x et si nous supposons que U soit nul dans la position d'équilibre, T sera une forme quadratique par rapport aux $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$ et U une forme quadratique par rapport aux x_i.

Nous poserons selon l'usage

$$p_i = \frac{dT}{dx'_i},$$

de sorte que les équations différentielles s'écriront

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i} + V_i, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dT}{dp_i}.$$

Dans ces équations les V_i représentent l'ensemble des termes provenant des forces dépendantes de la vitesse. Si l'on néglige les puissances supérieures des x, les V seront linéaires par rapport aux p. Les équations différentielles seront donc linéaires.

Dans le cas de l'équilibre absolu, c'est-à-dire si le mouvement de rotation est nul, il faut et il suffit pour la stabilité que la fonction des forces soit un maximum, c'est-à-dire que la forme quadratique U soit définie positive.

Cette condition est encore suffisante, mais elle n'est plus nécessaire, s'il y a un mouvement de rotation. Ainsi, pour parler le langage des paragraphes précédents, si tous les coefficients de stabilité sont négatifs, il y aura certainement stabilité, même dans le cas d'un mouvement de rotation.

Dans un très grand nombre de problèmes, on peut négliger la viscosité; si dans cette hypothèse l'équilibre relatif est stable, il y aura stabilité ordinaire; si l'équilibre reste stable quand on tient compte de la viscosité, il y aura stabilité séculaire.

Il peut y avoir stabilité ordinaire sans qu'il y ait stabilité séculaire; il arrive alors, si la viscosité est très faible, ce qui est souvent le cas, que la figure du système se maintiendra pendant fort longtemps, mais finira toujours par être bouleversée.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut et il suffit que la forme U soit définie positive, c'est-à-dire que tous les coefficients de stabilité soient négatifs.

Les conditions de la stabilité ordinaire sont beaucoup plus compliquées. Bornons-nous à dire que cette stabilité ne pourra jamais avoir lieu si le nombre des coefficients de stabilité qui sont positifs est impair.

Tels sont les résultats très précis que l'on trouve démontrés dans l'Ouvrage de MM. Tait et Thomson. Il y a toutefois une importante restriction à faire et sur laquelle je désirerais attirer l'attention. L'argumentation de MM. Tait et Thomson repose tout entière sur cette hypothèse que le travail de la viscosité est toujours négatif (et non pas nul) pour tous les mouvements possibles. Il n'en est pas toujours ainsi.

Supposons par exemple une masse fluide isolée dans l'espace. Si cette masse se déplace sans se déformer, ce mouvement ne sera contrarié par aucune résistance passive analogue à la viscosité. Le travail de la viscosité sera alors nul et non pas négatif. Nous devons donc, si nous voulons appliquer le théorème de MM. Tait et Thomson, supposer qu'on a introduit dans le système des

liaisons telles que la masse fluide ne puisse se déplacer sans se déformer. Si l'on fait cette hypothèse, la proposition est applicable, et l'on peut dire que les conditions de stabilité sont les mêmes si l'on tient compte *à la fois* de la viscosité et de la force centrifuge composée, ou bien si l'on néglige *à la fois* ces deux forces.

Avant de terminer ce qui concerne cette stabilité de l'équilibre relatif, je dois examiner un cas particulier. Supposons qu'à l'état de l'équilibre relatif, le système envisagé affecte une figure de révolution autour de l'axe des z. Pour simplifier l'exposition, nous supposerons qu'à l'état d'équilibre, toute la matière du système soit uniformément répartie sur n circonférences parallèles dont les rayons seront $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Soit m une molécule appartenant au parallèle de rayon r_i. Supposons que l'on déplace cette molécule de telle façon que sa distance au plan des xy augmente de z_i, sa distance à l'axe des z augmente de u_i et qu'enfin le dièdre du plan mOz avec le plan xOz augmente de $\frac{v_i}{r_i}$. Si les quantités u_i, z_i et v_i sont les mêmes pour toutes les molécules d'une même parallèle, le système affectera encore, après cette déformation, une figure de révolution. Si l'on suppose de même que $\frac{du_i}{dt} = u'_i$, $\frac{dv_i}{dt} = v'_i$, $\frac{dz_i}{dt} = z'_i$ sont les mêmes pour toutes les molécules d'un même parallèle, la demi-force vive totale du système a pour valeur

$$T = \Sigma A_i(u_i'^2 + v_i'^2 + z_i'^2),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant n constantes que nous regarderons comme données. Enfin l'énergie potentielle U ne dépendra que des u et des z, tant que les quantités u_i, v_i et z_i conserveront la même valeur tout le long d'un parallèle. Les équations du mouvement seront alors, en supprimant toute viscosité :

$$A_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{dU}{du_i} - 2A_i\omega\frac{dv_i}{dt}, \qquad A_i\frac{d^2 v_i}{dt^2} = 2A_i\omega\frac{du_i}{dt}, \qquad A_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{dU}{dz_i},$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation due au mouvement d'entraînement. Ces équations sont linéaires en u_i, v_i et z_i. On y satisfera en posant

$$u_i = a_i \cos\lambda t, \qquad z_i = b_i \cos\lambda t, \qquad v_i = 2a_i\frac{\omega}{\lambda}\sin\lambda t$$

et une condition nécessaire pour qu'il y ait stabilité, c'est que les valeurs de λ qui permettent de satisfaire de la sorte à nos équations différentielles soient toutes réelles. On voit par ces équations que si les conditions initiales du mou-

vement sont telles que u_i, v_i, z_i, u'_i, v'_i, z'_i soient les mêmes tout le long d'un parallèle, il en sera encore de même au bout d'un temps quelconque et le système restera de révolution.

On pourra trouver pour λ un certain nombre de valeurs distinctes que j'appellerai $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, ... et l'intégrale générale des équations proposées en supposant que le système reste de révolution sera

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} u_i &= \sum_p B_p a_{ip} \cos(\lambda_p t + \varepsilon_p),\\ z_i &= \sum_p B_p b_{ip} \cos(\lambda_p t + \varepsilon_p),\\ v_i &= 2\omega \sum_p B_p \frac{a_{ip}}{\lambda_p} \sin(\lambda_p t + \varepsilon_p),\end{aligned}\right.$$

les B_p et les ε_p étant $2p$ constantes d'intégration.

Mais on doit avoir

$$T + U = C,$$

C étant une constante. Il est facile de voir que si U n'est pas une forme définie positive, on peut choisir les conditions initiales du mouvement de telle sorte que la constante C ait le signe que l'on veut. On trouve

$$\begin{aligned} T = D_0 + \Sigma D_p \cos 2(\lambda_p t + \varepsilon_p) + \Sigma D_{pq} \cos[(\lambda_p + \lambda_q)t + \varepsilon_p + \varepsilon_q]\\ + \Sigma D'_{pq} \cos(\lambda_p t - \lambda_q t + \varepsilon_p - \varepsilon_q),\end{aligned}$$

$$U = E_0 + \Sigma E_p \cos 2(\lambda_p t + \varepsilon_p) + \Sigma(E_{pq} \text{ ou } E'_{pq}) \cos[(\lambda_p + \lambda_q)t + \varepsilon_p \pm \varepsilon_q].$$

On a donc

$$D_0 + E_0 = C, \qquad D_p + E_p = 0, \qquad D_{pq} + E_{pq} = 0, \qquad D'_{pq} + E'_{pq} = 0.$$

On trouve d'ailleurs en faisant attention à la nature des formes T et U et à la forme des équations (1) :

$$D_0 = \sum_p B_p^2 D_p,$$

$$2E_0 = \sum_{ip} B_p^2 A_i(\lambda_p^2 a_{ip}^2 + \lambda_p^2 b_{ip}^2 + 4\omega^2 a_{ip}^2).$$

$$2E_p = -\sum_i A_i(\lambda_p^2 a_{ip}^2 + \lambda_p^2 b_{ip}^2 - 4\omega^2 a_{ip}^2).$$

On tire de là

$$(2) \qquad D_0 + E_0 - \Sigma B_p^2 (D_p + E_p) = \Sigma B_p^2 A_i \lambda_p^2 (a_{ip}^2 + b_{ip}^2),$$

et d'autre part

$$D_0 + E_0 - \Sigma B_p^2 (D_p + E_p) = C.$$

Les coefficients A_i sont essentiellement positifs. Si donc les λ_p sont tous réels, le second membre de (2) est essentiellement positif. Mais nous avons vu que C peut devenir négatif à moins que la forme U ne soit définie positive. Si donc cette forme n'est pas définie positive (au moins tant que le système est assujetti à rester de révolution) il ne peut y avoir stabilité.

Cette démonstration se trouve, sauf la forme et les notations, dans la *Mécanique céleste* de Laplace (Livre IV, Chap. II, n° 14).

On doit donc conclure que si un système affecte, à l'état d'équilibre relatif, une figure de révolution, cet équilibre ne jouira pas même de la stabilité ordinaire, si l'équilibre du système n'est pas stable quand on supprime la force centrifuge composée et qu'on introduit des liaisons assujettissant le système à rester de révolution *autour de l'axe des z*. Il faut toutefois observer à quelle condition ce théorème de Laplace est applicable. Il pourrait se faire que l'un des λ fût nul et alors le raisonnement précédent tomberait de lui-même. Il pourrait y avoir encore stabilité en ce sens que la figure extérieure du système demeurerait toujours très peu différente de la figure primitive; mais les divers parallèles tendraient à tourner avec des vitesses différentes.

Il reste à examiner si les théorèmes établis dans les paragraphes précédents subsistent encore dans le cas de l'équilibre relatif. Le premier d'entre eux, d'après lequel, si un des coefficients de stabilité change de signe quand on suit une série linéaire de figures d'équilibre, la forme correspondante est de bifurcation, subsiste évidemment, car le mouvement de rotation et la force centrifuge composée ne changent pas les conditions d'équilibre et n'ont d'influence que sur les conditions de stabilité.

Quant au second théorème, c'est-à-dire au principe de l'échange des stabilités, il subsiste encore en ce qui concerne la stabilité séculaire dont les conditions ne sont pas non plus changées par la force centrifuge composée.

Il subsiste même en ce qui concerne la stabilité ordinaire, mais seulement à la condition qu'un seul des coefficients de stabilité s'annule à la fois. Nous avons vu en effet qu'il ne peut y avoir même stabilité ordinaire quand un seul coefficient de stabilité (ou plus généralement un nombre impair de ces coefficients) est positif et les autres négatifs.

VIII. — Fonctions de Lamé.

Après ces longs prolégomènes, j'arrive à l'objet principal de ce travail.

Nous nous occupons de déterminer la forme d'équilibre d'une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z. Si nous ne nous occupons que des conditions d'équilibre en laissant de côté la question de stabilité, nous n'avons pas à tenir compte de la force centrifuge composée, et nous pouvons traiter le problème comme s'il s'agissait de l'équilibre absolu d'une masse fluide soumise seulement à l'attraction newtonienne et à la force centrifuge ordinaire.

Nous connaissons déjà plusieurs séries linéaires réelles de figures d'équilibre, ce sont les ellipsoïdes de révolution et les ellipsoïdes de Jacobi. La figure de ces ellipsoïdes dépend de la vitesse angulaire de rotation ω qui jouera ici le même rôle que jouait le paramètre y dans les paragraphes II, III et IV.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, imposer à notre masse fluide certaines liaisons. L'axe de révolution que nous avons pris pour axe des z, peut être regardé comme fixe. Nous regarderons également comme fixe le centre de gravité de la masse. Cela ne suffit pas encore pour notre objet; si l'on se bornait là en effet, on pourrait faire tourner l'ellipsoïde de Jacobi d'un angle quelconque autour de l'axe des z sans que l'équilibre cesse. On aurait donc pour chaque valeur de ω une infinité d'ellipsoïdes à trois axes inégaux qui satisferaient à la question. Afin d'éviter cette circonstance, qui sans pouvoir causer de véritables difficultés, nous gênerait dans l'exposition, nous assujettirons notre système à une liaison de plus, en supposant que le plan des xz soit un des trois plans principaux d'inertie. Il résultera de cette hypothèse que si un ellipsoïde à trois axes inégaux satisfait à la question, ses trois axes d'inertie seront les trois axes de coordonnées, et de plus le même ellipsoïde satisfera encore à la question quand on l'aura fait tourner de 90° autour de l'axe des z.

Dans ces conditions, voici les résultats bien connus de la discussion des équations d'équilibre.

Quand ω^2 croît depuis zéro jusqu'à $4\pi \times 0{,}093$, il y a quatre ellipsoïdes qui satisfont à la question, à savoir deux ellipsoïdes de révolution et deux ellipsoïdes de Jacobi. Ces deux derniers ne diffèrent l'un de l'autre que par leur position, et l'on passe de l'un à l'autre par une rotation de 90° autour de l'axe des z.

Pour $\omega^2 = 4\pi \times 0{,}093$, les deux ellipsoïdes de Jacobi se confondent entre eux et avec un des deux ellipsoïdes de révolution que nous appellerons l'ellipsoïde E.

Quand ω^2 croît de $4\pi \times 0{,}0093$ à $4\pi \times 0{,}112$, il y a deux ellipsoïdes de révolution qui satisfont à la question.

Pour $\omega_2 = 4\pi \times 0{,}112$ les deux ellipsoïdes de révolution se confondent en un seul E'.

Pour $\omega^2 > 4\pi \times 0{,}112$, il n'y a plus d'ellipsoïde satisfaisant à la question.

Pour parler le langage des premiers paragraphes, il y a quatre séries linéaires de figures réelles d'équilibre depuis $\omega^2 = 0$, jusqu'à $\omega^2 = 4\pi \times 0{,}09$; il n'y en a plus que deux depuis $\omega^2 = 4\pi \times 0{,}09$ jusqu'à $\omega^2 = 4\pi \times 0{,}011$, et il n'y en a plus du tout à partir de cette dernière valeur.

L'ellipsoïde E' est une forme limite puisque, en faisant croître ω^2, on voit les deux ellipsoïdes réels de révolution se confondre avec E' pour devenir ensuite imaginaires.

L'ellipsoïde E est à la fois une forme de bifurcation, (puisqu'il appartient à la fois à la série des ellipsoïdes de révolution et à la série des ellipsoïdes de Jacobi et une forme limite, (puisque, en faisant croître ω^2, on voit les deux ellipsoïdes réels de Jacobi se confondre avec E pour devenir ensuite imaginaires).

Outre les ellipsoïdes, on sait qu'il existe des figures annulaires d'équilibre, dont nous avons parlé dans le paragraphe V. Nous nous proposons de rechercher s'il existe en outre des séries linéaires de figures convexes d'équilibre non ellipsoïdales. Pour cela nous chercherons à reconnaître si parmi les ellipsoïdes de révolution et ceux de Jacobi, il y a des formes de bifurcation.

Pour arriver à ce résultat, il faut calculer les coefficients de stabilité de ces ellipsoïdes et rechercher dans quels cas ils s'annulent. On verra plus loin que ces coefficients dépendent des fonctions de Lamé, mais nous allons d'abord rappeler les résultats si remarquables des travaux de Lamé et de Liouville au sujet de ces fonctions.

Nous emploierons dans ce qui va suivre les notations de Liouville dans ses lettres à Brachet (*J. Math. pures et appl.*, 1re série, t. 11, 1846). Rappelons ces notations.

On donne à l'équation de l'ellipsoïde considéré la forme

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1 \qquad (c^2 > b^2)$$

et l'on définit la position d'un point sur cet ellipsoïde par les deux autres coordonnées elliptiques μ et ν.

Une fonction de Lamé d'ordre n est une fonction R de l'une des quatre formes

$$R = P_n, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,P_{n-1}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,P_{n-1}, \qquad R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,P_{n-2}$$

(où P_n désigne un polynome de degré n en ρ) et satisfaisant à l'équation différentielle

$$(1) \qquad (\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^2 - b^2 - c^2)\rho\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - B]R$$

(B étant une constante convenablement choisie).

Avant d'aller plus loin, indiquons quelles sont les diverses formes qu'il peut être utile de donner à l'équation (1).

Nous poserons

$$\rho_1 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad \rho_2 = \sqrt{\rho^2 - c^2};$$
$$R = \rho T_0 = \rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 = \rho_1\rho_2 U_0 = \rho\rho_2 U_1 = \rho\rho_1 U_2.$$

L'équation peut alors se mettre sous la forme générale

$$(1') \qquad (\sigma^4 + p\sigma^2 + q)\frac{d^2V}{d\sigma^2} + (\alpha\sigma^2 + \beta)\sigma\frac{dV}{d\sigma} = (H\sigma^2 + K)V.$$

Dans cette équation générale, σ représente l'une des variables ρ, ρ_1 ou ρ_2, et V l'une des sept fonctions R, T ou U. On a d'ailleurs

$$\begin{array}{lll} \alpha = 2, & H = n(n+1) & \text{si } V = R; \\ \alpha = 4, & H = n(n+1) - 2 & \text{si } V = T; \\ \alpha = 6, & H = n(n+1) - 2 & \text{si } V = U. \end{array}$$

D'autre part

$$\begin{array}{lll} p = -(b^2 + c^2), & q = b^2c^2 & \text{si } \sigma = \rho; \\ p = 2b^2 - c^2, & q = -b^2(c^2 - b^2) & \text{si } \sigma = \rho_1; \\ p = 2c^2 - b^2, & q = c^2(c^2 - b^2) & \text{si } \sigma = \rho_2. \end{array}$$

Si par exemple $\sigma = \rho$, on obtient :

$$\begin{array}{ll} \beta = p, & \text{si } V = R, \\ \beta = p - 2c^2, & \text{si } V = T_1, \\ \beta = 3p, & \text{si } V = U. \end{array}$$

Enfin on trouve

$$\begin{array}{llll} K = -B, & \text{si } V = R, & \sigma = \rho; & \\ K = -(B - c^2), & \text{si } V = T_1, & \sigma = \rho; & \\ K = -(B - q), & \text{si } V = U_0, & \sigma = \rho; & \\ K = -[B + n(n+1)b^2], & \text{si } V = R, & \sigma = \rho_1, & \ldots. \end{array}$$

Pour achever de définir la fonction R, nous supposerons

$$\lim \frac{R}{\rho^n} = 1 \qquad \text{pour} \quad \rho = \infty.$$

A chaque fonction R correspondent deux fonctions M et N que l'on obtient en changeant dans R, ρ. $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en μ, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ et $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, en ce qui concerne M, et en ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{c^2 - \nu^2}$ en ce qui concerne N.

A chaque fonction R correspondra en outre une fonction S de ρ définie par l'équation

$$S = (2n+1)R \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

et satisfaisant comme R à l'équation (1).

Liouville pose de plus

$$l = \frac{P}{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = \frac{h}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}};$$

P est la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent.

Liouville trouve ainsi les équations suivantes :

$$(2) \qquad \iint \frac{l' M' N' \, d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi RSMN}{2n+1}.$$

Dans cette équation (2) on considère deux points de l'ellipsoïde ayant pour coordonnées elliptiques ρ, μ, ν et ρ, μ' et ν'; M, N et l sont les fonctions définies plus haut de μ et de ν; M', N' et l' sont des fonctions correspondantes de μ' et de ν'; Δ est la distance des deux points μ, ν et μ', ν'; $d\omega'$ est un élément de la surface de l'ellipsoïde ayant pour centre le point μ', ν' et l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de l'ellipsoïde.

Liouville trouve encore

$$(3) \qquad \iint l MNM_1 N_1 \, d\omega = 0,$$

où $d\omega$ est un élément de l'ellipsoïde; l, M, N, M_1 et N_1 les fonctions définies plus haut des coordonnées μ et ν du centre de cet élément. M et N sont deux fonctions de Lamé conjuguées; M_1 et N_1 sont deux autres fonctions de Lamé également conjuguées, mais qui doivent être différentes des premières.

Liouville démontre de plus que la fonction R est constamment positive et croissante quand ρ varie depuis $+c$ jusqu'à $+\infty$. Pour les valeurs $\rho = 0$, $\rho = \pm b$, $p = \pm c$, une des deux fonctions R ou $\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$ doit s'annuler.

Il me reste à parler des équations qui déterminent la constante B.

Cherchons quelle est la condition pour que l'équation (1′) soit satisfaite par un polynome de degré λ, (où $\lambda = n$, si $V = R$; ou $n - 1$ si $V = T$; ou $n - 2$ si $V = U$).

Posons à cet effet

$$V = \sigma^\lambda + \gamma_1 \sigma^{\lambda-2} + \gamma_2 \sigma^{\lambda-4} + \ldots + \gamma_\varkappa \sigma^{\lambda-2\varkappa}.$$

Nous prendrons $\lambda = 2\varkappa$ si λ est pair et $\lambda = 2\varkappa + 1$ si λ est impair. Nous trouverons alors en substituant ce polynome à la place de V dans l'équation (1′) et identifiant les deux membres

$$(4) \qquad \begin{cases} \Phi\gamma_{i+1} + (\lambda\Psi - k)\gamma_i + q\Theta\gamma_{i-1} = 0 \\ \Phi = (\lambda - 2i - 2)(\lambda - 2i + \varkappa - 3) - H \\ \Psi = p(\lambda - 2i)\left(\lambda - 2i - 1 + \dfrac{\beta}{p}\right) \\ \Theta = (\lambda - 2i + 2)(\lambda - 2i + 1) \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa).$$

L'équation (4) est une sorte de relation de récurrence qui permet de calculer, de proche en proche les coefficients γ_i, en partant des valeurs initiales $\gamma_0 = 1$, $\gamma_{-1} = 0$. On trouve ainsi γ_1 sous la forme d'un polynome de degré i en k. Comme on doit avoir $\gamma_{\varkappa+1} = 0$, la valeur de k (et par conséquent celle de B) se trouve donnée par une équation algébrique de degré $\varkappa + 1$.

Nous avons vu plus haut que la fonction R peut prendre l'une des quatre formes

$$R = P_n, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, P_{n-1},$$
$$R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-1}, \qquad R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, P_{n-2}.$$

A ces quatre formes correspondront quatre équations en B qui seront respectivement de degré

$$\frac{n}{2} + 1, \quad \frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n}{2}$$

si n est pair, et de degré

$$\frac{n+1}{2}, \quad \frac{n+1}{2}, \quad \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{2},$$

si n est impair, et que j'appellerai pour abréger (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4). Pour former l'une de ces quatre équations, on formera l'équation (1′) de façon que la fonction V doive être un polynome entier et l'on en déduira les équations (4) correspondantes. Il est à remarquer que chacune de ces quatre équations peut être ainsi construite de trois manières différentes. En effet,

pour chacune de ces quatre formes de la fonction R on peut écrire l'équation (1) de trois manières différentes, selon que l'on choisit pour variable indépendante ρ, ρ_1 ou ρ_2.

Lamé a démontré que ces quatre équations (E) ont toutes leurs racines réelles. Liouville, en rappelant ce résultat, ajoute que la méthode de Sturm y aurait conduit plus rapidement. Comme il ne donne pas d'autre détail, il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir sa pensée par quelques explications.

Si l'on revient aux équations (4), on verra que le coefficient Φ y est toujours négatif et le coefficient Θ toujours positif. Si donc on suppose que q soit négatif, les fonctions γ_i qui sont, comme on l'a vu, des polynomes entiers de degré i en B, jouissent de la propriété caractéristique des fonctions de Sturm, c'est-à-dire que, quand γ_i s'annule, γ_{i+1} et γ_{i-1} sont de signes contraires. On voit de plus que si le coefficient de k^i dans γ_i est positif, le coefficient de k^{i+1} dans γ_{i+1} sera négatif et réciproquement. On peut donc appliquer le raisonnement de Sturm à la suite $\gamma_{\varkappa+1}, \gamma_\varkappa, \ldots, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$. Mais on peut toujours supposer que q est négatif; il suffit pour cela de prendre ρ_1 pour variable indépendante. C'est ainsi que la méthode de Sturm est applicable aux équations qui nous occupent.

D'ailleurs, si q est négatif, et si l'on élimine les γ entre les équations (4) par le moyen d'un déterminant, l'équation (E) ainsi obtenue aura la même forme que « l'équation en S » que l'on rencontre quand on recherche les axes principaux d'une surface du deuxième ordre.

Voici une autre démonstration du même théorème, que je crois nouvelle et qui pourra nous être utile.

Dans le cas de $b^2 = c^2$, on a ainsi que Liouville l'a montré :

$$B = [n(n+1) - i^2]c^2 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$R = \frac{(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(\rho^2 - c^2)^n}{d\rho^{i+n}}.$$

Dans le cas de $b^2 = 0$, on a

$$B = i^2 c^2 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$R = \frac{(\rho_2^2 + c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(\rho_2^2 + c^2)}{d\rho^{i+n}}.$$

Ainsi pour $b^2 = c^2$ les racines des équations (E_1) et (E_4) sont

$$n(n+1)c^2, \quad [n(n+1) - 4]c^2, \quad \ldots, \quad [n(n+1) - 4k^2]c^2 \qquad (2k \leqq n),$$

197367

et celles des équations (E_2) et (E_3) sont

$$[n(n+1)-1]c^2, \quad [n(n+1)-9]c^2, \quad \ldots, \quad [n(n+1)-(2k+1)^2]c^2 \qquad (2k+1 \leq n).$$

Ainsi si l'on envisage seulement les équations (E_1) et (E_2) par exemple, les racines de ces deux équations seront toutes réelles et se sépareront mutuellement.

Faisons varier b^2 d'une manière continue depuis sa limite supérieure c^2 jusqu'à sa limite inférieure zéro. Les racines des deux équations (E_1) et (E_2) varieront d'une manière continue. Pour qu'elles cessassent d'être toutes réelles, il faudrait que deux racines de (E_1) ou deux racines de (E_2) devinssent égales. Mais pour que cela fût possible, il faudrait d'abord que les racines des deux équations cessassent de se séparer mutuellement. Pour qu'elles cessassent de se séparer, il faudrait que l'une des racines de (E_1) devînt égale à une des racines de (E_2).

Or je dis que cela est impossible. Soit en effet B une racine que nous supposons appartenir à la fois à (E_1) et à (E_2) et envisageons l'équation (1) correspondante.

Cette équation admettra deux intégrales, l'une de la forme P_n, l'autre de la forme $\sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-1}$. Soient R et R_1 ces deux intégrales. On peut former une équation linéaire du troisième ordre, à coefficients rationnels et admettant pour intégrales les carrés des intégrales de (1). Un système fondamental d'intégrales sera R^2, RR_1 et R_1^2. Cette équation admettrait donc comme intégrales deux polynomes entiers R^2 et R_1^2 *essentiellement distincts*.

Mais l'équation (1) admet, outre l'intégrale R, l'intégrale S définie plus haut et qui est telle que

$$\lim S\rho^{n-1} = 1 \qquad \text{pour} \quad \rho = \infty.$$

L'équation du troisième ordre dont nous venons de parler admettra donc comme système fondamental d'intégrales R^2, RS, S^2. Si nous convenons de dire qu'une fonction F de ρ est de degré p en ρ si le rapport de F à ρ^p tend vers une limite finie quand ρ croît indéfiniment, il résulte de ce qui précède que les trois intégrales R^2, RS et S^2 sont respectivement de degré $2n$, -1 et $-(2n+2)$. Une intégrale quelconque de l'équation du troisième ordre sera une combinaison linéaire de R^2, RS et S^2; elle sera donc, à moins d'être identiquement nulle, de l'un des trois degrés $2n$, -1 et $-(2n+2)$.

Or $R^2 - R_1^2$ qui est une de ces intégrales, ne peut être ni de degré -1, ni de degré $-(2n+2)$ puisque c'est un polynome entier; ni de degré $2n$, puisque

le premier terme de R^2 est ρ^{2n} de même que le premier terme de R_1^2, de sorte que les termes de degré $2n$ disparaissent dans $R^2 - R_1^2$. Il faut donc que

$$R^2 - R_1^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad R = R_1,$$

ce qui est impossible et contraire aux hypothèses faites plus haut. Nous devons donc conclure que les racines des équations (E_1) et (E_2) sont toutes réelles et se séparent mutuellement, quelle que soit la valeur de b^2.

Cela va nous permettre de distinguer les unes des autres les diverses fonctions R.

Nous écrirons $R_{n,i}^k$. L'indice supérieur k sera égal à 1, 2, 3 ou 4 selon que R sera de la forme

$$P_n, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}\, P_{n-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, P_{n-2}.$$

L'indice n indiquera le degré de la fonction R, enfin l'indice i devra être choisi de telle sorte que $R_{n,i}$ se réduise à

$$A(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}} D^{i+n} (\rho^2 - c^2)^n \qquad \text{pour} \quad b^2 = c^2,$$

A désignant un coefficient constant dont on trouvera plus haut la valeur, et le signe D^{i+n} exprimant qu'on doit effectuer $i + n$ différentiations par rapport à ρ.

On voit aisément d'après ce qui précède que la fonction $R_{n,i}^{(k)}$ est parfaitement déterminée. Pour $b^2 = 0$ on trouve

$$R_{n,i}^{(k)} = A(\rho_2^2 - c^2)^{\frac{j}{2}} D^{j+n} (\rho_2^2 + c^2)^n,$$

où j a une valeur que nous allons déterminer.

On voit aisément que i est pair si $k = 1$ ou 4 et impair si $k = 2$ ou 3; tandis que j est de même parité que n, si $k = 1$ ou 2 et de parité différente si $k = 3$ ou 4. De plus, pour une même valeur de k, les valeurs de j devront croître quand celles de i décroîtront. On a donc :

$$\text{si } k = 1 \text{ ou } 3 : \quad i + j = n;$$
$$\text{si } k = 2 \text{ ou } 4 : \quad i + j = n + 1.$$

Nous pouvons déduire de là quelques propriétés des fonctions R. Combien l'équation

$$(5) \qquad R_{n,i}^{(k)} = 0$$

[où le premier membre est supposé débarrassé du facteur radical $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et $\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$, qu'il pourrait contenir, ainsi que du facteur ρ

s'il y a lieu] aura-t-elle de racines réelles et comment ces racines seront-elles distribuées? Nous prendrons pour inconnues ρ^2 et non pas ρ. Faisons d'abord $b^2 = c^2$. On verra que l'équation admettra ξ racines égales à c^2 et η racines comprises entre zéro et c^2.

Si nous faisons ensuite $b^2 = 0$, on verra que l'équation admettra ξ' racines égales à zéro et η' comprises entre zéro et c^2.

Les valeurs des nombres ξ, η, ξ' et η' nous seront données par le tableau suivant, où la première colonne donne la valeur de k, la seconde le reste de n à 2 et les quatre autres les valeurs des quatre nombres : $i - 2\xi$, $n - i - 2\eta$, $j - 2\xi'$, $n - j - 2\eta'$.

1,	0,	0,	0,	0,	0;
1,	1,	0,	1,	1,	0;
2,	0,	1,	1,	2,	0;
2,	1,	1,	0,	1,	0;
3,	0,	1,	1,	1,	1;
3,	1,	1,	0,	0,	1;
4,	0,	2,	0,	1,	1;
4,	1,	2,	1,	2,	1.

Ce tableau montre que l'on a toujours

$$\xi = \eta', \qquad \xi' = \eta.$$

Qu'arrive-t-il maintenant pour les valeurs de b^2 comprises entre zéro et c^2? Pour une pareille valeur, l'équation ne peut avoir de racine multiple, car si pour une certaine valeur de ρ, R et $\frac{dR}{d\rho}$ s'annulaient à la fois, le coefficient de $\frac{d^2R}{d\rho^2}$ dans l'équation (1) devrait être nul également, ce qui entraînerait

$$\rho^2 = b^2 \quad \text{ou} \quad c^2.$$

D'autre part aucune des racines de l'équation ne peut être égale à zéro, à b^2 ou à c^2; car si l'on forme l'équation déterminante de l'équation (1) pour les points $\rho = \pm b$, $\rho = \pm c$, on trouve que les racines de cette équation déterminante sont zéro et $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, comme on a supposé qu'on enlevait dans l'équation (5) le facteur ρ s'il s'y trouvait, il ne pourrait arriver qu'il y restât ensuite, que s'il y entrait au carré avant qu'on ne l'eût enlevé. Or nous venons de voir que cela ne peut être.

On doit donc conclure que lorsque b^2 décroît depuis c^2 jusqu'à zéro, l'équation (5) aura ξ_1 racines réelles entre zéro et b^2 et η_1 racines réelles entre b^2 et c^2 et que ces deux nombres ξ_1 et η_1 demeureront invariables.

Pour $b^2 = c^2$, il arrivera que les η_1 racines comprises entre b^2 et c^2 deviendront égales à c^2; on pourrait supposer aussi qu'un certain nombre de racines d'abord imaginaires, ou non comprises entre b^2 et c^2 tendent aussi vers c^2 quand b^2 tend vers c^2, de sorte qu'on aura

$$\eta_1 = \xi.$$

Quant aux ξ_1 racines comprises entre zéro et b^2, elles resteront comprises entre zéro et c^2; on pourrait supposer toutefois que quelques-unes d'entre elles se réduisent à c^2; on aura donc

$$\xi_1 = \eta_1.$$

Supposons maintenant que b^2 tende vers zéro; il arrivera que les ξ_1 racines et peut-être d'autres tendront vers zéro, et que les η_1 racines resteront comprises entre zéro et c^2, quelques-unes d'entre elles pouvant se réduire à zéro. On aura donc

$$\xi_1 = \xi', \qquad \eta_1 = \eta_1'.$$

Mais si d'autre part on observe que l'on a

$$\xi = \eta_1', \qquad \xi' = \eta_1,$$

on verra qu'on doit avoir constamment

$$\eta_1 = \xi = \eta_1', \qquad \xi_1 = \xi' = \eta_1.$$

Il en résulte que l'équation (5) a toujours toutes ses racines réelles et comprises entre zéro et c^2; quant au nombre de racines comprises entre zéro et b^2, ou entre b^2 et c^2, il est donné par le tableau précédent.

Si par exemple n est pair, l'équation $R_{n,i}^{(1)} = 0$ aura $\frac{n-i}{2}$ racines comprises entre zéro et b^2 et $\frac{i}{2}$ comprises entre b^2 et c^2 [1].

Je ne veux pas, pour le moment du moins, m'étendre plus longtemps sur les propriétés générales des fonctions de Lamé; je me bornerai à rappeler les deux résultats suivants qui sont bien connus.

En premier lieu, B est toujours compris entre zéro et $n(n+1)c^2$.

En second lieu, une fonction quelconque de μ et de ν, pour les valeurs de ν comprises entre zéro et b^2 et pour celles de μ comprises entre b^2 et c^2, peut

---

[1] Ces résultats ont été donnés par M. Klein, qui y a été conduit par des considérations un peu différentes.

oujours être développée en une série de la forme $\Sigma A_i M_i N_i$, où A_i désigne un coefficient constant, pendant que M_i et N_i désignent deux fonctions de Lamé conjuguées de μ et de ν.

IX. — Détermination des coefficients de stabilité.

Considérons un ellipsoïde fluide et homogène en équilibre sous l'action de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge. Supposons qu'il subisse une déformation infiniment petite, sans que son volume change, et cherchons à évaluer le travail des forces qui agissent sur le corps pendant cette déformation infiniment petite. Soit

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

l'ellipsoïde envisagé et soient μ et ν les coordonnées elliptiques qui définissent la position d'un point sur cette surface. Soit ζ la distance de l'ellipsoïde à la surface déformée comptée sur la normale à l'ellipsoïde; soit g la résultante de l'attraction et de la force centrifuge en un point de la surface de l'ellipsoïde à l'état d'équilibre; cette résultante est comme on sait normale à l'ellipsoïde. Soit enfin $d\omega$ un élément quelconque de la surface de l'ellipsoïde. Pendant la déformation, une molécule quelconque peut être regardée comme soumise à trois forces : à l'attraction de l'ellipsoïde supposé fixe, à l'attraction du bourrelet infinitésimal formé par la différence entre la surface déformée et l'ellipsoïde, et à la force centrifuge. Si nous considérons un point matériel quelconque de masse 1 et que nous appelions Δ sa distance à un élément quelconque dm' de la masse de l'ellipsoïde et r sa distance à l'axe des z; si nous posons [1]

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r^2}{2},$$

la variation de V mesurera précisément le travail des forces agissant sur ce point matériel et dues à l'attraction de l'ellipsoïde et à la force centrifuge, en laissant de côté l'attraction du bourrelet dont nous venons de parler.

Il résulte des hypothèses faites, que sur toute la surface de l'ellipsoïde, la fonction V a une valeur constante que nous appellerons V_0. Si au lieu d'un

---

[1] On remarquera que je désigne par ω la vitesse de rotation et par $d\omega$ un élément de l'ellipsoïde; par μ une des coordonnées elliptiques et par $d\mu$ un élément du bourrelet. Il n'en peut résulter aucune confusion, puisque les différentielles de ω et de μ n'entrent pas dans le calcul.

point situé sur l'ellipsoïde, nous envisageons un point M infiniment voisin de cette surface, nous abaisserons du point M sur l'ellipsoïde une normale MM′ de longueur infiniment petite λ. La valeur de la fonction g au point M sera précisément aussi la valeur de la dérivée de la fonction V, estimée suivant la normale. On aura donc au point M, en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre

$$V = V_0 - g\lambda.$$

Quelle est maintenant l'énergie potentielle totale de la masse fluide déformée? L'énergie due à l'attraction seule aura pour expression $\frac{1}{2}\iint \frac{dm\,dm'}{\Delta}$, dm et dm' étant deux éléments quelconques de la masse fluide et Δ la distance de ces deux éléments. L'énergie due à la force centrifuge sera $\int \frac{\omega^2}{2} r^2\,dm$, r étant la distance de l'élément dm à l'axe des z. Le double de l'énergie potentielle totale sera donc

$$2W = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2\,dm.$$

J'appellerai W_0 la valeur de W dans l'état d'équilibre, c'est-à-dire quand la figure de la masse fluide se réduit à l'ellipsoïde.

Mais nous devons distinguer parmi les éléments de la masse fluide, les éléments de l'ellipsoïde que j'appellerai dm et dm', et les éléments du bourrelet que j'appellerai $d\mu$ et $d\mu'$. Parmi ces éléments, il y en aura de négatifs, puisque, le volume ne changeant pas pendant la déformation, on doit avoir

$$\int d\mu = 0.$$

On a donc

$$2W = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \iint \frac{dm\,d\mu'}{\Delta} + \iint \frac{dm'\,d\mu}{\Delta} + \iint \frac{d\mu\,d\mu'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2\,dm + \int \omega^2 r^2\,d\mu,$$

$$2W_0 = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2\,dm,$$

ce qui peut s'écrire

$$2W = 2W_0 + 2\iint \frac{dm'\,d\mu}{\Delta} + \int \omega^2 r^2\,d\mu + \iint \frac{d\mu\,d\mu'}{\Delta},$$

ou puisque

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r^2}{2},$$

on aura

$$2W = 2W_0 + 2\int V\,d\mu + \iint \frac{d\mu\,d\mu'}{\Delta}.$$

Considérons un élément quelconque $d\omega$ de la surface de l'ellipsoïde. Menons par les divers points de cet élément des normales à l'ellipsoïde. Nous aurons ainsi déterminé une sorte de cylindre infiniment délié et dans lequel nous découperons une tranche infiniment mince en le coupant par deux plans situés à des distances λ et $\lambda + d\lambda$ du centre de l'élément $d\omega$ et parallèles au plan de cet élément. Si λ est compris entre zéro et ζ, la tranche ainsi découpée dans ce cylindre appartiendra à notre bourrelet; ce sera un de nos éléments $d\mu$, de sorte que nous pourrons écrire

$$d\mu = d\lambda\, d\omega.$$

Nous écrirons de même

$$d\mu' = d\lambda'\, d\omega'.$$

Nous aurons donc pour trouver l'expression de W à calculer les deux intégrales

$$\int V\, d\lambda\, d\omega \quad \text{et} \quad \iint \frac{d\lambda\, d\omega\, d\lambda'\, d\omega'}{\Delta}.$$

Mais λ étant très petit, on a comme on a vu

$$V = V_0 - g\lambda,$$

ce qui donne pour la première intégrale

$$\int V_0\, d\mu - \int g\lambda\, d\lambda\, d\omega.$$

Le premier terme est nul; le second peut s'écrire

$$-\int g\, d\omega \int_0^\zeta \lambda\, d\lambda \qquad \text{ou bien} \qquad -\int g \frac{\zeta^2}{2}\, d\omega.$$

Il reste à calculer la seconde intégrale. Nous remarquerons que λ et λ' étant très petits, on peut considérer Δ comme représentant non pas la distance des éléments $d\mu$ et $d\mu'$, mais celle des éléments $d\omega$ et $d\omega'$ qui en diffère très peu. Δ est alors indépendant de λ et de λ' et l'on peut écrire

$$\iint \frac{d\mu\, d\mu'}{\Delta} = \iint \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} \int_0^\zeta d\lambda \int_0^\zeta d\lambda' = \iint \frac{d\omega\, d\omega'\, \zeta\zeta'}{\Delta}.$$

Il reste donc finalement

$$W = W_0 - \frac{1}{2}\int g\zeta^2\, d\omega + \frac{1}{2}\iint \frac{d\omega\, d\omega'\, \zeta\zeta'}{\Delta}.$$

Avant d'aller plus loin, il faut calculer g. La force g peut être décomposée en trois composantes dirigées suivant les trois axes des x, des y et des z. La composante parallèle à l'axe des x par exemple, est parallèle à la coordonnée x du point d'application. De même pour les deux autres composantes.

Si donc on appelle α, β, γ les cosinus directeurs de la normale et k, k', k'' trois constantes, on aura

$$g\alpha = kx, \qquad g\beta = k'y, \qquad g\gamma = k''z.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

ce qui donne

$$\alpha = \frac{x}{\rho^2}\mathrm{P}, \qquad \beta = \frac{y}{\rho^2 - b^2}\mathrm{P}, \qquad \gamma = \frac{z}{\rho^2 - c^2}\mathrm{P};$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\rho^4} + \dfrac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \dfrac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}}}.$$

On a donc

$$g = \frac{k\rho^2}{\mathrm{P}} = \frac{k'(\rho^2 - b^2)}{\mathrm{P}} = \frac{k''(\rho^2 - c^2)}{\mathrm{P}}.$$

Si nous reprenons les notations du paragraphe précédent et que nous écrivions

$$l = \frac{\mathrm{P}}{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

il viendra

$$g = \frac{\mathrm{K}}{l},$$

K étant une nouvelle constante ne dépendant que de ρ, b et c.

Il reste à déterminer cette constante. Pour cela il suffit de calculer l'expression de g à l'extrémité de l'axe des z; dans ce cas, g se réduit à l'attraction de l'ellipsoïde et peut s'écrire

$$4\pi\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{[\rho^2 - c^2 + (c^2 - b^2)u^2](\rho^2 - c^2 + c^2u^2)}}.$$

D'ailleurs on trouve aisément

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2(\rho^2 - b^2)}}.$$

Il vient donc, par une transformation simple de l'intégrale,

$$gl = 4\pi(\rho^2 - c^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)}}.$$

La fonction $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ est une fonction de Lamé que nous appellerons R_1; c'est d'ailleurs la fonction que nous avions désignée dans le paragraphe précédent par la notation plus compliquée : $\mathrm{R}_{1,1}^{(3)}$. Nous chercherons à éviter les triples

indices toutes les fois qu'il ne seront pas nécessaires et nous rangerons les fonctions de Lamé dans un ordre quelconque; nous les appellerons R_1, R_2, ..., R_i, ... Nous poserons donc

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Si d'autre part, nous envisageons la fonction S_1 conjuguée de R_1, nous aurons

$$S_1 = 3\sqrt{\rho^2 - c^2} \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)}}.$$

On a donc à l'extrémité de l'axe des z :

$$gl = \frac{4}{3}\pi R_1 S_1$$

et comme nous avons vu plus haut que gl est une constante, nous pourrons conclure que gl conserve cette valeur sur toute la surface de l'ellipsoïde.

Développons maintenant $\frac{\zeta}{l}$ qui est une fonction de μ et de ν en une série convergente de la forme suivante : $\Sigma A_i M_i N_i$, A_i étant des constantes et M_i, N_i des fonctions de Lamé. Cela est toujours possible, comme nous l'avons dit à la fin du paragraphe précédent. Nous aurons donc

$$\zeta = \Sigma A_i l M_i N_i,$$

et de même

$$\zeta' = \Sigma A_i l' M'_i N'_i.$$

On tire de là

$$\frac{\zeta^2}{2} = \sum \frac{A_i^2}{2} l^2 M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k l^2 M_i N_i M_k N_k$$

ou

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \sum \frac{A_i^2}{2} \int g l^2 d\omega\, M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k \int g l^2 d\omega\, M_i N_i M_k N_k$$

ou

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \sum \frac{4 A_i^2}{6} \pi R_1 S_1 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega + \sum A_i A_k \frac{4}{3} \pi R_1 S_1 \int l M_i N_i M_k N_k d\omega.$$

Si l'on observe que

$$\int l M_i N_i M_k N_k d\omega = 0,$$

il reste

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \frac{4}{6} \pi R_1 S_1 \Sigma A_i^2 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega.$$

On trouve d'autre part

$$\iint \frac{\zeta\zeta' \, d\omega \, d\omega'}{\Delta} = \Sigma A_i A_k \iint \frac{ll' M_i N_i M'_k N'_k \, d\omega \, d\omega}{\Delta};$$

les deux indices i et k pouvant être égaux ou différents. Mais on a

$$\int \frac{l' M'_k N'_k \, d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi R_k S_k M_k N_k}{2n+1}.$$

On a donc

$$\iint \frac{\zeta\zeta' \, d\omega \, d\omega'}{\Delta} = \Sigma A_i A_k \int l M_i N_i M_k N_k \, d\omega \, \frac{4\pi R_k S_k}{2n+1}.$$

Si i est différent de k, on aura

$$\int l M_i N_i M_k N_k \, d\omega = 0.$$

Il reste donc

$$\iint \frac{\zeta\zeta' \, d\omega \, d\omega'}{\Delta} = \Sigma A_i^2 \int l M_i^2 N_i^2 \, d\omega \, \frac{4\pi R_i S_i}{2n+1}.$$

On arrive donc finalement à l'expression suivante pour W :

$$W = W_0 - \frac{4\pi}{3} \Sigma A_i^2 \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) l M_i^2 N_i^2 \, d\omega;$$

n est bien entendu le degré de la fonction de Lamé R_i.

Nous pouvons considérer la forme de la surface déformée comme définie par les coefficients A_i. Les coefficients de stabilité seront alors

$$-4\pi \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) l M_i^2 N_i^2 \, d\omega.$$

Pour qu'un des ellipsoïdes puisse être une forme de bifurcation, il faut que l'un de ces coefficients s'annule, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0$$

pour l'une des fonctions R_i.

D'après cela, il y a un des coefficients qui est toujours nul, c'est celui qui correspond à $i = 1$. Cela était aisé à prévoir. En effet on peut déplacer l'ellipsoïde parallèlement à lui-même et parallèlement à l'axe de révolution sans changer l'état d'équilibre. Si l'on imprime ainsi à l'ellipsoïde un mouvement de translation infiniment petit et parallèle à l'axe des z, et si l'on appelle ζ la distance des deux ellipsoïdes infiniment voisins comptée suivant la normale, on a en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre :

$$\zeta = A_1 l M_1 N_1.$$

Λ_i étant une constante. Comme les deux ellipsoïdes sont des surfaces d'équilibre, il faut donc bien que le coefficient de stabilité qui correspond à $i = 1$ s'annule. Y a-t-il des cas où d'autres coefficients de stabilité s'annulent ? c'est ce que nous examinerons dans les paragraphes suivants.

On peut arriver à l'équation (1) par une autre voie un peu plus simple et que j'aurais même préférée si je ne me réservais d'examiner plus loin la question de stabilité.

Supposons que l'on ajoute à l'attraction newtonienne et à la force centrifuge qui agissent sur la masse fluide, des forces perturbatrices quelconques, mais très petites. La masse fluide prendra alors une forme d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde. Cette forme sera unique si aucun des coefficients de stabilité ne s'annule; elle sera mal déterminée en général, si l'un de ces coefficients est nul.

Nous reprendrons les mêmes notations que plus haut et nous définirons la surface d'équilibre déformée par la valeur de ζ que nous développerons en série comme précédemment :

$$\zeta = \Sigma A_i l M_i N_i,$$

les A_i étant des coefficients infiniment petits qu'il s'agit de déterminer pour définir la nouvelle forme d'équilibre. Soit comme plus haut V le potentiel dû à l'attraction de l'ellipsoïde et à la force centrifuge, v le potentiel dû à l'attraction du bourrelet, v' le potentiel dû aux forces perturbatrices. On devra avoir sur toute la nouvelle surface d'équilibre :

$$V + v + v' = \text{const.} \tag{2}$$

Mais on a, puisque ζ est infiniment petit,

$$V = V_0 - g\zeta$$

et de plus

$$v = \int \frac{\zeta' \, d\omega'}{\Delta},$$

Δ étant la distance d'un point quelconque du bourrelet au point envisagé de la nouvelle surface libre; mais comme ζ est infiniment petit, on peut remplacer ces deux points par leurs projections sur l'ellipsoïde. Δ est alors la distance de deux points de l'ellipsoïde et l'on a

$$v = \sum A_i \int \frac{l M'_i N'_i \, d\omega'}{\Delta} = 4\pi \sum \frac{A_i R_i S_i M_i N_i}{2n+1}.$$

Nous pouvons écrire d'ailleurs

$$v' = \Sigma B_i M_i N_i,$$

les B_i étant des coefficients très petits que l'on peut regarder comme donnés. L'équation (2) pourra alors s'écrire, et remplaçant g et ζ par leurs valeurs,

$$-\frac{4\pi}{3} R_1 S_1 \sum A_i M_i N_i + 4\pi \sum \frac{A_i R_i S_i M_i N_i}{2n+1} + \sum B_i M_i N_i = \text{const.}$$

Nous identifierons dans les deux membres les coefficients de $M_i N_i$ et il viendra

$$4\pi A_i \left(\frac{R_1 R_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) = B_i.$$

Ces équations détermineront complètement les coefficients A_i et par conséquent la nouvelle forme d'équilibre, à moins qu'on n'ait

$$(1) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

C'est donc là aussi la condition pour que l'un des coefficients de stabilité s'annule.

X. — Discussion de l'équation fondamentale.

Nous avons maintenant à rechercher si l'équation

$$(1) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

où ρ^2 est l'inconnue admet des racines comprises entre $+c^2$ et $+\infty$.

Parlons d'abord de l'équation plus générale

$$(2) \qquad F = \frac{R_k S_k}{2m+1} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0,$$

n et m étant les degrés des fonctions R_i et R_k. Le premier membre F tend vers zéro quand ρ croît indéfiniment, car les fonctions $R_k S_k$ et $R_i S_i$ sont de degré -1 en ρ, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent. Si R_k et R_i contiennent en facteur $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, F s'annule encore pour $\rho^2 = c^2$.

On a d'ailleurs

$$\frac{F}{R_k^2} = \frac{S_k}{R_k} \frac{1}{2m+1} - \frac{R_i^2}{R_k^2} \frac{S_i}{R_i} \frac{1}{2n+1}.$$

Les racines de l'équation

$$(3) \qquad \frac{F}{R_k^2} = 0$$

qui sont supérieures à c^2 sont les mêmes que celles de l'équation (2); en effet R_k peut s'annuler pour $\rho^2 = c^2$, mais jamais pour $\rho^2 > c^2$.

Si nous voulons séparer les racines de l'équation (3), il suffit d'appliquer le théorème de Rolle et d'écrire que la dérivée du premier membre de (3) est nulle. On obtient ainsi l'équation

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_k}{(2m+1)R_k} - \frac{R_l^2}{R_k^2}\frac{d}{d\rho}\frac{S_l}{(2n+1)R_l} - \frac{S_l}{(2n+1)R_l}\frac{d}{d\rho}\frac{R_l^2}{R_k^2} = 0.$$

Mais on a, d'après la définition même des fonctions S :

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_k}{(2m+1)R_k} = \frac{-1}{R_k^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}, \qquad \frac{d}{d\rho}\frac{S_l}{(2n+1)R_l} = \frac{-1}{R_l^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Il reste donc

$$\frac{S_l}{(2n+1))R_l}\frac{d}{d\rho}\frac{R_l^2}{R_k^2} = 0,$$

ce qui exprime que le rapport $\frac{R_l}{R_k}$ passe par un maximum ou minimum, car S ne peut s'annuler.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Les racines de l'équation (2) supérieures à c^2, en laissant de côté la racine c^2 si elle existe, sont séparées par les racines de l'équation

$$\frac{d}{dp}\frac{R_l^2}{R_k^2} = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$R'_l R_k - R'_k R_l = 0, \tag{4}$$

où

$$R'_l = \frac{dR_l}{d\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \int_\rho^c \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Cherchons maintenant à séparer les racines de l'équation (4) elle-même. Pour cela annulons la dérivée du premier membre par rapport à ε. Il viendra

$$R''_l R_k - R''_k R_l = 0, \tag{5}$$

où

$$R''_l = \frac{d^2 R_l}{d\varepsilon^2}.$$

Mais l'équation (1) du paragraphe VIII peut s'écrire

$$R''_l = [n(n+1)\rho^2 - B_l]R_l$$

en ce qui concerne R_l et

$$R''_k = [m(m+1)\rho^2 - B_k]R_k$$

en ce qui concerne R_k. L'équation (5) devient ainsi, en supprimant le facteur $R_i R_k$ qui ne peut s'annuler pour les valeurs supérieures à c^2 :

$$(6) \qquad [n(n+1) - m(m+1)]\rho^2 - B_i + B_k = 0.$$

Il est clair qu'une pareille équation ne peut avoir qu'une racine supérieure à c^2. L'équation (4) aura donc au plus deux racines égales ou supérieures à c^2, et l'équation (2) aura au plus trois racines supérieures à c^2 (sans y comprendre la racine c^2 si elle existe, mais en y comprenant la racine ∞).

Si l'équation (4) n'a aucune racine supérieure à c^2, le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ est toujours croissant ou toujours décroissant quand ρ^2 croît de c^2 à l'infini.

Supposons par exemple qu'il soit toujours croissant. On aura alors

$$\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} > 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{d\rho}\frac{F}{R_k^2} < 0,$$

l'expression $\frac{F}{R_k^2}$ est donc toujours décroissante et comme elle tend vers zéro pour $\rho = \infty$, elle doit toujours être positive. On a donc $F > 0$.

Revenons en particulier à l'équation (1) et supposons

$$R_k = R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

Supposons d'abord que R_i contienne ou facteur $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, nous pourrons écrire

$$R_i = \varphi P_i \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

φ étant un facteur qui pourra être ρ, $\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}$ ou $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et P_i étant un polynome entier en ρ^2. L'équation $P_i = 0$ n'est autre que l'équation (5) du paragraphe VIII, débarrassée des facteurs que nous sommes convenus de lui enlever. Nous avons vu que cette équation a toutes ses racines réelles et qu'elles sont comprises entre zéro et c^2. L'équation $\frac{dP_i}{d(\rho^2)} = 0$ aura donc aussi toutes ses racines réelles et comprises entre zéro et c^2; d'où il résulte que, ρ^2 croissant de c^2 à $+\infty$, P_i sera constamment croissant. Il en est de même de ρ et de $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et par conséquent de φ et de $\frac{R_i}{R_k} = \varphi P_i$. Il en résulte que si R_i contient $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur, l'équation (1) n'a aucune racine supérieure à c^2 et que son premier membre est toujours positif.

Supposons maintenant que R_i ne contienne pas $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur. Quand ρ est très grand, on peut regarder $\frac{1}{\rho}$ comme un infiniment petit du premier ordre.

On a alors en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre :

$$R_1 S_1 = R_l S_l = \frac{1}{\rho}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_l S_l}{2n+1} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) > 0.$$

Le premier membre de (1) est donc toujours positif, à moins que n ne soit égal à 1.

Pour $\rho^2 = c^2$, $R_1 S_1$ s'annule et par hypothèse $R_l S_l$ ne s'annule pas; le premier membre est donc négatif. Ainsi la substitution de $\rho^2 = c^2$ et d'une valeur de ρ^2 positive et très grande donne des résultats de signe contraire; le nombre des racines de l'équation (1) supérieures à c^2 et finies sera donc impair.

Or nous avons vu que le nombre des racines supérieures à c^2 était au plus égal à 3, en y comprenant la racine $\rho^2 = \infty$; si l'on ne tient pas compte de cette racine, le nombre des racines sera au plus égal à 2; et comme il doit être impair, il faut qu'il soit égal à 1.

Nous avons laissé de côté le cas où $n = 1$ auquel correspondent deux fonctions R_l, à savoir

$$R_l = \rho, \qquad R_l = \sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Il est aisé de voir que quand ρ^2 croît depuis c^2 jusqu'à $+\infty$, les rapports $\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}$ et $\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}$ vont toujours en décroissant. On doit donc conclure que l'équation (1) n'a aucune racine finie et plus grande que c^2, et que son premier membre est toujours négatif.

Voici donc en résumé quel est le nombre des racines de l'équation (1) finies et supérieures à c^2 :

R_l *divisible par* $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; *pas de racine; premier membre positif;*

R_l *non divisible par* $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; $n > 1$; *une racine;*

R_l *non divisible par* $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; $n = 1$; *pas de racine; premier membre négatif.*

Revenons maintenant au cas général, et cessons de supposer que $R_k = R_1$; qu'arrive-t-il alors de l'équation (2) ?

Soit d'abord $n > m$, et supposons que R_l soit divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et que R_k ne le soit pas. On voit alors tout de suite que F est positif pour $\rho^2 = c^2$ et pour ρ^2 très grand et positif. L'équation (2) n'a donc pas de racine finie et

supérieure à c^2, ou bien elle en a deux. Quant au rapport $\frac{R_i}{R_k}$, il est nul pour $\rho^2 = c^2$ et infini pour $\rho^2 = \infty$; il est donc croissant pour les valeurs de ρ^2 très peu supérieures à c^2 et pour les valeurs très grandes. Donc dans les cas où l'équation (2) a deux racines, il doit en être de même de l'équation (4) et le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ doit présenter un maximum et un minimum.

Supposons maintenant que R_k soit divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ sans que R_i le soit. Alors pour $\rho^2 = c^2$, on a

$$F < 0;$$

pour ρ^2 positif et très grand,

$$F > 0;$$

il y a donc un nombre impair de racines. et comme ce nombre ne peut dépasser 2, il faut qu'il soit égal à 1.

Supposons maintenant que R_i et R_k soient tous deux divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ ou ne le soient ni l'un ni l'autre; on aura alors pour $\rho^2 = c^2$:

$$R'_i R_k - R'_k R_i = 0.$$

Il est possible que cette même équation (4) puisse avoir une autre racine supérieure à c^2, mais elle n'en peut avoir qu'une. Pour qu'elle en ait une, il faut d'abord que l'équation (6) en ait une, c'est-à-dire que

$$(7) \qquad B_i - B_k > [n(n+1) - m(m+1)]c^2.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Si cette condition est remplie l'équation (2) pourra avoir une racine. Dans le cas contraire elle n'en aura aucune. D'ailleurs il en est encore de même si, la condition (7) n'étant pas remplie, R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ sans que R_k le soit.

Dans le cas de $n = m$, qu'il nous reste à examiner, l'équation (6) qui se réduit à

$$B_i - B_k = 0$$

ne peut avoir aucune racine. L'équation (4) ne peut donc en avoir qu'une et l'équation (2) en aura également une au plus.

Si de plus R_i et R_k sont tous deux divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ou ne le sont ni l'un ni l'autre, le premier membre de (4) s'annule pour $\rho^2 = c^2$ et ne peut avoir d'autre racine. L'équation (2) n'en a donc aucune.

Si R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et que R_k ne le soit pas, il peut y avoir zéro ou une racine. Il n'y en a pas si $\frac{R_i}{R_k}$ est plus petit que 1 pour ρ positif et très

grand. Il y en a une dans le cas contraire; car alors pour les valeurs très grandes de ρ, F est négatif, et pour $\rho^2 = c^2$, on voit aisément que F est positif.

En résumé on a

si $n > m$:	R_i div.	R_k non div.	0 ou 2 racines;
si $n > m$:	R_i non div.	R_k div.	1 racine;
si $n > m$:	R_i div.	R_k div.	0 ou 1 racine;
si $n > m$:	R_i non div.	R_k non div.	0 ou 1 racine;
si $n = m$:	R_i div.	R_k non div.	0 ou 1 racine;
si $n = m$:	R_i non div.	R_k div.	0 ou 1 racine;
si $n = m$:	R_i div.	R_k div.	0 racine;
si $n = m$:	R_i non div.	R_k non div.	0 racine.

XI. — Ellipsoïdes de révolution.

Parmi les ellipsoïdes aplatis de révolution qui sont des figures d'équilibre de notre masse fluide, y en a-t-il qui sont des figures de bifurcation ?

Pour étudier ces ellipsoïdes nous prendrons pour variable indépendante $\sqrt{e^2 - c^2}$ que nous appellerons k à l'exemple de Liouville et non plus ρ_2, afin d'éviter l'indice 2. Nous prendrons c pour unité de longueur, de telle sorte que $c^2 = 1$. On aura alors

$$R_{i,n} = A(k^2+1)^{\frac{i}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n, \qquad \text{où} \qquad i+j=n \quad \text{ou} \quad n+1,$$

A étant une constante et D un indice de dérivation par rapport à k.

A une même fonction

$$(1) \qquad A(k^2+1)^{\frac{i}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n$$

correspondent en général deux fonctions de Lamé distinctes, à savoir :

$$R^1_{n-j,n} \quad \text{et} \quad R^2_{n+1-j,n} \qquad \text{si} \quad j+n \text{ est pair}$$

et

$$R^3_{n-j,n} \quad \text{et} \quad R^4_{n+1-j,n} \qquad \text{si} \quad j+n \text{ est impair.}$$

A chaque fonction (1) correspondront donc deux coefficients de stabilité que j'appellerai pour abréger $B_{j,n}$ et $C_{j,n}$. Il y a exception quand $j = 0$. Dans ce cas en effet, à une fonction (1) ne correspond qu'une seule fonction de Lamé $R^1_{n,n}$ si n est pair et $R^3_{n,n}$ si n est impair, et par conséquent ne correspond qu'un seul coefficient de stabilité.

Quand on fait croître ω depuis zéro jusqu'à une certaine valeur ω_0, on trouve comme figures d'équilibre deux ellipsoïdes de révolution qui se con-

fondent pour $\omega = \omega_0$ et disparaissent pour $\omega > \omega_0$. A chaque valeur de $\omega < \omega_0$ correspondent donc deux valeurs de k et il est aisé de voir que pour $\omega = 0$, ces deux valeurs sont $k = 0$ et $k = \infty$. Pour $\omega = \omega_0$, ces deux valeurs se confondent en une seule, k_0. Il y a donc deux séries linéaires Σ et Σ' de formes d'équilibre réelles, la série Σ comprenant les ellipsoïdes tels que $k < k_0$, et la série Σ', les ellipsoïdes tels que $k > k_0$.

L'ellipsoïde $k = k_0$ est une forme limite.

Si l'on fait varier k depuis zéro jusqu'à $+\infty$, on voit l'ellipsoïde, d'abord infiniment aplati, se rapprocher ensuite indéfiniment de la sphère. En même temps ω croît d'abord de zéro à ω_0 et décroît ensuite de ω_0 à zéro.

Si en suivant la série Σ ou la série Σ', on voit un des coefficients de stabilité changer de signe, l'ellipsoïde correspondant sera une forme de bifurcation. Les deux coefficients de stabilité $B_{j,n}$ et $C_{j,n}$ que je viens de définir sont toujours égaux entre eux. Quelle est la condition pour que ces coefficients s'annulent ? L'équation $B_{j,n} = 0$ n'est autre que l'équation (1) du paragraphe précédent. D'après la discussion de ce paragraphe, on voit que le coefficient $B_{j,n}$ s'annulera pour une certaine valeur de k, si $j + n$ est pair et si n est plus grand que 1, et ne s'annulera jamais si cette condition n'est pas remplie. Cette même discussion montre que ce coefficient change de signe en s'annulant. Donc l'ellipsoïde correspondant est de bifurcation.

Ainsi à tout système de nombres j et n tels que

$$j \equiv n \pmod 2, \qquad n > 1 \tag{2}$$

correspond une valeur de k qui annule deux coefficients de stabilité et par conséquent un ellipsoïde de bifurcation.

Il y a exception pour le système

$$j = 0, \qquad n = 2.$$

L'ellipsoïde correspondant est l'ellipsoïde $\omega = \omega_0$, $k = k_0$ dont nous avons parlé plus haut. C'est une forme limite et non une forme de bifurcation.

Un autre système intéressant est le suivant :

$$j = 2, \qquad n = 2.$$

L'ellipsoïde correspondant est celui qui appartient à la fois à la série des ellipsoïdes de révolution et à celle des ellipsoïdes de Jacobi.

Soient deux nombres j et n quelconques, satisfaisant aux conditions (2); soit $K_{j,n}$ la valeur de k qui annule le coefficient $B_{j,n}$ et $\Omega_{j,n}$ la valeur de ω correspondante.

Faisons maintenant

$$\omega = \Omega_{j,n} + \varepsilon,$$

ε étant une quantité infiniment petite; à cette valeur de ω correspondront deux formes d'équilibre, un ellipsoïde de révolution E et une figure Φ très peu différente. Étudions de plus près cette figure Φ. Nous définirons cette figure de la façon suivante : menons à l'ellipsoïde E une normale quelconque. Nous définirons le point de l'ellipsoïde qui est le pied de cette normale par deux coordonnées φ et μ; φ sera l'angle formé par le plan qui passe par le point considéré et l'axe des z avec le plan des xz, et μ sera la deuxième coordonnée elliptique comprise entre $b^2 = 0$ et $c^2 = 1$. Je prendrai sur cette normale une longueur ζ. La position d'un point dans l'espace sera ainsi définie par les trois coordonnées ζ, μ et φ, et c'est dans ce système de coordonnées que je vais écrire l'équation de la figure Φ. Au système de nombres j et n correspondent deux fonctions de Lamé ainsi qu'on l'a vu :

$$R^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} \quad \text{et} \quad R^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n},$$

auxquelles il faut adjoindre leurs conjuguées :

$$(3) \qquad \begin{cases} M^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} \quad \text{et} \quad M^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n}, \\ N^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} \quad \text{et} \quad N^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n}. \end{cases}$$

Les deux fonctions M sont égales entre elles et s'obtiennent en remplaçant dans la fonction R correspondante k par $\sqrt{1-\mu^2}$, et les deux fonctions N sont égales, l'une à $\cos j\varphi$, l'autre à $\sin j\varphi$.

L'équation de la figure Φ pourra alors s'écrire

$$\zeta = l(A_1 M_1 N_1 + A_2 M_2 N_2)$$

en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre (ε étant du premier ordre). Dans cette équation l a le même sens que dans le paragraphe VIII; M_1, N_1, M_2 et N_2 sont les fonctions (3); A_1 et A_2 sont deux constantes infiniment petites du premier ordre et dont le rapport est arbitraire.

Posons

$$A_1 = \theta \cos\lambda, \qquad A_2 = \theta \sin\lambda,$$

θ étant une constante infiniment petite dépendante de ε, et λ étant une constante arbitraire; il viendra, en remplaçant M_1, N_1, M_2 et N_2 par leurs valeurs :

$$(4) \qquad \zeta = \theta l \cos(j\varphi - \lambda) M,$$

la fonction M s'obtenant comme je l'ai dit plus haut.

Si l'équation (4) était l'équation exacte de la figure Φ, cette équation prouverait que la figure Φ jouirait des symétries suivantes :

1° Si $j = 0$, la figure Φ serait de révolution autour de l'axe des z.

2° Si j n'est pas nul, la figure Φ ne changerait pas quand on la ferait tourner autour de l'axe des z d'un angle $\frac{2\pi}{j}$; elle admettrait j plans de symétrie passant par l'axe des z, de façon que l'angle dièdre de deux de ces plans de symétrie consécutifs soit $\frac{\pi}{j}$.

3° Comme $j + n$ est toujours pair, le plan des xy serait aussi un plan de symétrie.

4° Enfin si j est pair, l'axe des z serait un axe de symétrie, et l'origine un centre de symétrie.

Mais l'équation (4) n'est qu'une équation approximative de la figure Φ. Pour l'établir, nous avons négligé les infiniment petits du deuxième ordre; de sorte qu'on peut se demander si ces diverses symétries subsisteront encore quand on étudiera l'équation exacte de la figure Φ et qu'on tiendra compte des termes d'ordre supérieur. La réponse à cette question doit être affirmative.

Pour s'en assurer, voici quel artifice on doit employer. Supposons qu'on introduise dans le système des liaisons auxiliaires et qu'on assujettisse la masse fluide à présenter les symétries que nous venons d'énumérer. Je dis que, même avec ces liaisons supplémentaires, l'ellipsoïde qui correspond à la valeur $K_{j,n}$ de k et à la valeur $\Omega_{j,n}$ de ω sera encore une forme de bifurcation.

En effet nous avons vu au paragraphe IX qu'une surface très peu différente de cet ellipsoïde peut être définie par la distance ζ d'un point de cette surface à l'ellipsoïde (comptée sur la normale à l'ellipsoïde) et que cette distance ζ elle-même est donnée en fonction des coordonnées elliptiques sous la forme d'une série convergente

$$\zeta = l \Sigma A_p M_p N_p,$$

M_p et N_p étant des fonctions de Lamé, de telle sorte que la surface en question sera déterminée par la connaissance des coefficients A_p. Nous avons vu ensuite dans le même paragraphe que l'énergie potentielle totale W pouvait s'écrire, en négligeant les cubes des coefficients A_p :

$$W = W_0 + \Sigma A_p^2 B_p, \tag{5}$$

les B_p étant les coefficients de stabilité; de plus, avons-nous dit, pour que

l'ellipsoïde soit une figure de bifurcation, il faut et il suffit que l'un des B_p s'annule.

Qu'arrive-t-il maintenant quand on introduit des liaisons dans le système?

Supposons d'abord qu'on assujettisse la masse fluide à être de révolution autour de l'axe des z et symétrique par rapport au plan des xy. Comment ces conditions s'exprimeront-elles analytiquement? Elles signifieront que tous les coefficients A_p sont assujettis à être nuls, sauf ceux qui correspondent à une fonction M_p dont les nombres caractéristiques j_1 et n_1 satisfassent à la condition

$$j_1 = 0, \qquad n_1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2).$$

Que faut-il maintenant pour que l'ellipsoïde soit de bifurcation quand on envisage l'équilibre d'une masse fluide assujettie à ces liaisons? Il suffit que dans l'expression (5), le coefficient B_p de l'un des termes A_p^2 qui ne sont pas assujettis à être nuls, change de signe.

Nous avons supposé que pour l'ellipsoïde $k = K_{j,n}$, le coefficient de stabilité défini par les deux nombres j et n s'annulait; si nous avons

$$j = 0, \qquad n \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2)$$

ce coefficient de stabilité est un de ceux qui multiplient un terme A_p^2 non assujetti par les liaisons à être nul.

Si donc on envisage l'équilibre du système soumis aux liaisons que nous venons d'énumérer, l'ellipsoïde $k = K_{0,n}$ sera encore une figure de bifurcation. Pour la valeur de

$$\omega = \Omega_{0,n} + \varepsilon$$

on aura donc deux formes d'équilibre du système à liaisons, à savoir un ellipsoïde et une figure Φ' très peu différente.

La figure Φ', à cause des liaisons mêmes auxquelles elle est supposée assujettie, sera de révolution et symétrique par rapport au plan des xy. Mais par suite de la nature même de ces liaisons, la figure Φ' qui est en équilibre en tenant compte des liaisons, restera en équilibre quand on les supprimera. Ce ne peut donc être que la figure Φ elle-même qui se trouve ainsi être de révolution quand j est nul.

Supposons maintenant que j ne soit pas nul.

Assujettissons le système aux liaisons suivantes; la masse devra admettre pour plans de symétrie le plan des xy et les j plans :

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{h\pi}{j} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, j-1).$$

Ces conditions traduites analytiquement signifient que tous les coefficients A_p sont assujettis à être nuls, sauf ceux qui correspondent à une fonction M_p dont les nombres caractéristiques j_1 et n_1 satisfont à la condition

$$j_1 \equiv 0 \pmod{j}, \qquad j_1 + n_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

De plus nous avons vu que parmi les fonctions N, les unes sont de la forme $\cos j\varphi$ et les autres de la forme $\sin j\varphi$; les coefficients de ces dernières seront tous assujettis à être nuls.

Pour que l'ellipsoïde soit de bifurcation quand on considère l'équilibre d'une masse soumise à ces liaisons, il faut et il suffit qu'on voie s'annuler l'un des coefficients de stabilité B_p qui multiplie un terme A_p^2 que les liaisons n'assujettissent pas à être nul.

Pour l'ellipsoïde $k = K_{j,n}$, les deux coefficients de stabilité définis par les deux nombres j et n s'annulent; or l'un d'entre eux multiplie un terme A_p^2 que les liaisons n'obligent pas à s'annuler.

Donc, même dans le système à liaisons, l'ellipsoïde $K_{j,n}$ sera une forme de bifurcation. Si l'on fait

$$\omega = \Omega_{j,n} + \varepsilon$$

on aura deux formes d'équilibre du système à liaisons, à savoir un ellipsoïde et une figure Φ' très peu différente.

La figure Φ', en vertu de ses liaisons mêmes, aura $j+1$ plans de symétrie. Mais ces liaisons sont de telle nature que l'équilibre de la figure Φ' subsistera quand on les supprimera. La figure Φ' n'est donc autre chose que la figure Φ elle-même qui doit ainsi avoir $j+1$ plans de symétrie.

Je vais maintenant expliquer pourquoi les liaisons, dont il vient d'être question, sont telles que si une masse fluide est en équilibre en tenant compte de ces liaisons, l'équilibre subsistera encore quand on les supprimera.

Pour simplifier l'exposition, je supposerai un seul plan de symétrie P qui pourra être, soit le plan des xy, soit un plan passant par l'axe des z.

La condition d'équilibre de la masse fluide supposée libre, c'est que le potentiel V, dû à l'action de toutes les forces qui agissent sur une molécule du fluide, soit constant sur toute la surface libre.

Si l'on assujettit la masse fluide à être symétrique par rapport au plan P, cette condition se trouve un peu modifiée. Soient V le potentiel en un point quelconque de la surface libre, V' le potentiel en un autre point de cette

surface, symétrique du premier par rapport au plan P; la nouvelle condition d'équilibre sera

$$V + V' = \text{const.}$$

Supposons que cette condition soit remplie et que la masse fluide se trouve en équilibre sous l'action des forces extérieures et des liaisons, et soit par conséquent symétrique par rapport au plan P. Si les forces extérieures se réduisent à l'attraction et à la force centrifuge, elles seront elles-mêmes symétriques par rapport au plan P et l'on aura par conséquent $V = V'$, d'où l'on déduit $V = \text{const.}$ Cette condition montre que l'équilibre subsistera encore quand on supprimera les liaisons. C. Q. F. D.

Il résulte de cette discussion que les symétries que nous avions été conduit à attribuer à la surface Φ, en partant de l'équation (4) qui n'était qu'approximative, lui appartiennent rigoureusement, même quand on tient compte des termes d'ordre supérieur qui entrent dans son équation exacte.

Nous allons nous occuper maintenant de démontrer un résultat qui nous sera utile dans la suite.

Si k est positif et très grand, l'ellipsoïde est très voisin de la sphère et tous les coefficients de stabilité sont négatifs. Si l'on fait décroître k, il arrivera un moment où un ou deux de ces coefficients s'annuleront. Quel sera le premier de ces coefficients qui changera ainsi de signe? Je dis que ce sera celui qui correspond aux nombres

$$j = 2, \qquad n = 2.$$

Appelons en effet R_2 la fonction de Lamé correspondante et S_2 sa conjuguée. Nous aurons

$$R_2 = k^2 + 1.$$

Soit maintenant R_i une autre fonction de Lamé et S_i sa conjuguée. Nous aurons

$$R_i = A(k^2+1)^{\frac{j}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n,$$

A étant une constante. Nous supposerons que $j + n$ est pair, sans quoi le coefficient correspondant à R_i ne s'annulerait jamais.

Il s'agit de démontrer que la racine $K_{2,2}$ de l'équation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = 0$$

est plus grande que la racine $K_{j,n}$ de l'équation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

Pour cela il suffit de démontrer que l'expression $\frac{R_2 S_2}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1}$ est toujours positive, ou bien encore que le quotient $\frac{R_i}{R_2}$ est toujours croissant.

Nous distinguerons trois cas.

1° Supposons d'abord $j > 1$.

Il vient alors

$$\frac{R_i}{R_2} = A(k^2+1)^{\frac{j-2}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n.$$

A est une constante positive; $(k^2+1)^{\frac{j-2}{2}}$ se réduit à 1 ou est toujours croissant; enfin le dernier facteur $D^{j+n}(k^2+1)^n$ est un polynome entier en k dont tous les coefficients sont positifs et est par conséquent toujours croissant.

C. Q. F. D.

2° Supposons maintenant $j = 0$; $n = 2p$.

Il vient alors

$$\frac{R_i}{R_2} = A\frac{D^{2p}(k^2+1)^{2p}}{(k^2+1)}.$$

La dérivée logarithmique du premier membre est donc

$$\frac{D^{2p+1}(k^2+1)^{2p}}{D^{2p}(k^2+1)^{2p}} - \frac{2k}{k^2+1}.$$

Je veux démontrer qu'elle est positive, c'est-à-dire que

$$F = (k^2+1)D^{2p+1} - 2k\,D^{2p} > 0,$$

où D^{2p} et D^{2p+1} désignent les dérivées d'ordre $2p$ et $2p+1$ de $(k^2+2)^{2p}$. On trouve

$$(k^2+1)^{2p} = \sum \frac{2p!}{q!(2p-q)!} k^{2q} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, 2p),$$

d'où

$$D^{2p} = \sum \frac{2p!\,2q!}{q!(2p-q)!(2q-2p)!} k^{2q-2p} \qquad (q = p, p+1, \ldots, 2p).$$

Nous écrirons pour abréger

$$D^{2p} = \Sigma A_q k^{2q-2p}$$

et il viendra

$$F = (k^2+1)\Sigma A_q(2q-2p)k^{2q-2p-1} - 2k\Sigma A_q k^{2q-2p}.$$

Le coefficient de $k^{2q-2p+1}$ dans F sera donc

$$(2q-2p-2)A_q + (2q-2p+2)A_{q+1}.$$

Pour que F soit toujours positif, il suffit que tous ces coefficients soient

positifs. Or comme tous les A_q sont positifs, il ne peut y avoir de doute que si $2q - 2p - 2$ est négatif, c'est-à-dire pour $q = p$. Le coefficient de F devient alors

$$2A_{p+1} - 2A_p.$$

Si nous écrivons qu'il est positif, il viendra

$$A_{p+1} > A_p$$

ou bien

$$\frac{2p!(2p+2)!}{(p+1)!(p-1)!2!} > \frac{2p!2p!}{p!p!}$$

ou bien encore

$$\frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)} > \frac{1}{p}$$

ou enfin

$$p(2p+1) > 1,$$

ce qui est évident ; donc F est toujours positif. C. Q. F. D.

3° On peut supposer enfin

$$j = 1, \qquad n = 2p+1.$$

Il viendra

$$\frac{R_i}{R_2} = A\,\frac{D^{2p+2}(k^2+1)^{2p+1}}{\sqrt{k^2+1}}$$

ou en désignant simplement par D^k la $k^{\text{ième}}$ dérivée de $(k^2+1)^{2p+1}$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{AD^{2p+2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

dont la dérivée logarithmique est

$$\frac{D^{2p+3}}{D^{2p+2}} - \frac{k}{k^2+1};$$

pour qu'elle soit positive, il faut que

$$F = (k^2+1)D^{2p+3} - kD^{2p+2} > 0.$$

Or on a

$$(k^2+1)^{2p+1} = \sum \frac{(2p+1)!}{q!(2p+1-q)!}k^{2q},$$

d'où

$$D^{2p+2} = \sum A_q k^{2q-2p-2} = \sum \frac{(2p+1)!\,2q!}{q!(2p+1-q)!(2q-2p-2)!}k^{2q-2p-2}$$
$$(q = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ 2p+1).$$

Il vient donc

$$F = (k^2+1)\Sigma A_q(2q-2p-2)k^{2q-2p-3} - k\Sigma A_q k^{2q-2p-2}.$$

Le coefficient de $k^{2q-2p-1}$ dans F sera donc

$$A_q(2q-2p-3)+A_{q+1}(2q-2p).$$

Ce coefficient ne pourrait être négatif que si l'on avait

$$2q-2p-3<0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $q=p+1$.

Le coefficient de F devient alors

$$2A_{p+2}-3A_{p+1}.$$

Écrivons que ce coefficient est positif, il viendra

$$3\frac{(2p+1)!(2p+2)!}{(p+1)!\,p!}<2\frac{(2p+1)!(2p+4)!}{(p+2)!(p-1)!\,2!}$$

ou

$$\frac{3}{p}<\frac{(2p+3)(2p+4)}{p+2}$$

ou

$$p(2p+3)(2p+4)-3(p+2)>0$$

ou

$$4p^3+14p^2+9p-6>0,$$

inégalité qui est vérifiée même pour $p=1$.

Donc F est encore positif. C. Q. F. D.

Nous devons conclure de cette discussion que si l'on fait décroître k depuis $+\infty$ jusqu'à zéro, de façon que l'ellipsoïde d'abord très voisin d'une sphère s'aplatisse de plus en plus, on rencontrera une infinité d'ellipsoïdes qui appartiendront à d'autres séries linéaires de figures d'équilibre. Le premier que l'on rencontrera ainsi sera celui qui appartient à la série des ellipsoïdes de Jacobi et qui correspond au cas de $j=n=2$,

XII. — Ellipsoïdes de Jacobi.

Nous allons rechercher maintenant si parmi les ellipsoïdes de Jacobi il y a des formes d'équilibre de bifurcation.

Nous poserons comme dans le paragraphe précédent

$$\rho^2=k^2+c^2, \qquad c^2=1$$

et nous ferons varier b^2 depuis zéro jusqu'à $c^2=1$.

A chaque valeur de b^2 correspondra une valeur de k, que j'appellerai H et

qui sera telle que l'ellipsoïde dont les axes sont k, $\sqrt{k^2+c^2-b^2}$ et $\sqrt{k^2+1}$ soit un ellipsoïde de Jacobi.

Voyons quelle relation lie b^2 à H.

Parmi les fonctions de Lamé du deuxième ordre, je citerai la suivante : $\rho\sqrt{\rho^2-b^2}$. Nous l'appellerons R_2; en effet si l'on fait $b^2=0$, elle se réduit à k^2+1 : c'est donc bien une des deux fonctions que nous avons appelées R_2 dans le paragraphe précédent et qui se réduisaient toutes deux à k^2+1 pour $b^2=0$; nous réserverons la notation R_2 à la seule fonction $\rho\sqrt{\rho^2-b^2}$, à laquelle correspondront une fonction S_2 et deux fonctions

$$M_2=\mu\sqrt{\mu^2-b^2}, \qquad N_2=\nu\sqrt{b^2-\nu^2}.$$

Si l'on fait tourner l'ellipsoïde E d'un angle infiniment petit autour de l'axe des z, de façon à lui faire occuper la position E'; puis que l'on appelle ζ la distance des deux ellipsoïdes E et E' comptée normalement à l'un d'eux, on trouvera aisément

$$\zeta = A_2 l M_2 N_2,$$

A_2 étant une constante infiniment petite.

Mais si l'ellipsoïde E est un ellipsoïde de Jacobi, son équilibre sera indifférent et ne sera pas altéré quand on fera tourner la figure d'un angle quelconque autour de l'axe des z. L'équilibre subsistera quand on fera varier A_2 d'une manière quelconque. Donc le coefficient de stabilité correspondant devra être nul, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$(1) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = 0.$$

Telle est l'équation qui lie H à b^2 et qui exprime que l'ellipsoïde E est un ellipsoïde de Jacobi.

Cela montre qu'à chaque valeur de b^2 correspond une valeur de H et une seule. Lorsque b^2 tend vers c^2, cette valeur de H tend vers zéro. On sait en effet que quand ω tend vers zéro, le rapport du petit axe au moyen, dans l'ellipsoïde de Jacobi, tend vers l'unité et que le rapport du petit axe au grand tend vers zéro.

Pour qu'un ellipsoïde de Jacobi soit de bifurcation, il faut qu'un autre de ses coefficients de stabilité s'annule, ce qui exige que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1},$$

n étant l'ordre de la fonction R_i.

L'équation

$$(3) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0$$

aura une racine que j'appellerai K_i, pourvu que R_i ne soit pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$.

Les équations (2) se réduiront donc à $H = K_i$. Pour $b^2 = 0$, on revient au cas du paragraphe précédent, et l'on a vu à la fin de ce paragraphe que $H > K_i$, car la plus grande des valeurs de k pour lesquelles un coefficient de stabilité s'annulait était précisément $K_{2,2}$ c'est-à-dire H.

Voyons maintenant ce qui se passe pour $b^2 = c^2 = 1$.

La fonction R_i se réduit à $A(\rho^2 - 1)^{\frac{h}{2}} D^{h+n}(\rho^2 - 1)^n$, h étant un entier plus petit que n. En particulier R_1 se réduit à $(\rho^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Il résulte de là que si h n'est pas nul, l'équation (3) est satisfaite pour $\rho^2 = 1$. Par conséquent pour $b^2 = c^2$, K_i devient nul et égal à H.

Au contraire si $h = 0$, R_i se réduit à $AD^n(\rho^2 - 1)^n$ et K_i est positif et par conséquent plus grand que H.

Si donc h est nul, l'équation $H = K_i$ est satisfaite au moins une fois, et certainement un nombre impair de fois.

Nous pouvons discuter également l'équation

$$(4) \qquad \frac{R_2 S_2}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

Nous devons rechercher d'abord dans quels cas le rapport $\frac{R_i}{R_2}$ est toujours croissant.

Si nous laissons de côté comme il convient les fonctions R_i divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, la fonction R_i peut affecter quatre formes différentes, à savoir

$$R_i = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots(\rho^2 - \alpha_p),$$
$$R_i = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots(\rho^2 - \alpha_{p-1})$$

si $n = 2p$, et

$$R_i = \rho(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots(\rho^2 - \alpha_p),$$
$$R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots(\rho^2 - \alpha_p)$$

si $n = 2p + 1$. Les α sont des quantités positives comprises entre zéro et c^2 et que je suppose rangées dans l'ordre décroissant.

Tous les α étant plus petits que c^2, tous les facteurs $\rho^2 - \alpha$ seront croissants quand ρ^2 croîtra de c^2 à $+\infty$. De même tous les α étant positifs, le rapport

$\frac{\rho^2-\alpha}{\rho}$ sera constamment croissant. Enfin le rapport $\frac{\rho^2-\alpha}{\sqrt{\rho^2-b^2}}$ sera croissant si α est plus grand que b^2.

Dans les quatre cas possibles, nous pourrons écrire

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2-\alpha_1}{\sqrt{\rho^2-b^2}}\,\frac{\rho^2-\alpha_2}{\rho}(\rho^2-\alpha_3)\ldots(\rho^2-\alpha_p),$$

$$\frac{R_i}{R_2} = (\rho^2-\alpha_1)(\rho^2-\alpha_2)\ldots(\rho^2-\alpha_{p-1}),$$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2-\alpha_1}{\sqrt{\rho^2-b^2}}(\rho^2-\alpha_2)\ldots(\rho^2-\alpha_p),$$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2-\alpha_1}{\rho}(\rho^2-\alpha_2)\ldots(\rho^2-\alpha_p).$$

Tous ces facteurs seront croissants si α_1 est plus grand que b^2, ou bien encore si R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2-b^2}$. Dans ces deux cas le rapport $\frac{R_i}{R_2}$ sera toujours croissant.

Il suit de là que l'équation (4) ne pourra avoir de racine que si R_i n'est pas divisible par $\sqrt{\rho^2-b^2}$ et a tous ses zéros inférieurs à b^2. Les seules fonctions R_i qui satisfassent à ces conditions, sont celles que nous avons représentées par la notation $R^1_{0,n}$ et qui pour $b^2=c^2=1$ se réduisent à $AD^n(\rho^2-1)^n$. Les équations (2) ne peuvent donc être satisfaites si R_i n'est pas égal à $R^1_{0,n}$, et si $R_i = R^1_{0,n}$, nous avons vu qu'elle peuvent toujours l'être.

Il resterait à établir qu'elles ne peuvent l'être que d'une seule manière.

Bien que diverses raisons me fassent penser qu'il en est probablement ainsi, je n'ai pu encore le démontrer rigoureusement. Il y aurait surtout intérêt à établir cette proposition en ce qui concerne la plus simple de toutes les fonctions $R^1_{0,n}$, c'est-à-dire en ce qui concerne

$$R^1_{0,2} = \frac{1}{5}\rho\left[5\rho^2-2(b^2+c^2)+\sqrt{4b^4-7b^2c^2+4c^4}\right].$$

Il faudrait pour cela des calculs qui seraient sans doute fort longs, mais qui ne seraient pas inextricables.

Soit C_n le coefficient de stabilité qui s'annule quand les équations

$$\frac{R_1S_1}{3} = \frac{R_2S_2}{5} = \frac{R^1_{0,n}S^1_{0,n}}{2n+1}$$

sont satisfaites.

Supposons que b^2 croisse depuis zéro jusqu'à 1; nous verrons tous les coefficients C_n s'annuler successivement.

On peut se demander quel est celui qui s'annule le premier. Je vais démontrer que c'est C_3.

Il suffira pour montrer qu'il en est ainsi, d'établir que le rapport $\frac{R^1_{0,n}}{R^1_{0,p}}$ (où $n > p$) est toujours croissant quand ρ^2 croît de c^2 à l'infini.

On le vérifie aisément quand $b^2 = 0$ et quand $b^2 = c^2$.

Supposons maintenant que b^2 soit quelconque. Soient B_n et B_p les valeurs de B qui correspondent aux fonctions $R^1_{0,n}$ et $R^1_{0,p}$. Pour que le rapport $\frac{R^1_{0,n}}{R^1_{0,p}}$ ne fût pas constamment croissant, il faudrait, comme on l'a vu au paragraphe X, que l'équation en ρ^2

$$\psi = [n(n+1) - p(p+1)]\rho^2 - (B_n - B_p) = 0$$

eût une racine supérieure à c^2. Je dis que cela est impossible.

En effet l'expression suivante :

$$R^1_{0,p}\frac{dR^1_{0,n}}{d\varepsilon} - R^1_{0,n}\frac{dR^1_{0,p}}{d\varepsilon}$$

s'annule pour $\rho^2 = b^2$ et pour $\rho^2 = c^2$; car ces valeurs annulent à la fois $\frac{dR^1_{0,n}}{d\varepsilon}$ et $\frac{dR^1_{0,p}}{d\varepsilon}$.

Il faut donc que dans l'intervalle compris entre b^2 et c^2, l'expression

$$R^1_{0,p}\frac{d^2R^1_{0,n}}{d\varepsilon^2} - R^1_{0,n}\frac{d^2R^1_{0,p}}{d\varepsilon^2} = \psi R^1_{0,n}R^1_{0,p}$$

s'annule au moins une fois. Or $R^1_{0,n}$ et $R^1_{0,p}$ ne peuvent s'annuler puisque tous leurs zéros sont inférieurs à b^2. Donc ψ devra s'annuler pour une valeur de ρ^2 comprise entre b^2 et c^2; cette expression, qui est du premier degré en ρ^2 ne pourra donc pas s'annuler pour une valeur ρ^2 plus grande que c^2.

C. Q. F. D.

Nous devons donc conclure que C_3 est le premier coefficient qui s'annule.

Les ellipsoïdes de Jacobi pour lesquels un des coefficients C_n s'annule sont des ellipsoïdes de bifurcation. A chacun de ces coefficients correspond donc une nouvelle série linéaire de formes d'équilibre. Que savons-nous sur les figures qui font partie de ces différentes séries linéaires?

Soit ω_n la valeur de la vitesse angulaire pour laquelle le coefficient C_n s'annule; soit ε une quantité infiniment petite. Pour la vitesse angulaire $\omega_n + \varepsilon$, il y aura deux figures d'équilibre possibles, à savoir un ellipsoïde et une surface S qui en diffère infiniment peu et qui a pour équation

$$\zeta = \theta l M^1_{0,n} N^1_{0,n}. \tag{5}$$

Dans cette équation, ζ, θ et l ont la même signification que dans le paragraphe précédent, et $M^1_{0,n}$, $N^1_{0,n}$ sont les fonctions conjuguées de $R^1_{0,n}$. La fonction $M^1_{0,n}$ ne contient en facteur ni $\sqrt{c^2-\mu^2}$ ni $\sqrt{\mu^2-b^2}$; de même la fonction $N^1_{0,n}$ ne contient en facteur ni $\sqrt{c^2-\nu^2}$ ni $\sqrt{b^2-\nu^2}$. Donc ζ ne change pas quand un de ces quatre radicaux change de signe, c'est-à-dire quand y se change en $-y$, ou bien z en $-z$.

Cela veut dire que les plans des xz et des xy sont des plans de symétrie de la surface S.

Si maintenant n est pair, $M^1_{0,n}$, $N^1_{0,n}$, et par conséquent ζ ne changent pas quand on change μ en $-\mu$ ou ν en $-\nu$; cela revient à dire que ζ ne change pas quand on change x en $-x$ ou que la surface S est symétrique par rapport au plan des yz.

Cette symétrie n'a pas lieu si n est impair; ζ se change alors en $-\zeta$ quand x se change en $-x$.

Ainsi la surface S admet, si n est pair, les mêmes plans de symétrie que l'ellipsoïde dont elle dérive, et si n est impair, elle n'est symétrique que par rapport aux plans qui sont perpendiculaires au petit axe et à l'axe moyen. Dans tous les cas, elle est symétrique par rapport au grand axe.

Ce grand axe n'est pas l'axe de rotation et si n est impair, la surface S n'est pas symétrique par rapport à l'axe de rotation. Il est vrai que l'équation (5) sur laquelle nous venons de nous appuyer pour établir ces résultats n'est qu'approximative et qu'on y a négligé les quantités de l'ordre de θ^2. Mais on montrerait par un raisonnement, de tout point semblable à celui du paragraphe précédent, que les symétries auxquelles nous conduit l'équation approximative (5) subsisteraient encore si on la remplaçait par l'équation exacte de la surface S.

Cette surface a donc *rigoureusement* deux plans de symétrie si n est impair, et trois si n est pair.

Parmi les surfaces S, nous distinguerons la surface Σ_3 qui correspond au coefficient de stabilité C_3. Quelle est son intersection avec l'ellipsoïde dont elle dérive? Pour avoir cette courbe, il suffit d'écrire que ζ est nul, ou que

$$M^1_{0,3}=0, \qquad N^1_{0,3}=0,$$

ce qui donne

$$\mu=0, \qquad \nu=0, \qquad \nu=\pm\sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-\sqrt{4b^4-7b^2c^2+4c^4}}{5}}.$$

Cette intersection se compose donc de l'ellipse principale, section de l'ellipsoïde par le plan des yz, et de deux lignes de courbure de cet ellipsoïde.
Cela n'est vrai, bien entendu, qu'approximativement et en négligeant le carré de θ.

La figure représente en projection sur l'un des deux plans de symétrie la surface Σ_3 et l'ellipsoïde dont elle dérive.

Le contour apparent de l'ellipsoïde est representé en trait pointillé, le contour apparent de Σ_3 et l'intersection des deux surfaces en trait plein. On a couvert de hachures la portion de la surface Σ_3 qui est vue à travers l'ellipsoïde.

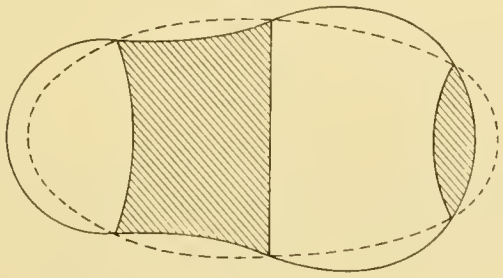

Fig. 1.

On voit d'après cette figure comment on passe de l'ellipsoïde de Jacobi à la surface Σ_3. La plus grande portion de la matière semble se rapprocher de la forme sphérique, tandis que la plus petite portion de cette même matière sort de l'ellipsoïde par l'extrémité du grand axe, comme si elle voulait se séparer de la masse principale. Qu'on me pardonne d'employer un langage aussi dépourvu de précision mathématique.

XIII. — **Petits mouvements d'un ellipsoïde.**

Imaginons d'abord une masse fluide homogène rapportée à des axes fixes; et supposons que ses molécules s'attirent suivant la loi de Newton et que chacune d'elles soit soumise en outre à une force dont les composantes suivant les trois axes soient αx, βy et γz. Les coefficients α, β et γ devront être choisis de telle sorte que la masse soit en équilibre absolu sous la forme de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Supposons maintenant que la masse soit dérangée de cette position d'équilibre,

de telle façon que les coordonnées de la molécule (x, y, z) deviennent $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Nous imaginerons que δx, δy, δz sont tels que

$$\delta x\, dx + \delta y\, dy + \delta z\, dz = d\varphi$$

soit une différentielle exacte et que

$$\delta x = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad \delta y = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad \delta z = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Pour l'équation de continuité, nous devons avoir

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

de sorte que nous pourrons écrire

$$\varphi = \Sigma \xi \mathrm{RMN},$$

les ξ étant divers coefficients constants et R, M, N étant les fonctions de Lamé.

Les composantes de la vitesse de la molécule (x, y, z) sont

$$u = \frac{d^2\varphi}{dx\, dt}, \qquad v = \frac{d^2\varphi}{dy\, dt}, \qquad w = \frac{d^2\varphi}{dz\, dt}.$$

La demi-force vive T aura alors pour expression

$$\frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments du volume de l'ellipsoïde. Mais en vertu du théorème de Green, cette intégrale peut être remplacée par la suivante :

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{dt}(u\, dy\, dz + v\, dx\, dz + w\, dx\, dy)$$

en tenant compte de l'équation de continuité, ou bien encore

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d^2\varphi}{dt\, dn}\, d\omega.$$

Dans cette expression $d\omega$ désigne un élément quelconque de la superficie de l'ellipsoïde et $\frac{d^2\varphi}{dt\, dn}\, dn$ est l'accroissement de la fonction $\frac{d\varphi}{dt}$ quand le point correspondant subit un déplacement dn dans une direction normale à l'ellipsoïde.

Cherchons à évaluer $\frac{d^2\varphi}{dt\, dn}$. Nous trouverons

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum \frac{d\xi}{dt}\mathrm{RMN} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\varphi}{dt\, dn} = \sum \frac{d\xi}{dt}\mathrm{MN}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\frac{d\rho}{dn}.$$

Or on a

$$\frac{d\rho}{dn} = l\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

l ayant la même signification que dans les paragraphes précédents.

On en conclut

$$T = \frac{1}{2}\sum\int\left(\frac{d\xi}{dt}RMN\right)\left(\frac{d\xi_1}{dt}\frac{dR_1}{d\rho}M_1N_1\right)l\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,d\omega,$$

la fonction de Lamé M_1 pouvant être identique ou non identique à la fonction M et la sommation indiquée par le signe Σ s'étendant à tous les systèmes de fonctions de Lamé M et M_1.

Mais si l'on tient compte de l'équation

$$\int lMNM_1N_1\,d\omega = 0 \qquad (M \neq M_1),$$

il viendra simplement

$$T = \frac{1}{2}\sum\left[\frac{d\xi^2}{dt^2}R\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\int lM^2N^2\,d\omega\right].$$

Soit maintenant U l'énergie potentielle de la masse fluide dans une position quelconque et U_0 la valeur de cette énergie dans la position d'équilibre. Nous avons vu au paragraphe IX que l'on a

$$U = U_0 - 2\pi\Sigma A^2\left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right)\int lM^2N^2\,d\omega.$$

Ici n désigne l'ordre de la fonction R, g est la force normale qui agit en un point quelconque de la surface de l'ellipsoïde. Enfin on suppose que le déplacement d'une molécule quelconque de cette surface, estimé normalement à l'ellipsoïde a pour expression $\Sigma AlMN$. Dans le cas qui nous occupe, ce déplacement est égal à $\frac{d\rho}{dn}$ on à

$$\Sigma\xi MN\frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dn} = \Sigma\xi lMN\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

d'où

$$A = \xi\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

et

$$U = U_0 - \Sigma 2\pi\xi^2\frac{dR^2}{d\rho^2}(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right)\int lM^2N^2\,d\omega.$$

Les équations du mouvement seront

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dT}{d\left(\frac{d\xi}{dt}\right)}\right] = \frac{dU}{d\xi},$$

ce qui donne

$$(1)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}\,\mathrm{R} = -4\pi\xi\,\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}\left(gl-\frac{\mathrm{RS}}{2n+1}\right).$$

Cette équation montre, ce que nous savions déjà, que l'équilibre est stable pourvu que tous les coefficients $gl - \frac{\mathrm{RS}}{2n+1}$ soient positifs, et elle nous apprend en même temps à calculer les périodes des oscillations infiniment petites de notre masse fluide.

Avant d'aller plus loin, nous allons calculer en restant dans l'hypothèse précédente le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z. Nous représenterons ce moment par la lettre $\mathfrak{M}$.

Nous aurons

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \int\left[(y+\delta y)\frac{d\,\delta x}{dt} - (x+\delta x)\frac{d\,\delta y}{dt}\right]dx\,dy\,dz,$$

où

$$\mathfrak{M}_1 = \int\left(y\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - x\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \int\left(\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}\right)dx\,dy\,dz.$$

Le premier terme $\mathfrak{M}_1$ peut se calculer immédiatement. Le théorème de Green donne en effet

$$\mathfrak{M}_1 = \int\frac{d\varphi}{dt}\,d\omega(y\cos\alpha - x\cos\beta),$$

$d\omega$ désignant toujours un élément de la surface de l'ellipsoïde, et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ étant les cosinus directeurs de la normale.

On trouve alors

$$y\cos\alpha - x\cos\beta = kl\,\mathrm{M}_2\mathrm{N}_2,$$

où M_2 et N_2 désignent comme dans le paragraphe précédent deux fonctions de Lamé conjuguées : $\mu\sqrt{\mu^2-b^2}$ et $\nu\sqrt{b^2-\nu^2}$ et k un coefficient dépendant seulement de ρ et égal à $-c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}$.

Si l'on appelle ξ_2 le coefficient de $\mathrm{R}_2\mathrm{M}_2\mathrm{N}_2$ dans l'expression de φ, il reste simplement

$$\mathfrak{M}_1 = -k\frac{d\xi_2}{dt}\,\mathrm{R}_2\int l\,\mathrm{M}_2^2\,\mathrm{N}_2^2\,d\omega.$$

Calculons maintenant $\mathfrak{M}_2$; le théorème de Green nous donnera encore

$$\mathfrak{M}_2 = \int\frac{d\varphi}{dt}\,d\omega\left(\frac{d\varphi}{dy}\cos\alpha - \frac{d\varphi}{dx}\cos\beta\right).$$

Nous allons nous occuper de calculer le facteur

$$F = \frac{d\varphi}{dy}\cos\alpha - \frac{d\varphi}{dx}\cos\beta.$$

Nous remarquerons pour cela que si l'on pose avec Liouville

$$P = l\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2},$$

on a

$$\cos\alpha = \frac{Px}{\rho^2}, \qquad \cos\beta = \frac{Py}{\rho^2 - b^2}, \qquad \cos\gamma = \frac{Pz}{\rho^2 - c^2},$$

ce qui donne

$$F = l\sqrt{\rho^2 - c^2}\left(\frac{x\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{y\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Nous pouvons encore exprimer F d'une autre manière. Donnons à x, y et z des accroissements

$$\delta x = -\delta s\frac{y}{\rho^2 - b^2}, \qquad \delta y = \delta s\frac{x}{\rho^2}, \qquad \delta z = 0,$$

il en résultera pour la fonction φ un accroissement $\delta\varphi$ et l'on aura

$$F = l\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\frac{\delta\varphi}{\delta s}.$$

Il importe de remarquer que si le point (x, y, z) est sur l'ellipsoïde, il en est de même du point infiniment voisin $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$.

Nous allons maintenant utiliser une remarque de Liouville, grâce à laquelle les fonctions de Lamé peuvent être ramenées aux fonctions sphériques.

Soit $\varphi = RMN$ le produit de trois fonctions de Lamé conjuguées d'ordre n. Changeons de variables en posant

$$X = \frac{x}{\rho}, \qquad Y = \frac{y}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad Z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Si le point (x, y, z) se trouve sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

le point correspondant (X, Y, Z) se trouvera sur la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

et pour tous les points de cette sphère, la fonction φ sera égale à une constante multipliée par une fonction sphérique de degré n. Nous pourrons écrire $\varphi = \varepsilon\psi$, ψ étant un polynome homogène de degré n en X, Y et Z et satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dX^2} + \frac{d^2\psi}{dY^2} + \frac{d^2\psi}{dZ^2} = 0,$$

et ε étant une fonction de X, Y et Z qui est constante en tous les points de la sphère de rayon 1.

Nous aurons d'autre part

$$\delta X = \frac{\delta x}{\rho} = -\delta s \frac{y}{\rho(\rho^2 - b^2)} = -\delta s \frac{Y}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}},$$

et de même

$$\delta Y = \delta s \frac{X}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad \delta Z = 0.$$

On aura dans les mêmes conditions

$$\delta\varepsilon = 0, \qquad \delta\varphi = \varepsilon\,\delta\psi = \varepsilon\left(\frac{d\psi}{dX}\delta X + \frac{d\psi}{dY}\delta Y\right),$$

d'où

$$\frac{\delta\varphi}{\delta s} = \frac{\varepsilon}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}\left(X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}\right)$$

et enfin

$$F = l\varepsilon\sqrt{\rho^2 - c^2}\left(X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}\right).$$

Il est aisé de vérifier que si ψ est un polynome homogène de degré u en x, y et z, satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dX^2} + \frac{d^2\psi}{dY^2} + \frac{d^2\psi}{dZ^2} = 0,$$

il en sera de même de

$$X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}.$$

Il en résulte que si φ est égal à une constante multipliée par le produit de trois fonctions de Lamé conjuguées et d'ordre n, F sera de la forme suivante :

$$F = l(\alpha_1 M'_1 N'_1 + \alpha_2 M'_2 N'_2 + \ldots + \alpha_p M'_p N'_p).$$

Dans cette expression, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des quantités qui restent constantes *sur toute la surface de notre ellipsoïde* et M'_1, N'_1; $M'_2, N'_2, \ldots$; M'_p, N'_p sont des systèmes de fonctions de Lamé conjuguées et *qui sont toutes d'ordre n*.

Nous dirons pour abréger qu'une somme de la forme

$$\alpha_1 M'_1 N'_1 + \alpha_2 M'_2 N'_2 + \ldots + \alpha_p M'_p N'_p$$

est une somme de Lamé d'ordre n.

Si alors nous avons, comme nous l'avons supposé plus haut

$$\varphi = \Sigma\xi_i R_i M_i N_i,$$

il viendra

$$F = l\Sigma\xi_i H_i,$$

H_i étant une somme de Lamé de même ordre que les fonctions R, M, N. Ainsi les coefficients d'une même indéterminée ξ seront de même ordre dans l'expression de φ et dans celle de F.

Il vient alors

$$\mathfrak{M}_2 = \int F \frac{d\varphi}{dt} d\omega = \Sigma R_k \xi_i \frac{d\xi_k}{dt} \int l H_i M_k N_k \, d\omega.$$

Remarquons que l'intégrale $\int l H_i M_k N_k \, d\omega$ est nulle si les sommes H_i et $M_k N_k$ ne sont pas de même ordre.

Nous dirons pour abréger que l'indéterminée ξ_i est de rang n si les fonctions R_i, M_i et N_i sont d'ordre n.

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\mathfrak{M}_2 = \Sigma A_{ik} \xi_i \frac{d\xi_k}{dt},$$

les A_{ik} étant des coefficients constants qui sont nuls si les indéterminées ξ_i et ξ_k ne sont pas de même rang.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des petits mouvements absolus d'un ellipsoïde rapporté à deux axes fixes. Passons maintenant au cas des petits mouvements relatifs d'un ellipsoïde fluide rapporté à un système d'axes mobiles tournant avec une vitesse uniforme ω autour de l'axe des z.

Envisageons les équations générales de l'Hydrodynamique :

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} = X - \frac{dp}{dx},$$

où u, v, w désignent les composantes de la vitesse; X, Y, Z les composantes de la force; p la pression, et où la densité de fluide est prise pour unité. Nous aurons d'ailleurs

$$X = \frac{dV}{dx} - 2\omega v, \qquad Y = \frac{dV}{dy} + 2\omega u. \qquad Z = \frac{dV}{dz};$$

où V représente le potentiel des forces et où $-\omega v$ et ωu sont les composantes de la force centrifuge composée. Si nous posons

$$V - p = \psi$$

et si nous négligeons le carré de u, v, w en observant que les mouvements doivent être très petits, il viendra

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} + 2\omega v = \frac{d\psi}{dx}, \qquad \frac{dv}{dt} - 2\omega u = \frac{d\psi}{dy}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{d\psi}{dz},$$

avec l'équation de continuité

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

On en tire aisément

$$(3) \qquad \frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} = 4\omega^2 \frac{d^2\psi}{dz^2}.$$

Cette équation ne suffit pas pour déterminer la fonction ψ. Il faut pour achever de connaître cette fonction, tenir compte de cette circonstance que la pression doit être nulle sur toute la surface libre. On doit donc avoir sur cette surface $\psi = V$.

Pour pousser plus loin cette analyse, envisageons séparément un des mouvements élémentaires dans lesquels on peut décomposer tous les petits mouvements de l'ellipsoïde. Soient δx, δy, δz les déplacements infiniment petits d'une molécule et écrivons

$$\delta x = e^{i\lambda t}\xi, \qquad \delta y = e^{i\lambda t}\eta, \qquad \delta z = e^{i\lambda t}\zeta;$$

ξ, η et ζ ne dépendent que de x, y et z. Les équations (2) et (3) deviendront alors

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} -\xi\lambda^2 + 2\omega i\lambda\eta &= \frac{d\psi_1}{dx} \\ -\eta\lambda^2 + 2\omega i\lambda\xi &= \frac{d\psi_1}{dy} \\ -\zeta\lambda^2 \qquad\quad &= \frac{d\psi_1}{dz} \\ \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\psi_1}{dy^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{d^2\psi_1}{dz^2} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad (\psi = e^{i\lambda t}\psi_1);$$

où ψ_1 ne dépend que de x, y et z.

Voyons maintenant ce que devient la condition relative à la surface libre.

Soient $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les trois cosinus directeurs de la normale en un point de l'ellipsoïde et supposons que l'on ait en tous les points de cette surface

$$\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma = \Sigma A_k l M_k N_k,$$

le second membre étant une série développée suivant les produits $M_k N_k$ de deux fonctions de Lamé conjuguées. Une formule du paragraphe IX nous donnera, en tous les points de la surface libre,

$$V = -4\pi e^{i\lambda t}\Sigma A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right) M_k N_k.$$

L'équation $\psi = V$ se réduit donc à

$$(5) \qquad \psi_1 = -4\pi\Sigma A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right) M_k N_k.$$

D'autre part les équations (4) nous donnent

$$\xi = -\frac{\frac{d\psi_1}{dx}\lambda + 2\frac{d\psi_1}{dy}\omega i}{\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)}, \qquad \eta = -\frac{\frac{d\psi_1}{dy}\lambda - 2\frac{d\psi_1}{dx}\omega i}{\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)}, \qquad \zeta = -\frac{\frac{d\psi_1}{dz}}{\lambda^2};$$

d'où

$$\frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{l}(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)$$
$$= \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{\cos\alpha}{l} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{\cos\beta}{l} + \frac{d\psi_1}{dz}\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\cos\gamma}{l}\right] + 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{\cos\alpha}{l} + \frac{d\psi_1}{dx}\frac{\cos\beta}{l}\right].$$

Mais nous avons trouvé plus haut

$$\frac{\cos\alpha}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\frac{x}{\rho^2},$$
$$\frac{\cos\beta}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\frac{y}{\rho^2 - b^2},$$
$$\frac{\cos\gamma}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\frac{z}{\rho^2 - c^2};$$

d'où

$$\frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{l\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)$$
$$= \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{\rho^2 - c^2}\right] + 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2}\right]$$

ou enfin

$$(6) \qquad \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{\rho^2 - c^2}\right]$$
$$+ 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2}\right] = \frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}\Sigma A_k M_k N_k.$$

Le problème est donc ramené à la recherche d'une fonction ψ_1 qui satisfasse à la dernière des équations (4) à l'intérieur de l'ellipsoïde et aux équations (5) et (6) sur la surface de l'ellipsoïde.

Supposons donc d'abord que ω soit nul; la dernière équation (4) se réduira à $\Delta\psi_1 = 0$, de sorte que nous satisferons à la fois aux équations (4) et (5) en faisant

$$\psi_1 = 4\pi\Sigma A_k\left(\frac{R_1^0 S_1^0}{3} - \frac{R_k^0 S_k^0}{2n+1}\right)\frac{R_k M_k N_k}{R_k^0}.$$

Dans cette expression R_k^0 est la valeur que prend R_k sur la surface de l'ellipsoïde.

De cette expression, on déduira pour tous les points de la surface de l'ellipsoïde :

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\frac{z}{\rho^2 - c^2} = 4\pi\Sigma A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right)\frac{\frac{dR_k}{d\rho}}{\rho R_k}M_k N_k,$$

de sorte que l'équation (6) se réduit à

$$-4\pi\lambda\Sigma A_k\left(\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_kS_k}{2n+1}\right)\frac{\frac{dR_k}{d\rho}}{\rho R_k}M_kN_k=\frac{-\lambda^3}{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\Sigma A_kM_kN_k.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut et il suffit que tous les coefficients A_k soient nuls, excepté un que nous appellerons A_p, et que λ satisfasse à l'équation

$$4\pi\left(\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_pS_p}{2n+1}\right)\frac{dR_p}{d\rho}\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}-\lambda^2R_p=0.$$

On est donc ainsi conduit pour les périodes des diverses petites oscillations possibles aux mêmes valeurs que par l'équation (1).

Nous allons maintenant supposer que ω n'est pas nul.

Posons

$$1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}=\tau^2,\qquad z=\tau z',$$

la dernière des équations (4) deviendra

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{d^2\psi_1}{dy^2}+\frac{d^2\psi_1}{dz'^2}=0.$$

Quand le point (x, y, z) décrira l'ellipsoïde E qui a pour équation

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

le point (x, y, z') décrira l'ellipsoïde E′ qui a pour équation

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{\tau^2z'^2}{\rho^2-c^2}=1.$$

Nous appellerons R′, M′ et N′ les fonctions de Lamé formées à l'aide de l'ellipsoïde E′, et l' la quantité qui joue par rapport à l'ellipsoïde E′ le même rôle que l joue par rapport à l'ellipsoïde E.

Nous appellerons $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface de E′. Nous poserons de même

$$\rho^2-c'^2=\frac{\rho^2-c^2}{\tau^2}\qquad\text{et}\qquad P'=l'\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c'^2)},$$

de même que l'on a, d'après les notations de Liouville :

$$P=l\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}.$$

Il viendra alors pour un point de la surface de E′ :

$$\frac{\cos\alpha'}{P'} = \frac{x}{\rho^2}, \qquad \frac{\cos\beta'}{P'} = \frac{y}{\rho^2 - b^2}, \qquad \frac{\cos\gamma'}{P'} = \frac{z}{\rho^2 - c'^2} = \frac{\tau^2 z}{\rho^2 - c^2};$$

d'où

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\frac{\tau^2 z}{\rho^2 - c^2} = \frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dx}\cos\alpha' + \frac{d\psi_1}{dy}\cos\beta' + \frac{d\psi_1}{dz}\cos\gamma'\right),$$

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = \frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dy}\cos\alpha' - \frac{d\psi_1}{dx}\cos\beta'\right).$$

Considérons maintenant un point quelconque de l'ellipsoïde E ayant pour coordonnées elliptiques μ et ν et pour coordonnées ordinaires x, y et z; considérons ensuite le point correspondant de l'ellipsoïde E′ ayant pour coordonnées ordinaires x, y et $z' = \frac{z}{\tau}$ et pour coordonnées elliptiques μ' et ν' (dans le système dérivé de l'ellipsoïde E′). Soit M'_q une fonction quelconque de Lamé de la coordonnée μ' et N'_q la fonction conjuguée de la coordonnée ν'. A chaque point de E correspond comme nous l'avons vu un point de E′ et réciproquement. A chaque système de valeurs de μ et ν correspond donc un système de valeurs de μ' et ν' et réciproquement, de sorte que le produit $M'_q N'_q$ qui dépend de μ' et ν' pourra aussi être regardé comme fonction de μ et ν; à ce titre, il pourra être développé en une série ordonnée suivant les produits de Lamé $M_k N_k$ dérivés de l'ellipsoïde E. On aura donc

$$M'_q N'_q = \Sigma B_{k,q} M_k N_k. \tag{7}$$

Nous allons maintenant, à l'aide de la remarque de Liouville dont nous avons déjà fait usage plus haut, montrer que dans le second membre de l'identité (7) n'entrent que des fonctions de Lamé de même ordre que M'_q.

En effet, d'après cette remarque de Liouville, si l'on pose

$$X = \frac{x}{\rho}, \qquad Y = \frac{y}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad Z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 - c'^2}},$$

le produit $M'_q N'_q$ sera sur la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

une fonction sphérique de même ordre que M'_q et le produit $M_k N_k$ une fonction sphérique de même ordre que M_k. L'identité (7) ne peut donc subsister que si toutes les fonctions de Lamé qui entrent dans le second membre sont de même ordre que M'_q.

Ce second membre n'est donc pas une série infinie, mais un polynome formé d'un nombre fini de termes.

De plus dans ce second membre ne peuvent entrer que des fonctions de Lamé présentant les mêmes symétries que M'_q. Si par exemple M'_q est divisible par $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, il devra en être de même de toutes les fonctions M_k.

Nous renverserons l'identité (7) en écrivant

$$M_k N_k = \Sigma C_{k,q} M'_q N'_q.$$

La fonction ψ_1 devant satisfaire à la dernière des équations (4) pourra s'écrire

$$\psi_1 = \Sigma D_q R'_q M'_q N'_q,$$

les D_q étant des coefficients constants et les R'_q, M'_q, N'_q étant des fonctions de Lamé dérivées de l'ellipsoïde E'.

A la surface de cet ellipsoïde, nous aurons

$$\psi_1 = \Sigma\Sigma D_q B_{k,q} R'_q M_k N_k$$

en tenant compte de (7), de sorte que l'équation (5) se ramènera aux équations

$$(8) \qquad -4\pi A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right) = \sum_q D_q B_{k,q} R'_q.$$

On a d'autre part à la surface de E' :

$$\frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dx}\cos\alpha' + \frac{d\psi_1}{dy}\cos\beta' + \frac{d\psi_1}{dz}\cos\gamma'\right) = \Sigma D_q \frac{dR'_q}{\rho\, d\rho} M'_q N'_q.$$

D'autre part il résulte de l'analyse faite plus haut à propos des moments des quantités de mouvement que l'on a sur toute la surface de E' :

$$\frac{d(R'_q M'_q N'_q)}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d(R'_q M'_q N'_q)}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = \Sigma F_{q,k} M'_k N'_k,$$

les F étant des constantes et les M'_k et N'_k des fonctions de Lamé de même ordre que M'_q, mais ne présentant pas les mêmes symétries. Si M'_q contient en facteur $\sqrt{\mu'^2 - c'^2}$, il en est de même de M'_k et réciproquement, mais si M'_q contient en facteur $\sqrt{\mu'^2 - b'^2}$, M'_k ne le contiendra pas et inversement.

Nous écrirons en tenant compte de (7)

$$\Sigma F_{q,k} M'_k N'_k = \Sigma G_{q,k} M_k N_k,$$

ce qui donnera enfin

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = \Sigma\Sigma D_q G_{q,k} M_k N_k.$$

L'équation (6) se ramène alors aux égalités

$$(9) \qquad \frac{A_k \lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \lambda \sum_q D_q B_{k,q} \frac{dR'_q}{\rho\, d\rho} + 2\omega i \Sigma_q D_q G_{q,k}.$$

Il s'agit maintenant de disposer de λ, des D_q et des A_k de façon à satisfaire aux égalités (8) et (9).

Or on pourra arriver à ce résultat en supposant d'abord que tous les A_k et tous les D_q sont nuls, sauf ceux qui se rapportent à des fonctions de Lamé d'un certain ordre, d'ordre n par exemple. Il restera alors $2n+1$ équations (8) et $2n+1$ équations (9) entre λ, les $2n+1$ coefficients A_k et les $2n+1$ coefficients D_q qui se rapportent aux fonctions de Lamé d'ordre n et qui par conséquent ne sont pas nuls, d'après la convention précédente. Cela fait en tout $4n+2$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $4n+2$ coefficients A_k et D_q.

Si l'on élimine ces $4n+2$ coefficients entre ces $4n+2$ équations par le moyen d'un déterminant, on obtiendra une équation qui déterminera les périodes λ des oscillations infiniment petites de l'ellipsoïde. Il importe de remarquer que λ n'entrera pas dans cette équation seulement explicitement, mais que les coefficients $B_{k,q}$, $G_{q,k}$, $\frac{dR'_q}{d\rho}$, R'_q qui entrent également dans cette équation dépendent de λ. Néanmoins, même en tenant compte de cette circonstance, l'équation est algébrique en λ.

Il y aura une infinité de pareilles équations en λ que l'on obtiendra en considérant successivement les fonctions de Lamé du deuxième, du troisième, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre, etc. Pour la stabilité il faut et il suffit qu'aucune de ces équations n'ait de racine imaginaire.

Ce qu'il faut surtout retenir, c'est que dans un même système d'équations (8) et (9) n'entrent que les coefficients qui se rapportent aux fonctions de Lamé d'un même ordre.

Si donc nous écrivons la valeur de ψ relative à une oscillation infiniment petite obtenue en considérant l'une des solutions d'un système d'équations (8) et (9), on trouvera

$$\psi = e^{\lambda it} \Sigma D_q M'_q N'_q R'_q.$$

Dans la somme du second membre n'entrent que des fonctions de Lamé d'un même ordre, d'ordre n par exemple. Une pareille oscillation infiniment petite s'appellera un mouvement harmonique d'ordre n.

Il résulte de ce qui précède que deux mouvements harmoniques d'ordres différents sont indépendants l'un de l'autre, c'est-à-dire que l'on peut imposer à la masse fluide, comme liaison, la condition de ne pouvoir éprouver d'autres

déplacements que des mouvements harmoniques d'ordre n sans que les $2n+1$ mouvements harmoniques d'ordre n possible soient altérés.

Nous pouvons encore énoncer ce résultat d'une autre manière.

Dans un mouvement harmonique d'ordre n, on a sur la surface de l'ellipsoïde de E :

$$V = \psi = e^{\lambda it} \Sigma A_k M_k N_k,$$

M_k et N_k étant des fonctions de Lamé d'ordre n et les A_k des coefficients constants. Sur la surface de cet ellipsoïde, le potentiel V s'exprime donc par une somme de Lamé d'ordre n.

Imposons-nous donc la liaison suivante : que les déplacements de notre masse fluide soient toujours tels que le potentiel s'exprime à la surface libre par une somme de Lamé d'ordre n. En tenant compte de cette liaison, on trouvera que certaines petites oscillations de la masse sont possibles. On cherchera tous les systèmes d'oscillations possibles en supposant que la valeur de V à la surface soit assujettie à être une somme de Lamé d'ordre 2, 3, ..., n, ... ; on composera ensuite tous ces systèmes d'oscillations, d'après la règle ordinaire de la composition des petits mouvements, et l'on obtiendra de la sorte tous les petits mouvements possibles du système, en le supposant délivré de toutes ses liaisons.

Mais il y a plus. J'ai dit que dans une même équation (8) ou dans une même équation (9) ne peuvent entrer que des coefficients A_k et D_q se rapportant à des fonctions de Lamé d'un même ordre. On peut ajouter que dans une même équation (8) ou dans une même équation (9) ne peuvent entrer que des A_k et des D_q se rapportant tous à des fonctions de Lamé qui ont comme facteur $\sqrt{c^2-\mu^2}$ ou $\sqrt{c'^2-\mu'^2}$; ou bien des A_k et des D_q se rapportant tous à des fonctions de Lamé qui n'admettent pas ce facteur. Si la fonction M_k ne contient pas le facteur $\sqrt{c^2-\mu^2}$, le produit $M_k N_k$ est symétrique par rapport au plan des xy (c'est-à-dire qu'il ne change pas quand on change z en $-z$), il ne l'est pas dans le cas contraire.

Voici quelle est la conséquence de ce fait. Supposons que l'on cherche à trouver tous les mouvements harmoniques possibles d'ordre n que nous appellerons H. Imposons-nous d'abord la liaison suivante : que la valeur superficielle de V soit une somme de Lamé d'ordre n et symétrique par rapport au plan des xy. Nous trouverons qu'en tenant compte de cette liaison, il y a certaines oscillations possibles H'. Imposons-nous maintenant une autre liaison : que la

valeur superficielle de V soit une somme de Lamé d'ordre n et change de signe avec z. En tenant compte de cette liaison, il y aura certaines oscillations possibles H''. Si nous composons ensuite les oscillations H' et H'' d'après la règle ordinaire de la composition des petits mouvements, nous aurons tous les mouvements H possibles.

Ces règles permettent d'envisager séparément les mouvements harmoniques d'ordre n sans tenir compte des mouvements harmoniques d'ordre différent qui pourraient exister simultanément.

Un cas particulier où les équations (8) et (9) se simplifient considérablement, c'est celui où l'ellipsoïde E et par conséquent l'ellipsoïde E′ sont de révolution. Il arrive alors que tous les coefficients $B_{k,q}$ sont nuls quand k est différent de q et que l'on peut prendre

$$B_{k,k} = 1, \qquad G_{q,k} = F_{q,k}.$$

Une dernière remarque : pour que l'analyse précédente puisse s'appliquer, il faut, à ce que l'on croit d'abord, que l'on ait

$$0 < \frac{\rho^2 - c^2}{\tau^2} < \rho^2 - b^2,$$

ce qui obligerait λ à rester compris entre certaines limites. Cependant il est aisé de voir que ces résultats subsistent quelle que soit l'hypothèse faite sur la valeur de λ. En effet il semble d'abord que les fonctions de Lamé R′, M′ et N′ ne sont définies que lorsque les axes de l'ellipsoïde E′, d'où elles dérivent, sont réels et si l'axe des z est le petit axe dans E′ comme dans E. Mais le produit R′M′N′ est un polynome entier en x, y et z qui est parfaitement défini dans tous les cas possibles et qui jouit toujours des mêmes propriétés.

Si même $\lambda > 2\omega$, c'est-à-dire si τ^2 est négatif et si l'un des axes de E′ devient imaginaire, les résultats de l'analyse précédente subsistent encore.

XIV. — **Stabilité des ellipsoïdes.**

Pour reconnaître si un ellipsoïde de révolution ou un ellipsoïde de Jacobi est stable, il faut se reporter au paragraphe VII. D'après la règle de ce paragraphe, qui était soumise, je le rappelle, à certaines restrictions, une figure d'équilibre ne peut jouir de la stabilité séculaire qu'à la condition que tous les coefficients de stabilité soient négatifs. Si cette règle était applicable sans modifications à l'ellipsoïde de Jacobi, cette figure n'aurait jamais la stabilité séculaire, car un

de ses coefficients de stabilité est toujours positif; c'est celui qui se rapporte à la fonction $R'_{0,2}$. Mais la règle du paragraphe VII n'est applicable, comme nous l'avons vu, que si dans tous les mouvements possibles le travail des résistances passives est toujours négatif sans pouvoir jamais être nul. Ce n'est pas le cas si l'on envisage une masse fluide isolée dans l'espace, car si une pareille masse se déplace sans se déformer, il n'y a pas de résistance passive. Si au contraire la rotation de la masse fluide était déterminée par celle d'un axe rigide qui la traverserait de part en part et qui l'entraînerait par frottement (comme dans les expériences de Plateau par exemple), tout déplacement produirait une résistance passive et l'ellipsoïde de Jacobi serait toujours instable.

Mais ce cas est sans intérêt. Envisageons donc une masse isolée dans l'espace et voyons comment doit être modifiée la règle du paragraphe VII.

Considérons deux systèmes d'axes : un système fixe et un système mobile tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe des z. Supposons que la masse fluide ait une position d'équilibre relatif dans laquelle elle soit animée d'une vitesse de rotation ω par rapport aux axes fixes, et par conséquent en repos par rapport aux axes mobiles. Soit, dans cette position, I_0 son moment d'inertie par rapport à l'axe des z et U_0 son énergie potentielle par rapport aux axes fixes. Considérons maintenant une configuration de la masse fluide voisine de la figure d'équilibre et telle que cette masse cesse d'être en repos par rapport aux axes mobiles. Soient, dans cette nouvelle position, I et U les valeurs du moment d'inertie et de l'énergie potentielle. Soit T la demi-force vive relative par rapport aux axes mobiles; soit m la masse d'un des points du fluide; r sa distance à l'axe des z, et $\omega + \delta\omega$ sa vitesse angulaire autour de cet axe. Les équations de la conservation de l'énergie et de la conservation des moments des quantités de mouvement nous donneront

$$T + \omega \Sigma mr^2 \delta\omega + \frac{\omega^2 I}{2} + U = \frac{\omega^2 I_0}{2} + U_0 + h, \qquad \omega I + \Sigma mr^2 \delta\omega = \omega I_0$$

(h étant une constante qui est très petite si les déplacements initiaux et les vitesses initiales sont très petits ce que nous supposons), d'où

$$T - \frac{\omega^2 I}{2} + U = U_0 - \frac{\omega^2 I_0}{2} + h.$$

Mais on a

$$T > \frac{1}{2} \Sigma mr^2 \delta\omega^2 > \frac{1}{2} \frac{(\Sigma mr^2 \delta\omega)^2}{\Sigma mr^2} = \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I},$$

d'où

$$U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) + \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I} < h.$$

Si donc on a pour toutes les configurations très voisines de la figure d'équilibre

$$(1) \qquad U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) + \frac{\omega^2}{2}\frac{(I - I_0)^2}{I} > 0,$$

on sera certain que l'équilibre est stable. S'il y a des résistances passives, h ne sera pas une constante, mais ira constamment en diminuant; donc *a fortiori*, il y aura encore stabilité si la condition (1) est remplie. Cette condition est donc *suffisante* pour qu'il y ait stabilité séculaire.

D'après la règle du paragraphe VII, la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire était que l'expression $V - \frac{\omega^2 I}{2}$ fût minimum, c'est-à-dire que

$$U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) > 0.$$

On voit que la règle actuelle est plus favorable à la stabilité.

D'ailleurs la condition (1) peut encore s'énoncer d'une autre manière. Elle signifie que l'expression

$$(2) \qquad U + \frac{\omega^2}{2}\frac{I_0^2}{I}$$

doit être minimum pour la figure d'équilibre (*cf.* Tait et Thomson, *Treatise on Natural Philosophy*, § 778'' [j] et [k]).

Il faut voir maintenant si cette condition (1) est nécessaire pour qu'il y ait stabilité séculaire. Nous avons vu au paragraphe VII que les déplacements infiniment petits x_i des diverses molécules d'un système à partir d'une position d'équilibre relatif pouvaient s'exprimer de la façon suivante :

$$x_i = \Sigma A_m [i, m] e^{\lambda_m t},$$

les A_m étant des constantes arbitraires d'intégration, tandis que les $[i, m]$ et les λ_m sont des constantes dépendant des équations différentielles données.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut que tous les λ aient leur partie réelle nulle ou négative.

Plaçons-nous d'abord dans les conditions où la règle du paragraphe VII est applicable, c'est-à-dire où tout déplacement entraîne une résistance passive. Tous les λ devront alors avoir leur partie réelle négative, et tous les x_i tendre vers zéro quand t croîtra indéfiniment. L'expression suivante :

$$\Phi = T + U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0)$$

(si l'on néglige les cubes des x_i, ou ce qui revient au même les cubes des A_m) est une forme quadratique par rapport aux A_m.

Cette forme doit tendre vers zéro quand t croît indéfiniment. Mais d'après la nature même des résistances passives, cette forme doit aller constamment en diminuant. Il faut donc que sa valeur initiale soit toujours positive quelles que soient les constantes arbitraires A_m. La forme Φ est donc toujours définie positive, c'est-à-dire que $U - \frac{\omega^2}{2} I$ doit être minimum dans la position d'équilibre. C'est là la démonstration de la règle du paragraphe VII.

Supposons maintenant que cette règle ne soit plus applicable, c'est-à-dire que certains déplacements n'entraînent pas de résistances passives. Il pourra arriver alors s'il y a stabilité séculaire que parmi les λ_m, il y en ait un certain nombre que j'appellerai les λ_p et dont la partie réelle est nulle, pendant que d'autres que j'appellerai les λ_q auront leur partie réelle négative.

D'après cela la forme Φ ne tendra pas vers zéro, en général, quand t croîtra indéfiniment; elle partira de sa valeur initiale Φ_0 et tendra vers une certaine valeur limite Φ_1 que l'on obtiendra en remplaçant dans Φ_0 tous les A_q par zéro et en conservant aux A_p leurs valeurs initiales. Comme la forme Φ doit aller constamment en diminuant, on devra avoir $\Phi_0 > \Phi_1$ quelles que soient les valeurs des constantes arbitraires A_p et A_q. Pour cela il faut que la forme quadratique Φ soit la somme de deux autres, la première ne contenant que les A_p, la seconde *définie positive* et ne contenant que les A_q.

Si donc dans la forme Φ_0 on annule tous les A_p, cette forme deviendra définie positive.

Dans le cas qui nous occupe, et si nous supposons que le centre de gravité de notre masse soit fixe, il n'y a que trois déplacements qui n'entraînent pas de résistance passive, ce sont les rotations autour des trois axes. Il y a donc au plus six des λ_m dont la partie réelle est nulle; en d'autres termes, il y a au plus six A_p. En réalité, il n'y a que quatre A_p. On obtiendra tous les mouvements pour lesquels tous les A_q sont nuls, en supposant que les diverses molécules de la masse fluide tournent d'un mouvement uniforme, à la façon des différentes parties d'un même corps solide, autour d'un axe quelconque et avec une vitesse quelconque. On obtiendra tous les mouvements pour lesquels tous les A_p sont nuls, en considérant les déplacements de la masse fluide qui sont tels que le moment de la quantité de mouvement relatif par rapport aux axes mobiles soit nul. Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut que la forme Φ soit toujours

positive quand les déplacements initiaux et les vitesses initiales des diverses molécules sont telles que tous les A_p soient nuls, c'est-à-dire que le moment de la quantité de mouvement soit nul. Or il est aisé de voir que cela ne peut avoir lieu que si l'expression (2) est un minimum.

C'est donc là la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire.

L'expression

$$U_0 - U - \frac{\omega^2}{2}(I_0 - I) = T - \Phi$$

est aussi une forme quadratique par rapport aux A_m quand on néglige les cubes de ces quantités. Cette forme peut être réduite en une somme de carrés et ce sont les coefficients de ces carrés que nous avons appelés jusqu'ici coefficients de stabilité. D'après ce qui précède, il convient maintenant d'envisager la forme

$$F = U_0 - U - \frac{\omega^2}{2}(I_0 - I) - \frac{\omega^2}{2}\frac{(I - I_0)^2}{I}.$$

Cette forme peut aussi être réduite en une somme de carrés et j'appellerai les coefficients de ces carrés coefficients de stabilité corrigés. Ils devront être tous négatifs pour la stabilité séculaire.

Supposons que la forme d'équilibre relatif soit un ellipsoïde et que la figure troublée soit définie par la distance ζ d'un point de sa surface à l'ellipsoïde comptée normalement à l'ellipsoïde.

Si l'on a

$$\zeta = \Sigma A_i l M_i N_i,$$

nous avons vu au paragraphe IX que les coefficients de stabilité s'écrivent

$$-\frac{i\pi}{2}\int\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1}\right) l M_i^2 N_i^2 \, d\omega.$$

Il est aisé de voir que si l'on néglige le cube des A_i il viendra

$$-\frac{\omega^2}{2}\frac{(I - I_0)^2}{I} = -(BA + B'A')^2,$$

B et B' étant des coefficients qui ne dépendent que des axes de l'ellipsoïde pendant que A et A' sont les coefficients de $l M^1_{0,2} N^1_{0,2}$ et $l M^1_{2,2} N^1_{2,2}$ dans l'expression de ζ.

Il résulte de là que les coefficients de stabilité corrigés ne différeront pas des coefficients de stabilité primitifs, si l'on excepte ceux qui se rapportent aux fonctions de Lamé $R^1_{0,2}$ et $R^1_{2,2}$. Or si l'on se reporte au paragraphe précédent, on verra que nous pouvons envisager séparément les mouvements harmoniques

des divers ordres, et que pour qu'il y ait stabilité, il faut et il suffit que cette stabilité existe à la fois en ce qui concerne les mouvements harmoniques de chaque ordre.

Mais d'après ce que nous venons de dire des coefficients de stabilité, la règle du paragraphe VII s'appliquera aux mouvements harmoniques de tous les ordres si l'on excepte le second.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire en ce qui concerne les mouvements du $n^{\text{ième}}$ ordre, il faut et il suffit que les coefficients de stabilité corrigés qui se rapportent aux fonctions de Lamé du $n^{\text{ième}}$ ordre soient tous négatifs; or ils ne diffèrent pas des coefficients primitifs si $n > 2$.

Considérons d'abord les mouvements du deuxième ordre; ils ne seront pas altérés, comme nous l'avons vu, si nous nous imposons comme liaison la condition que ces mouvements soient seuls possibles. Cela revient à assujettir la figure de la masse fluide à la condition de rester toujours ellipsoïdale.

Pour que la stabilité soit séculaire, en tenant compte de cette liaison, il faut et il suffit que l'expression

$$(2) \qquad 1 + \frac{\omega^2 I_0^2}{2 I}$$

soit plus grande pour un ellipsoïde quelconque que pour l'ellipsoïde d'équilibre.

L'expression ωI_0 est le moment de la quantité de mouvement; c'est une donnée de la question. Les quantités qui définiront l'ellipsoïde seront deux des axes, a et b; le troisième axe par rapport auquel on prendra les moments d'inertie sera fonction des deux premiers, puisque le volume est supposé donné.

A tout système de valeurs positives de a et b correspond une valeur de (2) qui tend vers une limite nulle ou positive quand l'un des axes a ou b tend vers zéro ou vers l'infini d'une manière quelconque.

Si donc on appelle $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{N}_3$ le nombre des minima *négatifs* de l'expression (2), celui des maxima négatifs, et celui des ellipsoïdes d'équilibre qui correspondent à une valeur négative de (2) qui n'est ni un maximum ni un minimum, on aura par simple raison de continuité et en vertu des principes bien connus de l'*Analysis Situs* :

$$(3) \qquad \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_3 = 1, \qquad \mathfrak{N}_1 \geq 0.$$

Pour les valeurs de ωI_0 qui sont inférieures à une certaine limite, il n'y a

qu'un seul ellipsoïde d'équilibre qui est de révolution. Si les axes de cet ellipsoïde sont ρ, ρ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ces valeurs de ρ satisferont à l'inégalité

$$(4) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R'_{0,2} S'_{0,2}}{5} > 0.$$

J'appellerai un pareil ellipsoïde : *ellipsoïde peu aplati* pour le distinguer de ceux qui ne satisfont pas à l'inégalité (4).

Puisque nous n'avons qu'une seule figure d'équilibre, les inégalités (3) ne peuvent subsister que si cette figure correspond à un minimum.

Les ellipsoïdes peu aplatis sont donc stables en ce qui concerne les mouvements du deuxième ordre.

Pour les valeurs plus grandes de ωI_0, il a trois figures d'équilibre : un ellipsoïde de révolution ne satisfaisant pas à l'inégalité (4) (je dirai qu'il est *très aplati*) et deux ellipsoïdes de Jacobi égaux entre eux et ne différant l'un de l'autre que par la permutation de a et de b. Il faut donc que les deux ellipsoïdes de Jacobi correspondent tous deux à un minimum de (2) ou que cela ne soit vrai d'aucun des deux. Dans ces conditions, les inégalités (3) ne peuvent subsister que si les ellipsoïdes de Jacobi correspondent à un minimum et si l'ellipsoïde de révolution ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum.

Donc en ce qui concerne les mouvements du deuxième ordre, les ellipsoïdes de Jacobi sont toujours stables et les ellipsoïdes très aplatis toujours instables.

Si par conséquent nous imposons à la figure de la masse fluide la condition de rester ellipsoïdale, les ellipsoïdes peu aplatis et ceux de Jacobi seront stables, pendant que les ellipsoïdes très aplatis seront instables (*cf.* Tait et Thomson, *Natural Philosophy*, § 778″ [*f*]).

Voyons maintenant si la stabilité séculaire subsiste encore lorsqu'on considère les mouvements harmoniques d'ordre supérieur.

Cela est évident en ce qui concerne les ellipsoïdes peu aplatis. Considérons en effet un ellipsoïde de révolution qui, se réduisant d'abord à une sphère, aille ensuite en s'aplatissant de plus en plus, de façon que si ses axes sont ρ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ρ décroisse $+\infty$ à c. Nous avons vu au paragraphe XI que tous les coefficients de stabilité sont d'abord négatifs; puis qu'un certain nombre d'entre eux s'annulent successivement pour devenir positifs. A la fin de ce même paragraphe, nous avons démontré que le premier de ces coefficients qui s'annule ainsi est celui qui correspond à la fonction de Lamé $R'_{0,2}$ qui se réduit

à ρ^2 pour $b^2 = 0$. Si donc ce coefficient est négatif, c'est-à-dire si l'égalité (4) est satisfaite, tous les autres coefficients seront aussi négatifs. L'ellipsoïde peu aplati est donc stable (*cf. loc. cit.*, § 778'' [*b*]).

Quand à l'ellipsoïde de Jacobi, il sera stable en ce qui concerne les mouvements harmoniques du $n^{\text{ième}}$ ordre, pourvu que les coefficients de stabilité (corrigés ou non, cela revient au même si $n > 2$) qui affectent des fonctions de Lamé du $n^{\text{ième}}$ ordre soient tous négatifs. Or nous avons vu au paragraphe XII que tous les coefficients de stabilité du $n^{\text{ième}}$ ordre restent tous négatifs pour tous les ellipsoïdes de Jacobi, à l'exception du coefficient qui se rapporte à la fonction $R^1_{0,n}$ et que nous appellerons coefficient principal du $n^{\text{ième}}$ ordre. Ce coefficient principal, d'abord négatif pour les valeurs suffisamment petites de $\frac{b^2}{c^2}$, finit par s'annuler et par devenir positif quand on fait croître $\frac{b^2}{c^2}$.

Nous disons que l'ellipsoïde de Jacobi est *peu allongé* si $\frac{b^2}{c^2}$ est assez petit pour que tous les coefficients principaux soient négatifs, et *très allongé* si $\frac{b^2}{c^2}$ est assez grand pour que l'un au moins des coefficients principaux soit positif.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe XII, il est certain que le premier de ces coefficients principaux qui s'annule est celui du troisième ordre, de sorte que l'ellipsoïde limite qui sépare les ellipsoïdes peu allongés des ellipsoïdes très allongés est celui dont les axes satisfont à la relation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,3} S^1_{0,3}}{7} = 0.$$

D'après ce qui précède, les ellipsoïdes peu allongés seront stables et les ellipsoïdes très allongés instables en ce qui concerne les mouvements harmoniques d'ordre supérieur au second.

En résumé, si la figure de la masse fluide n'est assujettie à aucune condition, les ellipsoïdes de révolution peu aplatis et les ellipsoïdes de Jacobi peu allongés jouiront de la stabilité séculaire, pendant que les ellipsoïdes de révolution très aplatis et les ellipsoïdes de Jacobi très allongés n'en jouiront pas.

Ces derniers pourraient toutefois jouir de la stabilité ordinaire sans jouir de la stabilité séculaire. Il nous reste à examiner s'il en est ainsi.

Occupons-nous d'abord des petits mouvements harmoniques du second

ordre des ellipsoïdes de révolution. Supposons donc, ce qui n'altère pas ces mouvements, que la figure de la masse fluide soit assujettie à rester ellipsoïdale.

D'après le paragraphe précédent, nous pouvons même (sans altérer les petits mouvements qu'il s'agit d'étudier) supposer que la valeur superficielle du potentiel V est assujettie non seulement à être exprimée par une somme de Lamé du deuxième ordre, mais encore soit à être symétrique par rapport au plan des xy, soit au contraire à changer de signe avec z.

La seconde hypothèse est sans intérêt; elle nous conduirait simplement à une sorte de mouvement de précession. Tenons-nous donc à la première et supposons que la figure de la masse fluide est assujettie à être toujours un ellipsoïde ayant un axe dirigé suivant l'axe des z.

Soit

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - 1} = 1$$

l'ellipsoïde envisagé. Nous aurons à considérer les trois fonctions de Lamé $R_2 = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2} = \rho^2$, $R^1_{0,2}$ et $R^1_{2,2}$. Nous poserons donc

$$\begin{aligned} P_1 &= R_2 M_2 N_2 = xy, \\ P_2 &= R^1_{0,2} M^1_{0,2} N^1_{0,2} = x^2 - y^2, \\ P_3 &= R^1_{2,2} M^1_{2,2} N^1_{2,2} = 3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2. \end{aligned}$$

Nous poserons de plus

$$K_1 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,2} S^1_{0,2}}{5}, \qquad K_2 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{2,2} S^1_{2,2}}{5}.$$

Nous reprendrons d'ailleurs les notations du paragraphe précédent.

La fonction ψ_1 devant satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\psi_1}{dy^2} + \tau^2 \frac{d^2\psi_1}{dz^2} = 0,$$

nous l'écrirons

$$\psi_1 = A(x^2 - y^2) + Bxy + C\left(x^2 + y^2 - \frac{2z^2}{\tau^2}\right) + D,$$

A, B, C et D étant des coefficients constants qu'il s'agit de déterminer et qui jouent le même rôle que les D_q du paragraphe précédent.

L'équation (5) du paragraphe précédent devient

$$\psi_1 = -\tfrac{1}{2}\pi[A'K_1(x^2 - y^2) + B'K_1 xy + C'K_2(3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2)],$$

A', B', C' étant des coefficients constants, et elle doit devenir une identité en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde.

On trouve d'ailleurs

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2}+\frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{d\psi_1}{dz}\frac{\tau^2 z}{\rho^2-c^2}=2A\frac{x^2-y^2}{\rho^2}+2B\frac{xy}{\rho^2}+2C\left(\frac{x^2+y^2}{\rho^2}-\frac{2z^2}{\rho^2-1}\right);$$

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2}-\frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2-b^2}=-\frac{4Axy}{\rho^2}+B\frac{x^2-y^2}{\rho^2},$$

de sorte que l'équation (6) du paragraphe précédent devient

$$\frac{x^2-y^2}{\rho^2}(2A\lambda+2B\omega i)+\frac{xy}{\rho^2}(2B\lambda-8A\omega i)+2C\lambda\left(\frac{x^2+y^2}{\rho^2}-\frac{2z^2}{\rho^2-1}\right)$$
$$=\frac{\lambda(4\omega^2-\lambda^2)}{\rho^2\sqrt{\rho^2-1}}[A'(x^2-y^2)+B'xy+C'(3x^2+3y^2-6z^2-2)]$$

et elle doit être une identité en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde. On doit donc avoir

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l} A=-4\pi A'K_1,\qquad B=-4\pi B'K_1.\\ C+\dfrac{D}{\rho^2}=-4\pi C'K_2\left(3-\dfrac{2}{\rho^2}\right),\qquad -\dfrac{2C}{\tau^2}+\dfrac{D}{\rho^2-1}=\left(6C'K_2+\dfrac{2C'K_2}{\rho^2-1}\right)4\pi\end{array}\right.$$

et d'autre part

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l} 2A\lambda+2B\omega i=\dfrac{\lambda(4\omega^2-\lambda^2)}{\sqrt{\rho^2-1}}A',\qquad 2B\lambda-8A\omega i=\dfrac{\lambda(4\omega^2-\lambda^2)}{\sqrt{\rho^2-1}}B',\\ 2C=\dfrac{4\omega^2-\lambda^2}{\sqrt{\rho^2-1}}C'\left(3-\dfrac{2}{\rho^2}\right).\end{array}\right.$$

Ce sont là les équations (8) et (9) du paragraphe précédent. On peut y satisfaire :

1° en supposant que C, D et C′ sont nuls, ce qui donne en éliminant A, B, A′, B′ :

$$\begin{vmatrix}\lambda\left(2+\dfrac{4\omega^2-\lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2-1}}\right) & 2\omega i\\ -8\omega i & \lambda\left(2+\dfrac{4\omega^2-\lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2-1}}\right)\end{vmatrix}=0$$

ou

$$\lambda^2\left(2+\frac{4\omega^2-\lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2-1}}\right)^2-16\omega^2=0$$

ou

$$\lambda\left(2+\frac{4\omega^2-\lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2-1}}\right)=\pm 4\omega.$$

Cette équation a toujours ses trois racines réelles si K_1 est positif; l'ellipsoïde jouit donc alors de la stabilité ordinaire, ce que l'on pouvait prévoir; car si K_1

est positif, l'ellipsoïde est peu aplati et, ayant la stabilité séculaire, il doit *a fortiori* jouir de la stabilité ordinaire.

Dans tous les cas, on trouve en prenant le signe + par exemple :

$$\lambda(\lambda + 2\omega) - 8\pi k_1 \sqrt{\rho^2 - 1} = 0,$$

avec $\lambda = 2\omega$ pour la troisième racine.

La condition de réalité des racines est donc

$$K_1 > -\frac{\rho\omega^2}{32\pi\sqrt{\rho^2 - 1}}.$$

Il résulte de là qu'alors même que K_1 devient négatif et que l'ellipsoïde devenant très aplati cesse de posséder la stabilité séculaire, il jouit encore pendant un certain temps de la stabilité ordinaire.

Cela a lieu bien que l'expression

$$U + \frac{\omega^2 I_0}{2I} \tag{2}$$

ne soit ni minimum, ni maximum et qu'elle soit un « minimax » pour employer une expression consacrée en Angleterre (*cf. loc. cit.*, § 778″ [*j*]).

2° Supposons maintenant que A, B, A′, B′ soient nuls et que C, D et C′ ne le soient pas.

D'après la forme même des équations (8) et (9) que nous venons de former, il existera un mouvement harmonique du deuxième ordre qui satisfera à ces conditions. Il résulte également de la forme de ces équations, que ce mouvement harmonique ne sera pas altéré si l'on astreint la masse fluide à affecter la figure d'un ellipsoïde de révolution.

Mais si l'on introduit cette liaison, l'ellipsoïde de révolution, quel que soit son aplatissement, jouira non seulement de la stabilité ordinaire, mais de la stabilité séculaire (*cf. loc. cit.*, § 778″ [*a*]).

Ainsi certains ellipsoïdes très aplatis possèdent encore la stabilité ordinaire. Il en est probablement de même de certains ellipsoïdes de Jacobi très allongés.

Ne nous occupons plus maintenant que de la stabilité séculaire et cherchons quelles sont, parmi les figures d'équilibre non ellipsoïdales dont nous avons démontré l'existence, celles qui possèdent cette stabilité. A cet effet nous pourrons appliquer le principe de l'échange des stabilités, ce que nous ne pourrions pas faire pour la stabilité ordinaire.

Soient S et S′ deux séries linéaires de figures d'équilibre et F une figure de

bifurcation commune à ces deux séries. Si pour cette figure, tous les coefficients de stabilité sont négatifs, excepté un qui est nul, il y aura en général tant dans la série S que dans la série S', des figures très peu différentes de F qui seront stables. Si pour la figure F il y a des coefficients de stabilité positifs, toutes les figures de S et de S' très peu différentes de F seront instables.

Nous avons considéré diverses séries linéaires de figures d'équilibre, à savoir : la série S des ellipsoïdes de révolution; la série S' des ellipsoïdes de Jacobi; les séries Σ qui ont une figure commune Φ avec la série S; les séries S_3, S_4, ..., S_n, ... qui ont respectivement une figure commune F_3, F_4, ..., F_n, ... avec la série S'. La figure F_n sera un ellipsoïde de Jacobi pour lequel on aura

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,n} S^1_{0,n}}{2n+1} = 0.$$

D'après ce qui précède, toutes les figures Φ seront des ellipsoïdes de révolution très aplatis, pour lesquels le coefficient de stabilité relatif à la fonction de Lamé $R^1_{0,2}$, sera positif. Donc toutes les figures des séries Σ n'auront pas la stabilité séculaire; c'est-à-dire qu'elles seront instables pourvu que le fluide soit visqueux et si peu qu'il le soit. Cela n'est vrai toutefois que pour celles de ces figures qui diffèrent très peu de l'ellipsoïde et qui sont les seules dont nous sachions quelque chose. Il n'est pas impossible que les séries Σ contiennent des figures stables très différentes de l'ellipsoïde.

Toutes les figures F_3, F_4, ... sont des ellipsoïdes très allongés pour lesquels un certain nombre de coefficients de stabilité sont positifs. Un seul est excepté; c'est l'ellipsoïde limite qui sépare les ellipsoïdes très allongés des ellipsoïdes peu allongés et pour lequel tous les coefficients de stabilité *corrigés* sont négatifs excepté un qui est nul.

Nous avons vu au paragraphe XII que cet ellipsoïde limite n'est autre que F_3.

Donc les figures peu différentes de l'ellipsoïde sont instables (séculairement) dans les séries S_4, S_5, ... S_n; et stables dans la série S_3.

La forme d'équilibre représentée dans la figure page 113 est donc une forme d'équilibre stable [1].

---

[1] *Voir* aux Notes, *Figures piriformes*.

XV. — Conclusions.

Les ellipsoïdes ne sont pas les seules figures d'équilibre que puisse affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe. Si on laisse de côté certaines formes d'équilibre où la masse en question se subdivise en deux ou plusieurs corps isolés, et d'autres où elle prend une configuration annulaire, il existe encore une infinité de séries de figures d'équilibre.

Toutes ces figures sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. En outre elles ont un certain nombre de plans de symétrie passant par l'axe (elles en ont toutes au moins un) et certaines d'entre elles sont de révolution.

Parmi ces séries de figures, il n'y en a qu'une qui est stable et elle a deux plans de symétrie seulement (*voir* la figure p. 113).

Les ellipsoïdes de révolution sont stables s'ils sont moins aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi; les ellipsoïdes de Jacobi sont stables s'ils sont assez peu allongés.

Dans ces conditions la stabilité subsiste quand même le fluide est visqueux.

Les ellipsoïdes de révolution qui sont plus aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi, mais dont l'aplatissement reste inférieur à une certaine limite, sont stables si le fluide est parfaitement dépourvu de viscosité; ils ne le sont plus si le fluide est visqueux et si peu qu'il le soit.

Considérons une masse fluide homogène animée originairement d'un mouvement de rotation; imaginons que cette masse se contracte en se refroidissant lentement, mais de façon à rester toujours homogène. Supposons que le refroidissement soit assez lent et le frottement intérieur du fluide assez fort pour que le mouvement de rotation reste le même dans les diverses portions du fluide. Dans ces conditions le fluide tendra toujours à prendre une figure d'équilibre séculairement stable. Le moment de la quantité de mouvement restera d'ailleurs constant.

Au début, la densité étant très faible, la figure de la masse est un ellipsoïde de révolution très peu différent d'une sphère. Le refroidissement aura d'abord pour effet d'augmenter l'aplatissement de l'ellipsoïde, qui restera cependant de révolution. Quand l'aplatissement sera devenu à peu près égal à $\frac{2}{5}$, l'ellipsoïde

cessera d'être de révolution et deviendra un ellipsoïde de Jacobi. Le refroidissement continuant, la masse cessera d'être ellipsoïdale; elle deviendra dissymétrique par rapport au plan des yz et elle affectera la forme représentée dans la figure page 113. Comme nous l'avons fait observer à propos de cette figure, l'ellipsoïde semble se creuser légèrement dans sa partie moyenne, mais plus près de l'un des deux sommets du grand axe; la plus grande partie de la matière tend à se rapprocher de la forme sphérique, pendant que la plus petite partie sort de l'ellipsoïde par un des sommets du grand axe, comme si elle cherchait à se détacher de la masse principale.

Il est difficile d'annoncer avec certitude ce qui arrivera ensuite si le refroidissement continue, mais il est permis de supposer que la masse ira en se creusant de plus en plus, puis en s'étranglant dans la partie moyenne et finira par se partager en deux corps isolés.

On pourrait être tenté de chercher dans ces considérations une confirmation ou une réfutation de l'hypothèse de Laplace, mais on ne doit pas oublier que les conditions sont ici très différentes, car notre masse est homogène, tandis que la nébuleuse de Laplace devait être très fortement condensée vers le centre.

J'ai cru néanmoins devoir exposer ici ce qui arrive d'une masse homogène qui se contracte lentement et incessamment, car c'était le meilleur moyen de résumer sous une forme un peu plus concrète les principaux résultats de ce long Mémoire et de faire comprendre quel intérêt il y aurait à combler les lacunes que j'y ai laissé subsister.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 970-972 (27 avril 1886).

La Note de M. Matthiessen, insérée aux *Comptes rendus* du 12 avril dernier, appelle de ma part quelques explications. J'ai lu les Mémoires cités [1] dont je n'avais pas connaissance, et j'ai reconnu que M. Matthiessen avait signalé avant MM. Tait et Thomson l'existence des figures annulaires d'équilibre.

Je dois toutefois faire observer que la méthode du savant professeur de Rostock ne permet qu'une approximation limitée : elle est, par conséquent, inférieure à celle qu'à employée d'abord Mme de Kowalewski, et que j'ai reprise ensuite.

Pour mieux faire comprendre la différence des deux méthodes, que l'Académie veuille bien me permettre de signaler une erreur commise par M. Matthiessen et qu'il n'eût guère pu éviter avec les ressources analytiques dont on disposait il y a quinze ans.

Ce géomètre distingue deux sortes d'anneaux : l'anneau α, dont la section méridienne diffère très peu d'un cercle et où le rayon de la section méridienne est très petit par rapport au rayon de l'équateur (c'est le seul dont je me sois occupé et dont j'aie démontré l'existence), et l'anneau β dont l'épaisseur est très petite par rapport au rayon de l'équateur, pendant que le rayon intérieur de l'équateur est très petit par rapport au rayon extérieur.

---

[1] On trouvera la liste de ces Mémoires dans le *Traité de Mécanique céleste* de TISSERAND t. 2, p. 165. (J.L.).

M. Matthiessen suppose que la section méridienne de l'anneau β diffère très peu d'une ellipse très aplatie. Or on peut démontrer que l'anneau β, à supposer qu'il existe, a une section méridienne très différente de l'ellipse; car le maximum de l'épaisseur, loin de se trouver au milieu de la largeur de l'anneau, se trouve, au contraire, tout près du bord extérieur.

M. Matthiessen dit également avoir signalé avant moi les déformations que subissent les ellipsoïdes par condensation ou expansion. Cela pourrait faire croire qu'il connaissait les figures d'équilibre qui font l'objet de mon dernier Mémoire (*Acta Math.*, t. 7, p. 345) [1]. Il n'en est rien. M. Matthiessen a seulement classé les figures qu'il connaissait (ellipsoïdes et anneaux), en cherchant celles qui correspondaient aux différentes valeurs du moment de rotation; mais il ne s'est pas préoccupé de leur stabilité. Il n'a donc nullement montré comment se comporterait une masse fluide qui se condenserait en restant homogène, puisqu'une pareille masse ne pourrait prendre que des formes stables. Il ne pouvait d'ailleurs le faire, puisqu'une des figures que prendrait cette masse en se condensant ne lui était pas connue.

Je profiterai de l'occasion pour signaler un Mémoire de M. Liapounoff, de Kazan, publié en 1884, et où le géomètre russe m'a devancé sur quelques points. Absolument ignorant de la langue russe, je ne connais encore ce travail que par une analyse qu'en a donnée récemment M. Radau dans le *Bulletin astronomique*. Je ne puis donc que renvoyer à cette analyse, mais je me réserve de revenir plus tard sur ce sujet, si l'Académie veut bien le permettre.

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome p. 112.

SUR

UN THÉORÈME DE M. LIAPOUNOFF

RELATIF A L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 104, p. 622-625 (7 mars 1887).

Lorqu'une masse fluide homogène, sans mouvement de rotation, est soumise à la loi de Newton, il est évident qu'une des figures d'équilibre est la sphère; mais nous ne savons pas jusqu'à présent s'il en existe d'autres.

Nous ne savons même pas démontrer que la sphère est la seule figure d'équilibre stable [1].

Il faut, pour l'équilibre stable, que l'intégrale

$$W = \int \frac{d\tau\, d\tau'}{r}$$

atteigne un maximum. L'intégration doit être étendue à toutes les combinaisons de deux éléments $d\tau$ et $d\tau'$ du volume de la masse fluide, et r désigne la distance de ces deux éléments.

Pour démontrer que la sphère est la seule figure d'équilibre stable, il faudrait donc établir qu'elle est la seule qui corresponde à un maximum relatif de W. On ne sait pas le faire, mais M. Liapounoff a dernièrement démontré, dans les *Mémoires de l'Université de Kharkow*, que la sphère correspond au maximum absolu de W.

[1] *Voir* aux Notes, *Masses fluides en rotation (résultats divers)*.

Je crois qu'il est possible de simplifier beaucoup la démonstration de M. Liapounoff, par l'introduction de considérations empruntées à l'Électrostatique, et c'est là l'objet de la présente Note.

1° Il faut d'abord démontrer que W est susceptible d'un maximum absolu; pour cela, je me bornerai à faire voir que, si l'on se donne le volume T de la figure, on peut trouver une limite supérieure de W. En effet, on a

$$W = \frac{1}{2}\int V\,d\tau,$$

V désignant le potentiel de la masse fluide par rapport au centre de gravité de l'élément $d\tau$.

Or V est manifestement plus petit que le potentiel d'une sphère de volume T par rapport à son centre. On a donc

$$V < 2\pi R^2;$$

en posant $\frac{4}{3}\pi R^3 = T$, on en déduit

$$W < \pi R^2 T.$$

W a donc un maximum absolu. Nous nous contenterons de cet aperçu pour établir ce premier point, que M. Liapounoff avait laissé de côté.

2° Nous allons, avant de démontrer le théorème de M. Liapounoff, établir la proposition suivante :

De tous les conducteurs de même volume T, *c'est la sphère qui a la plus petite capacité électrique.*

Pour cela, je ferai voir d'abord que la capacité électrique C admet un minimum.

Considérons, en effet, un conducteur quelconque de volume T et imaginons d'abord qu'une quantité d'électricité, égale à T, soit répandue uniformément à l'intérieur du volume du conducteur. L'énergie potentielle sera alors

$$W = \int \frac{d\tau\,d\tau'}{r}.$$

Si maintenant cette quantité d'électricité T se met en état d'équilibre électrostatique à la surface du conducteur, cette énergie potentielle deviendra $\frac{T^2}{2C}$; comme l'équilibre électrique est toujours stable, on devra avoir

$$W = \frac{T^2}{2C} \quad \text{d'où} \quad C > \frac{T^2}{2W} > \frac{T}{2\pi R^2}.$$

Donc C admet une limite inférieure. C. Q. F. D.

3° Je dis maintenant que le minimum absolu de C correspond à la sphère. En effet, pour que C soit minimum, il faut d'abord que sa première variation soit nulle. Or, supposons que le conducteur se déforme infiniment peu, de façon que ζ soit la distance de deux points correspondants du conducteur avant et après la déformation, distance estimée suivant la normale. Si la charge du conducteur est M, et que ρ soit la densité électrique en un point de la surface du conducteur, la variation dC de la capacité sera donnée par la formule

$$\frac{M^2\,dC}{C^2} = 4\pi \int \rho^2 \zeta\, d\omega,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface du conducteur. On a, d'autre part,

$$dT = \int \zeta\, d\omega.$$

Il faut que, si la variation dT du volume est nulle, la variation dC le soit également. Pour cela, il faut et il suffit que ρ soit une constante, c'est-à-dire que la distribution électrique à la surface du conducteur soit uniforme. On ne sait pas s'il existe d'autre conducteur que la sphère satisfaisant à cette condition.

Mais il nous suffira, pour notre objet, de comparer les capacités des conducteurs qui y satisfont et de montrer que celle de la sphère est la plus petite.

Supposons que le conducteur subisse une déformation qui altère son volume. On aura, ρ étant une constante,

$$\frac{M^2\,dC}{C^2} = 4\pi\rho^2 \int \zeta\, d\omega = 4\pi\rho^2\, dT$$

ou bien

$$\frac{S^2\,dC}{C^2} = 4\pi\, dT,$$

S désignant la surface totale du conducteur. Si le conducteur se déforme en restant semblable à lui-même, la capacité sera, par raison de similitude, proportionnelle à la racine cubique du volume, de sorte que l'on aura

$$\frac{dC}{C} = \frac{1}{3}\,\frac{dT}{T}.$$

On en déduit

$$\frac{S^2}{C} = 12\pi T.$$

Ainsi, pour tous les conducteurs à distribution uniforme, la capacité est

proportionnelle au carré de la surface. Or, Steiner a démontré que, de toutes les figures de même volume, c'est la sphère qui a la plus petite surface; c'est donc elle qui a la plus petite capacité.

4° Je dis maintenant que la sphère correspond au maximum absolu de W. En effet, pour que W atteigne ce maximum, il faut d'abord que sa variation soit nulle quand la figure subit une déformation qui n'altère pas le volume. Or, la variation de W a pour expression

$$dW = \int V \zeta \, d\omega.$$

Pour que cette variation soit nulle en même temps que dT, il faut et il suffit que V soit une constante en tous les points de la surface, ce qui a lieu pour les surfaces d'équilibre. Mais alors on a, pour une déformation qui altère le volume,

$$dW = V \, dT.$$

Si l'on suppose, en particulier, que la figure se déforme en restant semblable à elle-même, W est proportionnel à la puissance $\frac{5}{3}$ de T; on a donc

$$\frac{dW}{W} = \frac{5}{3} \frac{dT}{T} \qquad \text{ou} \qquad W = \frac{3}{5} V.T.$$

Mais l'attraction d'une figure d'équilibre sur un point extérieur est la même que celle d'une masse d'électricité égale à T, répandue à la surface de cette figure, regardée comme un conducteur; on a donc

$$V = \frac{T}{C}, \qquad W = \frac{3}{5} \frac{T^2}{C}.$$

On voit ainsi que W est inversement proportionnel à C, et que la sphère, qui correspond au minimum de C, doit correspondre au maximum de W.

5° Dans le cas où la masse fluide est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire n, la condition d'équilibre est que $V + \frac{n^2 \rho^2}{2}$ soit une constante en tous les points de la surface, ou que la première variation de $W + \frac{n^2 I}{2}$ soit nulle. Nous désignons par ρ la distance d'un point à l'axe de rotation, et par I le moment d'inertie. On trouve alors

$$W + \frac{n^2 I}{2} = \frac{3}{5}\left(V + \frac{n^2 \rho^2}{2}\right) T.$$

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE EN ROTATION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 106, p. 1571-1574 (4 juin 1888).

Dans une remarquable Thèse [1] présentée il y a un an à la Faculté des Sciences de Paris, M. Hamy a obtenu le résultat suivant :

Si une masse fluide animée d'un mouvement de rotation est composée de couches de densités différentes, il ne peut pas arriver que les surfaces de séparation de deux couches consécutives soient toutes des ellipsoïdes.

Pour établir cette proposition, M. Hamy commence par démontrer, à titre de lemme, le théorème suivant :

Si toutes les surfaces de séparation étaient des ellipsoïdes, tous ces ellipsoïdes seraient homofocaux.

Ce lemme est susceptible d'une généralisation qui peut présenter quelque intérêt, moins peut-être en raison du résultat lui-même que de la méthode qui me l'a fait obtenir, et qui est tout à fait différente de celle de M. Hamy.

Supposons un noyau solide, dont la densité intérieure ρ varie d'une manière tout à fait quelconque; imaginons que ce noyau soit recouvert de deux couches fluides superposées; la première intérieure, de densité ρ_1, recouvrant entièrement le noyau solide, la seconde extérieure, de densité ρ_2, recouvrant entièrement la première. Tout le système sera animé d'un mouvement de rotation commun. Je dis que, si les surfaces extérieures de ces deux couches fluides sont toutes deux des ellipsoïdes, ces ellipsoïdes seront homofocaux.

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 6, 1890, p. 69-193.

Si j'ai supposé le noyau solide, ce n'est pas que le résultat ne soit encore vrai si ce noyau est fluide en totalité ou en partie. Mais, si le noyau était fluide, sa densité intérieure ne pourrait pas varier d'une façon quelconque et devrait satisfaire aux équations d'équilibre. Je n'ai donc supposé le noyau solide que pour donner au résultat toute sa généralité.

Soient

x, y et z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque;

ω la vitesse de rotation;

r la distance du point (x, y, z) à l'axe de rotation.

Soient E_2 l'ellipsoïde qui limite extérieurement la deuxième couche fluide et par conséquent tout le système et E_1 l'ellipsoïde qui sépare la première couche fluide de la seconde.

Soient λ, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point de l'espace par rapport à l'ellipsoïde E_1; λ', μ', ν' les coordonnées elliptiques de ce même point par rapport à l'ellipsoïde E_2.

Le potentiel newtonien total du système se composera :

1° du potentiel de l'ellipsoïde E_2 (supposé plein, homogène et de densité ρ_2) : nous l'appellerons V_2);

2° du potentiel d'une couche comprise entre l'ellipsoïde E_1 et la surface du noyau solide avec la densité $\rho_1 - \rho_2$;

3° du potentiel d'une matière attirante remplissant le noyau solide avec la densité variable $\rho - \rho_2$.

Nous appellerons V_1 la somme des deux dernières parties, de sorte que le potentiel total sera égal à $V_1 + V_2$.

On doit remarquer que la fonction V_1 à l'intérieur de E_1 n'est pas la continuation analytique de la fonction V_1 à l'extérieur de E_1; de même V_2 est représenté par deux fonctions analytiques différentes à l'intérieur et à l'extérieur de E_2.

L'équation d'équilibre s'écrit

$$V_1 + V_2 + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const.},$$

et elle doit être satisfaite (avec deux valeurs différentes de la constante) à la surface de E_1 et à celle de E_2.

La fonction $\frac{\omega^2 r^2}{2}$ est un polynome du second degré x, y, z; la fonction V_2 est

égale aussi à un polynome du second degré en x, y, z à l'intérieur et à la surface de E_2.

Nous devons conclure que V_1 se réduit à un polynome du second degré en x, y, z à la surface de E_1 et un autre polynome du second degré en x, y, z à la surface de E_2.

En partant de l'ellipsoïde E_1 et des coordonnées elliptiques λ, μ, ν, on peut former une suite indéfinie de fonctions de Lamé : R_0, R_1, ..., R_n; R_n sera un polynome en λ, $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $\sqrt{\lambda^2-c^2}$ (b^2 et c^2 conservant le sens habituel donné à ces notations dans la théorie des fonctions de Lamé). A R_n correspondront deux fonctions conjuguées M_n et N_n obtenues en remplaçant, dans R_n, λ par μ et par ν, et la fonction

$$S_n = R_n \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{R_n^2 \sqrt{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}}.$$

Il y a une seule fonction de Lamé de degré zéro qui est $R_n = 1$: nous lui donnerons l'indice zéro; il y en a trois de degré 1 : nous leur donnerons les indices 1, 2, 3; il y en a cinq de degré 2 : nous leur donnerons les indices 4, 5, 6, 7, 8.

Avec l'ellipsoïde E_2 et les coordonnées elliptiques λ', μ', ν', on formera de même les fonctions de Lamé R'_n, M'_n, N'_n, S'_n.

De ce que V_1 est égal à la surface de E_1 à un polynome du second degré en x, y, z, on conclut qu'on a à l'extérieur de E_1 :

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=8} A_n S_n M_n N_n,$$

les A_n étant des coefficients constants.

De même, V_1 étant encore égal à un polynome du second degré à la surface E_2, on devra avoir à l'extérieur de E_2 :

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=8} A'_n S'_n M'_n N'_n,$$

les A'_n étant de nouveaux coefficients constants.

On a donc l'identité

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=8} A_n S_n M_n N_n = \sum_{n=0}^{n=8} A'_n S'_n M'_n N'_n,$$

et c'est cette identité qui ne peut avoir lieu que si E_1 et E_2 sont homofocaux.

A vrai dire, l'identité (1) n'est démontrée que pour les valeurs réelles de x, y et z, et quand le point (x, y, z) est extérieur à E_2. Mais, quand deux fonctions analytiques sont identiques tout le long d'une ligne continue, elles restent identiques pour toutes les valeurs réelles et imaginaires des variables. L'identité (1) ne souffre donc aucune exception.

Cela posé, observons que le premier membre de (1) n'est pas une fonction uniforme de x, y et z, mais qu'il admet une infinité de valeurs, lesquelles s'échangent entre elles quand le point (x, y, z) appartient à la développable circonscrite aux ellipsoïdes homofocaux à E_1.

De même, le second membre de (1) admettre une infinité de valeurs qui s'échangeront entre elles quand le point (x, y, z) appartiendra à la développable circonscrite aux ellipsoïdes homofocaux à E_2.

Mais, les deux membres de (1) devant être identiques, ces deux développables devront coïncider, ce qui prouve que E_1 et E_2 sont homofocaux. La réponse doit être affirmative.

C. Q. F. D.

Une question se pose alors naturellement. Est-il possible d'imaginer à l'intérieur du noyau solide une distribution de la densité telle que les deux couches fluides prennent effectivement la forme de deux ellipsoïdes homofocaux ? La réponse doit être affirmative.

Le résultat obtenu dans cette Note peut être généralisé de la façon suivante. Si un noyau solide quelconque est recouvert de n couches fluides superposées, et que tout le système soit animé d'un mouvement de rotation commun, si la surface extérieure de la dernière couche fluide ainsi que les surfaces de séparation de deux couches fluides consécutives sont toutes des ellipsoïdes, tous ces ellipsoïdes sont homofocaux.

SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE EN ROTATION

Bulletin astronomique, t. 16, p. 161-169 (mai 1899).

Dans ce qui va suivre, je considérerai l'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation, obéissant à la loi de Newton. La masse étant homogène, je prendrai sa densité pour unité, de telle sorte que le potentiel V s'écrira

$$V = \int \frac{d\tau'}{r},$$

r étant la distance de l'élément de volume $d\tau'$ au point attiré.

J'appellerai W l'énergie potentielle

$$W = \frac{1}{2} \int V \, d\tau,$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ de la masse fluide; le travail virtuel de l'attraction sera égal à la variation δW.

Si ω est la vitesse de rotation et que l'axe de rotation soit l'axe des z, je poserai

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

de telle sorte qu'on aura

$$\Delta U = 2\omega^2 - 4\pi.$$

La condition d'équilibre est que l'on ait à la surface

$$U = U_0,$$

U_0 étant une constante. Dans le cas où il n'y a pas de rotation, ω est nul et l'on doit avoir à la surface

$$V = V_0,$$

V_0 étant une constante.

Si l'on suppose $\omega = 0$, on sait que la sphère est une figure d'équilibre; mais on ne sait pas si c'est la seule figure d'équilibre possible [1]; on ne sait même pas si c'est la seule figure *stable* possible, c'est-à-dire si W n'a pas d'autre maximum *relatif* que celui qui correspond à la sphère. En revanche M. Liapounoff a démontré que la sphère correspond au maximum *absolu* de W. Je voudrais d'abord rappeler rapidement la forme simple que j'ai donnée à la démonstration du théorème de Liapounoff.

Je désignerai par T le volume de la masse fluide.

1° Le potentiel d'un volume quelconque par rapport à un point quelconque est plus petit que le potentiel d'une sphère de même volume par rapport à son centre; on aura donc

$$V < 2\pi R^2,$$

en posant

$$T = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

2° On aura

$$W = \frac{1}{2}\int V\,d\tau < \pi R^2 T.$$

Donc l'énergie potentielle W d'une masse fluide de volume T a un maximum. Il reste à démontrer que ce maximum ne peut être atteint que pour la sphère.

3° Je dis maintenant que la capacité électrostatique C d'un conducteur de volume T a un minimum. Chargeons en effet ce conducteur d'une charge électrique égale à T, on aura

$$\frac{T^2}{2C} < W < \pi R^2 T, \qquad \text{d'où} \qquad C > \frac{T}{2\pi R^2}, \qquad C > \frac{2}{3}R.$$

Il reste à montrer que ce minimum ne peut être atteint que pour la sphère.

4° Soit, en effet, M la charge du conducteur, μ la densité électrique sur l'élément de surface $d\sigma$, de telle façon que

$$M = \int \mu\,d\sigma.$$

---

[1] *Voir* aux Notes, *Masses fluides en rotation (résultats divers)*.

Supposons que le conducteur se déforme de telle façon que le centre de gravité de l'élément $d\sigma$ subisse un petit déplacement dont la projection sur la normale à l'élément $d\sigma$ sera égale à ζ; alors la capacité et le volume subiront des accroissements dC et dT et l'on aura

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = \int 4\pi\mu^2 \zeta\, d\sigma; \qquad dT = \int \zeta\, d\sigma.$$

Comme je suppose C minimum, l'équation $dT = 0$ doit entraîner $dC = 0$, et l'on doit avoir

$$\mu = \text{const.} = \frac{M}{S},$$

S étant la surface du conducteur; d'où si dT n'est pas nul,

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = 4\pi\mu^2\, dT \qquad \text{ou} \qquad \frac{S^2 dC}{C^2} = 4\pi\, dT.$$

Mais si le conducteur se dilate, en restant semblable à lui-même, la capacité varie en raison directe de la racine cubique du volume, en sorte que

$$(1) \qquad \frac{dC}{C} = \frac{1}{3}\frac{dT}{T}.$$

On en déduit

$$C = \frac{S^2}{12\pi T}.$$

Or, parmi tous les corps de même volume, celui qui a la plus petite surface est la sphère; donc celui qui a la plus petite capacité est la sphère.

C. Q. F. D.

On a donc

$$C > R.$$

5° Les formules précédentes supposent que la capacité est minimum. Si elle n'a pas atteint son minimum, μ ne sera plus une constante, mais si μ_0 et μ_1 représentent la plus grande et la plus petite valeur de μ, on aura

$$4\pi\mu_1^2\, dT < \frac{M^2 dC}{C^2} < 4\pi\mu_0^2\, dT.$$

Si le corps est une forme d'équilibre, de telle sorte qu'à la surface on ait

$$V = V_0,$$

on aura

$$T = CV_0.$$

Si je désigne par F_0 et F_1 la plus grande et la plus petite valeur de l'attraction à la surface du corps, on aura, en supposant $M = T$,

$$4\pi\mu_0 = F_0, \qquad 4\pi\mu_1 = F_1;$$

d'où

$$F_1^2\,dT < \frac{4\pi T^2\,dC}{C^2} < F_0^2\,dT,$$

ou, à cause de la relation (1),

$$F_1^2 < \frac{4}{3}\pi V_0 < F_0^2.$$

6° Nous avons vu que W a un maximum; je veux maintenant démontrer que ce maximum ne peut être atteint que pour la sphère (c'est le théorème de M. Liapounoff).

Supposons, en effet, que notre corps se déforme; nous aurons

$$dW = \int V\zeta\,d\sigma, \qquad dT = \int \zeta\,d\sigma.$$

Pour que W soit maximum, il faut que dW s'annule toutes les fois que $dT = 0$; et, pour cela, il faut que la valeur de V à la surface se réduise à une constante V_0; c'est ce que nous savions déjà.

Si maintenant dT n'est pas nul, on aura

$$dW = V_0\,dT.$$

D'autre part, si le corps reste semblable à lui-même, W sera proportionnel à la puissance $\frac{5}{3}$ de T, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{dW}{W} = \frac{5}{3}\frac{dT}{T},$$

d'où

$$W = \frac{3}{5}V_0 T \qquad \text{ou} \qquad W = \frac{3}{5}\frac{T^2}{C}.$$

De tous les corps de volume T, la sphère ayant la plus petite capacité aura la plus grande énergie W. C. Q. F. D.

Cherchons maintenant à étendre ces résultats au cas où il y a un mouvement de rotation. Nous avons encore

$$dW = \int V\zeta\,d\sigma.$$

D'autre part, si J est le moment d'inertie, on aura

$$dJ = \int \zeta(x^2+y^2)\,d\sigma, \qquad \text{d'où} \qquad dW + \frac{\omega^2}{2}dJ = \int U\zeta\,d\sigma.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que $dW + \frac{\omega^2}{2}dJ$ soit nul toutes les fois que $dT = 0$; il faut donc que la valeur de U à la surface se réduise à une constante U_0; c'est ce que nous savions déjà.

Si alors dT n'est pas nul, on a

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = U_0 dT.$$

D'autre part, si le corps reste semblable à lui-même, J est comme W proportionnel à la puissance $\frac{5}{3}$ de T, de sorte que

$$\frac{dW + \frac{\omega^2}{2} dJ}{W + \frac{\omega^2}{2} J} = \frac{5}{3} \frac{dT}{T},$$

d'où

$$W + \frac{\omega^2}{2} J = U_0 T. \tag{2}$$

De cette formule on peut tirer différentes conséquences.

1° Soient V le potentiel dû à l'attraction de notre masse fluide et V′ celui qui serait dû à une charge électrique égale à T et qui serait en équilibre à la surface du corps regardé comme un conducteur.

A la surface du corps, V′ aura la valeur constante $\frac{T}{C}$.

Soit une sphère de rayon très grand dont le centre sera fixe, mais dont nous ferons varier le rayon. On aura, en étendant les intégrales à tous les éléments $d\sigma$ de la surface de cette sphère,

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = \int \frac{dV'}{dn} d\sigma = -4\pi T, \qquad \int \frac{d(V - V')}{dn} d\sigma = 0.$$

On en conclut que la valeur moyenne de $V - V'$ à la surface de la sphère est indépendante du rayon de cette sphère. Or, cette valeur doit s'annuler à l'infini; donc cette valeur moyenne est toujours nulle. Donc $V - V'$ ne peut être ni toujours positif, ni toujours négatif.

Or, si $V - V'$ était toujours positif (ou toujours négatif) à la surface du corps, il serait toujours positif (ou toujours négatif) à l'extérieur du corps. Donc la valeur constante de V′ doit être comprise entre le maximum et le minimum de V.

Soient r_0 la plus grande distance du corps à l'axe de rotation et r_1 la plus petite distance. Pour des figures d'équilibre telle que les ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi par exemple, l'axe de rotation rencontre la surface du corps et r_1 est nul; mais il n'en serait plus de même pour une figure annulaire d'équilibre.

On a alors à la surface

$$V = U_0 - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

et par conséquent

$$U_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2} < V < U_0 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2}.$$

Donc, d'après le résultat obtenu plus haut,

$$U_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2} < \frac{T}{C} < U_0 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2},$$

d'où nous déduirons les inégalités

$$\frac{3}{5}\frac{T^2}{C} + \frac{3}{10}\omega^2 r_1^2 < W + \frac{\omega^2}{2} J < \frac{3}{5}\frac{T^2}{C} + \frac{3}{10}\omega^2 r_0^2,$$

et dans tous les cas

$$\frac{3}{5}\frac{T^2}{C} < W + \frac{\omega^2}{2} J.$$

Ce sont des relations entre l'énergie potentielle du corps, son moment d'inertie, son volume, sa capacité électrostatique, et r_0, c'est-à-dire ce qu'on pourrait appeler le rayon de l'équateur.

2° D'après ce que nous avons vu plus haut. ΔU est négatif si $\omega^2 < 2\pi$, nul si $\omega^2 = 2\pi$, positif si $\omega^2 > 2\pi$. Dans le premier cas, U peut avoir un maximum, mais pas de minimum; dans le second cas, U ne peut avoir ni maximum ni minimum; dans le troisième cas, U peut avoir un minimum, mais pas de maximum.

J'ai démontré ailleurs (*Bull. astron.*, t. 2, p. 109) [1] que dans les deux derniers cas l'équilibre ne saurait être stable.

Dans le premier cas, on a $U < U_0$ à l'intérieur du corps; dans le second cas on a $U = U_0$, dans le troisième on a $U > U_0$.

Or

$$\int U\,d\tau = \int V\,d\tau + \frac{\omega^2}{2}\int (x^2+y^2)\,d\tau = 2W + \frac{\omega^2}{2} J;$$

dans le premier cas, on a donc

$$2W + \frac{\omega^2}{2} J > U_0 T;$$

dans le second :

$$2W + \frac{\omega^2}{2} J = U_0 T;$$

dans le troisième :

$$2W + \frac{\omega^2}{2} J < U_0 T.$$

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 17.

En rapprochant de la forumule (2), on voit que :

si $\omega^2 < 2\pi$, on a

$$W > \omega^2 J;$$

si $\omega^2 = 2\pi$, on a

$$W = \omega^2 J;$$

si $\omega^2 > 2\pi$, on a

$$W < \omega_2 J.$$

3° Je suppose que ω varie d'une manière continue ainsi que la figure d'équilibre (le volume T demeurant constant bien entendu).

La figure devant satisfaire à la condition d'équilibre, on aura

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = 0,$$

et par conséquent, en différentiant l'équation (2),

$$\omega J\, d\omega = \frac{3}{5} T\, dU_0.$$

Cela nous montre que U_0 croît avec ω.

Ce résultat est vrai pour toutes les figures d'équilibre, mais pour les figures d'équilibre qui rencontrent l'axe de rotation, il peut s'énoncer autrement : le potentiel au pôle croît quand la vitesse de rotation augmente.

4° Pour les figures d'équilibre qui rencontrent l'axe de rotation, U_0 étant le potentiel au pôle est, d'après ce que nous avons vu au début, plus petit que $2\pi R^2$.

Donc U_0 ne peut croître indéfiniment, et cela nous fait déjà prévoir que ω ne peut non plus croître indéfiniment.

Pour le démontrer, je pars de l'égalité suivante, conséquence immédiate de celle que je viens d'établir

$$\int \frac{d\omega}{\omega} = \frac{3T}{5} \int \frac{dU_0}{\omega^2 J}.$$

Soit Ω la plus petite valeur de $\omega^2 J$, il vient

$$\int \frac{d\omega}{\omega} < \frac{3T}{5\Omega} \int dU_0 < \frac{6\pi R^2 T}{5\Omega}.$$

Pour que ω puisse croître indéfiniment, il faudrait que Ω fût nul; c'est-à-dire que quand ω croît indéfiniment, $\omega^2 J$ tende vers zéro.

Or, dès que ω a dépassé la valeur $\sqrt{2\pi}$, on a $W < \omega^2 J$; donc W devrait aussi tendre vers zéro. Donc

$$U_0 = \frac{5}{3T}\left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right)$$

devrait tendre vers zéro. Mais cela n'est pas possible puisque U_0 croît avec ω.

D'où la conclusion suivante [1] :

Quand on fera varier d'une manière continue la vitesse ω ainsi que la figure d'équilibre, de deux choses l'une : ou bien la vitesse ω, après avoir crû, finira par décroître; ou bien la figure d'équilibre cessera à un certain moment de rencontrer l'axe de rotation.

C'est ainsi que, si l'on suit la série des ellipsoïdes de révolution, ω^2 croît depuis zéro jusqu'à $4\pi \times 0,112$, et décroît ensuite jusqu'à zéro; de même si l'on suit la série des ellipsoïdes de Jacobi, ω^2 croît depuis zéro jusqu'à $4\pi \times 0,093$, et décroît ensuite jusqu'à zéro.

Je dois ajouter que la démonstration qui précède n'exclut pas l'hypothèse suivante : ω pourrait croître au delà de toute limite sans que la figure cessât de rencontrer l'axe de rotation, mais à la condition de croître par une série d'oscillations en présentant une infinité de maxima ou de minima.

J'ajouterai que si $W + \frac{\omega^2}{2} J$ est maximum (ce qui est une condition suffisante, mais non nécessaire pour la stabilité de l'équilibre), J va en croissant avec ω.

Soient, en effet, ω et ω' deux valeurs, très voisines, de la vitesse de rotation; soient W et W', J et J' les valeurs correspondantes de l'énergie et du moment d'inertie. Comme $W + \frac{\omega^2}{2} J$ est maximum, on aura

$$W + \frac{\omega^2}{2} J > W + \frac{\omega^2}{2} J'.$$

Comme $W' + \frac{\omega'^2}{2} J'$ est de son côté maximum, on aura

$$W + \frac{\omega'^2}{2} J < W' + \frac{\omega'^2}{2} J';$$

d'où, en retranchant ces deux inégalités,

$$\frac{(\omega'^2 - \omega^2)}{2} (J' - J) > 0 \qquad \text{ou} \qquad J' > J.$$

C. Q. F. D.

---

[1] *Voir* aux Notes, *Masses fluides en rotation (résultats divers)*.

SUR

LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PIRIFORMES AFFECTÉES PAR UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION [1]

Proceedings of the Royal Society of London, vol. 69, p. 148-149 (29 octobre 1901).

(Résumé.)

J'ai publié autrefois dans le Tome 7 des *Acta Mathematica* un Mémoire [2] où j'étudie diverses figures d'équilibre nouvelles d'une masse fluide homogène en rotation. Presque toutes ces figures sont instables; une d'elles cependant, qui est piriforme [3], est très probablement stable. Mais la preuve directe de cette stabilité ne pourrait être obtenue que par de longs calculs. Le but du présent travail est de faciliter ces calculs, en donnant à la condition de stabilité une forme analytique aussi simple que possible. La question cependant reste indécise, parce que les formules analytiques n'ont pas été réduites en chiffres.

Il fallait d'abord obtenir une expression de l'énergie de gravitation d'une pareille figure en poussant l'approximation plus loin qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. L'emploi des fonctions de Lamé peut conduire au résultat, mais on se trouve en présence d'une petite difficulté. Le potentiel d'un ellipsoïde, ou

(1) Received October, 29, 1901.
(2) *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 40.
(3) *Voir* aux Notes, *Figures piriformes*.

d'une couche ellipsoïdale, affecte des formes analytiques différentes selon que le point envisagé est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ellipsoïde. Il en résulte que dans chacune des intégrales il faudrait donner à la fonction sous le signe $\int$, tantôt une forme pour les parties de la surface piriforme qui sont au-dessous de la surface de l'ellipsoïde, tantôt une autre forme pour les parties qui sont au-dessus. Mais j'ai reconnu que cette difficulté est purement artificielle et qu'on obtiendra encore un résultat final correct en donnant à ces fonctions sous le signe $\int$, soit *toujours* la première forme, soit *toujours* la seconde. En opérant de la sorte on commet une erreur sur *chacune* des intégrales, mais ces erreurs se compensent complètement dans la somme des intégrales.

Je me suis attaché ensuite à écrire l'inégalité qui exprime la condition de stabilité, et à réduire aux intégrales elliptiques les plus simples toutes les intégrales qui figurent dans cette inégalité.

SUR

LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PIRIFORMES AFFECTÉES PAR UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION [1]

Philosophical Transactions. A, t. 198, p. 333-373 (29 octobre 1901).

Introduction.

J'ai publié autrefois dans le Tome 7 des *Acta Mathematica* [2] un Mémoire sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. C'est à ce Mémoire que je renverrai souvent dans la suite en écrivant simplement *Acta*. Dans ce Mémoire je décris en particulier une figure d'équilibre particulière qui est piriforme, et que pour cette raison on peut appeler la poire (pear-shaped figure).

Cette figure est-elle stable? La question ne peut pas être regardée comme entièrement résolue. En effet, comme l'a fait remarquer M. Schwarzschild, le principe de l'échange des stabilités ne peut pas être appliqué à ce cas sans modification [3].

La condition de stabilité peut être présentée sous deux formes différentes. Soient U l'énergie potentielle de la masse fluide (ou plutôt ce que M. Darwin appelle l'énergie perdue), ω la vitesse de rotation, J le moment d'inertie. La quantité $U + \frac{1}{2}\omega^2 J$ doit être minimum, *ω étant regardé comme donné*.

(1) Received October 29, Read November 21, 1901.
(2) *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 40.
(3) *Voir* aux Notes, *Figures piriformes*.

La condition est nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire, si l'on suppose que la masse est entraînée par frottement par un axe de rotation qui la traverse de part en part comme dans les expériences de Plateau. Elle est suffisante, mais elle n'est plus nécessaire, si l'on suppose que la masse est isolée dans l'espace (cf. *Acta*, p. 293, 295, 367, 369).

Voici la seconde forme. Soit $\mu = \omega J$, moment de rotation de la masse fluide, la quantité $U - \frac{\mu^2}{2J}$ devra être minimum, *μ étant regardé comme donné.*

La condition ainsi énoncée est nécessaire et suffisante, si l'on suppose la masse isolée dans l'espace.

Cela posé, considérons la série des ellipsoïdes de Jacobi, et d'autre part la série des figures piriformes. Nous aurons une figure de bifurcation qui appartiendra à la fois aux deux séries, et que nous appellerons le jacobien critique.

Les figures piriformes n'admettent pas le plan des xy pour plan de symétrie; on doit donc regarder comme distinctes deux de ces figures, symétriques l'une de l'autre par rapport à ce plan. De sorte que les figures de la série piriforme sont symétriques deux à deux, à l'exception bien entendu du jacobien critique, qui admet le plan des xy pour plan de symétrie. Il est clair que pour deux figures symétriques les valeurs de ω, de J et de U sont les mêmes.

L'ensemble des deux séries peut être représenté schématiquement par une droite représentant les ellipsoïdes de Jacobi, et par une courbe ayant cette droite pour axe de symétrie, et représentant les figures piriformes. Le point d'intersection de la droite et de la courbe représente alors le jacobien critique, et deux points symétriques de la courbe représentent deux figures symétriques.

Cela posé, si nous suivons la série des jacobiens en allant du moins allongé au plus allongé, nous savons que ω va en décroissant, tandis que $\omega J = \mu$ va en croissant.

Si nous suivons la série piriforme, il est évident que quand nous atteindrons le jacobien critique, ω atteindra, soit un minimum, soit un maximum, et il en est de même de ωJ.

Si nous adoptons le premier critère de la stabilité fondé sur les minima de la fonction $U + \frac{1}{2}\omega^2 J$, le principe de l'échange des stabilités entendu comme il doit l'être, nous enseigne ceci.

La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire, si l'on supposait la masse entraînée par la rotation d'un axe fixe comme dans les expé-

riences de Plateau, serait que ω soit *maximum*, c'est-à-dire plus grand pour le jacobien critique que pour les autres figures piriformes.

Si ω est maximum, on aurait pour une valeur donnée de ω supérieure au maximum une seule figure d'équilibre, un jacobien stable; pour une valeur donnée de ω inférieure au maximum on en aura trois, un jacobien instable et deux figures piriformes stables.

Si, au contraire, ω est minimum, on aurait pour une valeur donnée de ω supérieure au minimum trois figures d'équilibre, deux piriformes et instables, et une ellipsoïdale et stable; pour une valeur inférieure au minimum on n'aurait plus qu'une figure d'équilibre ellipsoïdale et instable.

Si maintenant nous supposons la masse isolée dans l'espace, la condition reste suffisante, mais elle n'est plus nécessaire. Pour avoir une condition nécessaire et suffisante, il faut avoir recours au second critère fondé sur les minima de $U - \frac{\mu^2}{2J}$. Le principe de l'échange des stabilités nous apprend alors que la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire est que ωJ soit *minimum*, c'est-à-dire plus petit pour le jacobien critique que pour les autres figures piriformes.

Si ωJ est minimum on aura pour une valeur donnée de ωJ :

inférieure au minimum : un jacobien *stable;*
supérieure au minimum : un jacobien *instable*, deux figures piriformes, *stables* et symétriques l'une de l'autre.

Si ωJ est maximum on aura pour une valeur donnée de ωJ :

inférieure au maximum : un jacobien *stable* et deux figures piriformes, *instables* et symétriques l'une de l'autre;
supérieure au maximum : un jacobien instable.

La question à résoudre est donc de savoir si ωJ est maximum ou minimum; mais elle ne peut être résolue que par un calcul compliqué. Supposons qu'une masse fluide homogène en rotation se refroidisse lentement, elle prendra successivement (dans la première hypothèse ωJ minimum) la forme d'un ellipsoïde de révolution de plus en plus aplati, puis celle d'un ellipsoïde de Jacobi, puis celle d'une poire.

Si, au contraire, on venait à reconnaître que ωJ est maximum et non minimum, on devrait conclure que cette masse après avoir pris la forme de divers ellip-

soïdes de révolution, puis de divers ellipsoïdes de Jacobi, et avoir atteint finalement celle du jacobien critique, subira tout à coup une déformation énorme et une série d'oscillations, par une sorte de catastrophe subite.

Diverses raisons contribuent à rendre la première hypothèse beaucoup plus vraisemblable; néanmoins jusqu'ici la preuve n'est pas faite, et je déclare tout de suite que je ne l'apporte pas encore dans le présent travail.

Mais quelle que soit l'hypothèse qui doive triompher un jour, je tiens à mettre tout de suite en garde contre les conséquences cosmogoniques qu'on pourrait en tirer. Les masses de la nature ne sont pas homogènes, et si l'on reconnaissait que les figures piriformes sont instables, il pourrait néanmoins arriver qu'une masse hétérogène fût susceptible de prendre une forme d'équilibre analogue aux figures piriformes, et qui serait stable. Le contraire pourrait d'ailleurs arriver également.

A la suite d'une correspondance que j'ai eue avec M. Darwin, nous nous sommes mis l'un et l'autre à étudier la question, et pendant qu'il écrivait deux Mémoires sur ce sujet, et que dans l'un de ces Mémoires il déterminait les axes du jacobien critique, j'obtenais des résultats qui sont l'objet du présent travail. J'ai formé l'inégalité qui doit être satisfaite pour qu'il y ait stabilité, mais je ne l'ai pas traduite en chiffres, parce que je me défie de mon habileté arithmétique, et que je ne suis pas un calculateur assez sûr.

Les notations dont je fais usage diffèrent, malheureusement, beaucoup de celles de M. Darwin; elles se rapprochent de celles de mon Mémoire des *Acta* sans être tout à fait identiques, parce que je rapporte ici, pour plus de symétrie, les coordonnées elliptiques à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2-a^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

et non plus à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

comme le faisaient Liouville et Lamé, et comme je l'ai fait moi-même dans le Mémoire des *Acta*. (Je suppose de plus $a^2>b^2>c^2$, au lieu de supposer $b^2<c^2$.)

Les indices que j'attribue aux fonctions de Lamé [1] ne sont pas non plus les

[1] *Note* de M. G. H. Darwin. In the paper in the *Acta* there is a slight inconsistency in the notation adopted, for in one part of the paper the first of the double suffixes to the R's denotes the degree of the harmonic, while in another part it is the second which has that

mêmes que dans les *Acta*. Les fonctions que j'appelle ici R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, s'appelaient dans les *Acta* : R_0, R_1, $R'_{2,0}$, $R'_{2,2}$, $R_{3,0}$.

C'est la fonction $R'_{3,0} = R_5$, qui est la plus importante, parce que c'est elle qui sert à définir la figure piriforme; on la désigne quelquefois sous le nom de « third zonal harmonic ».

Les fonctions R sont toutes égales, soit à un polynome entier en ρ^2, soit à un pareil polynome multiplié par l'un des trois radicaux $\sqrt{(\rho^2 - a^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - b^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - c^2)}$, soit à un pareil polynome multiplié par deux de ces radicaux, soit à un pareil polynome multiplié par ces trois radicaux.

Celles de ces fonctions qui sont égales à un polynome en ρ^2 seront ce que nous appellerons plus loin des *fonctions de Lamé paires et uniformes*.

Calculs préliminaires.

Soit

$$\frac{x^2}{\rho_0^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde de Jacobi de bifurcation que j'appelle E_0; soient ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques déduites de cet ellipsoïde; de sorte que $\rho = \rho_0$ est l'équation de E_0 en coordonnées elliptiques.

On aura

$$x^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

de même pour y^2 et z^2.

On en déduit

$$\frac{dx}{d\rho} = \rho\sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(\rho^2 - a^2)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}},$$

d'où

$$A = \left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 = \frac{\rho^2(\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2)}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

---

meaning. Thus, for example, $R'_{2,0}$ is sometimes written $R'_{0,2}$. Further I do not find that R_0 is used explicitly in that paper.

It may be convenient to point out the identities of the R's used here with my notation, as used in *Ellipsoidal Harmonics* and *The pear-shaped Figure of Equilibrium*. They are as follows :

$$R_1 = \mathfrak{p}_0(\nu) \text{ (a constant)}; \quad R_2 = \mathbf{P}_1^1(\nu); \quad R_3 = \mathfrak{p}_2(\nu); \quad R_4 = \mathfrak{p}_2^2(\nu); \quad R_5 = \mathfrak{p}_3(\nu).$$

The identities of the S functions which occur below are

$$S_1 = \mathfrak{Q}_0(\nu), \quad S_2 = 3\mathbf{Q}_1^1(\nu), \quad S_3 = 5\mathfrak{Q}_2(\nu), \quad S_4 = 5\mathfrak{Q}_2^2(\nu), \quad S_5 = 7\mathfrak{Q}_3(\nu).$$

d'où pour le carré d'un élément d'arc quelconque

$$ds^2 = A^2\,d\rho^2 + B^2\,d\mu^2 + C^2\,d\nu^2,$$

où B et C sont formés avec μ et ν comme A avec ρ.

Il vient alors pour ΔV l'expression suivante :

$$ABC\,\Delta V = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV}{d\rho}\right) + \frac{d}{d\mu}\left(\frac{AC}{B}\frac{dV}{d\mu}\right) + \frac{d}{d\nu}\left(\frac{AB}{C}\frac{dV}{d\nu}\right).$$

Nous désignerons les fonctions de Lamé par des indices.

R_1 se réduit à une constante; R_2 à $\sqrt{(\rho^2 - a^2)}$; R_3 et R_5 sont les deux polynomes du premier degré en ρ^2; R_5 est la troisième « zonal harmonic ». *Il faut remarquer que les indices choisis ne sont pas les mêmes que dans le Mémoire des* Acta.

Les fonctions correspondantes S, M, N porteront les mêmes indices.

R_i^0 et S_i^0 seront les valeurs de R_i et S_i pour $\rho = \rho_0$.

Nous introduirons les variables elliptiques θ, θ_1, θ_2 par les équations

$$d\theta = \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}};$$

θ_1 et θ_2 étant formés avec μ et ν comme θ avec ρ.

Il vient alors

$$ds^2 = \frac{1}{l^2}\,d\theta^2 + \frac{1}{l_1^2}\,d\theta_1^2 + \frac{1}{l_2^2}\,d\theta_2^2,$$

où

$$l^2 = \frac{1}{(\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2)}, \qquad l_1^2 = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\nu^2 - \mu^2)}, \qquad l_2^2 = \frac{1}{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}.$$

Formules relatives au potentiel d'une simple couche.

Le potentiel à l'extérieur aura pour expression

$$V = \Sigma\,HR^0SMN,$$

les H étant des coefficients quelconques, et à l'intérieur

$$V = \Sigma\,HRS^0MN.$$

Si nous considérons maintenant les dérivées $\frac{dV}{dn}$ estimées suivant la normale; si nous convenons de représenter par des lettres accentuées les dérivées prises par rapport à θ, il viendra, puisque $l = \frac{d\theta}{dn}$:

A l'extérieur

$$\frac{dV}{dn} = \Sigma HR^0 S' l MN$$

et à l'intérieur

$$\frac{dV}{dn} = \Sigma HS^0 R' l MN.$$

La différence $\Sigma H(RS' - SR') l MN$ représente $4\pi\delta$, δ étant la densité de la simple couche, et comme

$$SR' - RS' = 2n + 1,$$

on aura

$$4\pi\delta = \Sigma H(2n+1) l MN.$$

Si donc la densité a pour expression $\Sigma B l MN$, le potentiel à la surface aura pour expression $\Sigma B \frac{4\pi}{2n+1} R^0 S^0 MN$.

Formules relatives au potentiel d'une double couche.

Le potentiel à l'extérieur aura pour expression

$$V = \Sigma HSMN$$

et à l'intérieur

$$V = \Sigma H_1 RMN$$

les coefficients étant différents. Comme la dérivée $\frac{dV}{dn}$ devra être continue, on aura

$$\Sigma HS'_0 MN = \Sigma H_1 R'_0 MN.$$

Posons $H = KR'_0$, $H_1 = KS'_0$; la différence entre les deux valeurs de V pour $\rho = \rho_0$ sera

$$-\Sigma KMN(R'_0 S_0 - S'_0 R_0) = +\Sigma KMN(2n+1).$$

Ce sera $-4\pi\delta$, δ étant la densité de la double couche.

Énergie de la simple couche.

Cette énergie est $\int \frac{1}{2} VS\, d\sigma$, $d\sigma$ étant l'élément de surface.

Si

$$\delta = \Sigma B l MN, \qquad V = \Sigma B \frac{4\pi}{2n+1} RSMN,$$

cela fera

$$2\pi \sum \frac{1}{2n+1} B^2 RS \int l M^2 N^2\, d\sigma.$$

Énergie de la double couche.

Je ne calculerai ici qu'une portion de cette énergie, à savoir l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int d\tau\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace *sauf ceux qui sont compris entre les deux surfaces infiniment voisines qui constituent la double couche*. Cette portion est égale à $\int \frac{1}{2}\frac{dV}{dn}\delta\, d\sigma$.

Si

$$\delta = \Sigma BMN, \qquad \frac{dV}{dn} = -\Sigma B\frac{4\pi}{2n+1}R'S'MNl,$$

d'où

$$-2\pi\sum\frac{1}{2n+1}B^2R'S'\int lM^2N^2\, d\sigma.$$

Définition de la poire.

Parmi les différents points de E_0, je mène des lignes normales aux ellipsoïdes homofocaux à E_0; c'est-à-dire des lignes $\mu =$ const., $\nu =$ const., et je les prolonge jusqu'à la rencontre avec la surface de la poire. Soit $d\sigma_0$ un élément de surface de E_0 et dv le volume engendré par les lignes ainsi menées par les différents points de $d\sigma_0$, le rapport $\frac{dv}{d\sigma_0}$ sera une fonction de μ et de ν que je pourrai développer en série de Lamé sous la forme

$$\frac{dv}{d\sigma_0} = \Sigma l\xi_i M_i N_i.$$

Ce sont les coefficients ξ_i qui définissent la forme de la poire.

Parmi ces coefficients, je remarque :

1° ξ_1, qui est nul, parce que le volume de la poire est égal à celui de E_0, ce qui s'écrit $\int dv = 0$.

2° ξ_5, qui est du premier ordre.

3° ξ_3 et ξ_4, qui sont du second ordre.

4° Les autres ξ_i, qui sont du second ordre, si la fonction M_i est paire, uniforme, et d'ordre supérieur; et négligeables dans le cas contraire.

Assez fréquemment, et quand il n'en pourra résulter aucune confusion, je

supprimerai l'indice zéro et *j'écrirai simplement* $d\sigma$ *et* $\frac{dv}{d\sigma}$ *au lieu de* $d\sigma_0$ *et* $\frac{dv}{d\sigma_0}$.

Définition de la simple couche C.

Je considère la couche attirante formée par tous les petits volumes dv, et située par conséquent entre la surface de la poire et celle de E_0. Je suppose que l'on concentre toute la masse attirante située dans cette couche sur la surface de E_0; nous aurons ainsi une simple couche attirante, la densité de la matière sur l'élément $d\sigma$ étant précisément $\frac{dv}{d\sigma}$.

L'attraction de cette simple couche, que j'appelle Σ, est à très peu près égale à celle de la couche C.

Je puis considérer l'attraction due à la couche C moins l'attraction due à la couche Σ; elle peut être considérée comme due à une matière attirante en partie positive et en partie négative; c'est ce que j'appellerai la matière $\mathfrak{M}$, comprenant la couche C prise positivement et la couche Σ changée de signe.

Calcul du potentiel.

Le potentiel V pourra être décomposé en trois parties :

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

V_1 potentiel de E_0; V_2 de Σ; V_3 de $\mathfrak{M}$.

Voici quelles sont les expressions analytiques de V_1 et de V_2.

Pour V_1 :

à l'extérieur de E_0 :

$$V_1 = A_1 S_1 M_1 N_1 + A_3 S_3 M_3 N_3 + A_4 S_4 M_4 N_4,$$

à l'intérieur de E_0 :

$$V_1 = A'_1 R_1 M_1 N_1 + A'_3 R_3 M_3 N_3 + A'_4 R_4 M_4 N_4 + A'_0 H,$$

les A et les A′ étant des coefficients constants et H le premier membre de l'équation de E_0.

Rappelons que V_1 est continue ainsi que ses dérivées du premier ordre; d'où l'on peut conclure d'abord

$$A_1 S_1^0 = A'_1 R_1^0, \qquad A_3 S_3^0 = A'_3 R_3^0, \qquad A_4 S_4^0 = A'_4 R_4^0.$$

Je puis poser de même

$$y^2 + z^2 = B_1 R_1 M_1 N_1 + B_3 R_3 M_3 N_3 + B_4 R_4 M_4 N_4 + B_0 H,$$

et j'aurai entre les coefficients B et V les relations suivantes :

$$V_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2 B_0 = V_1 + \frac{1}{2}\omega_0^2 B_1 = 0;$$

$$B_0 \Delta\Pi = 4; \qquad V_0' \Delta\Pi = \Delta V_1 = -4\pi; \qquad V_0' + \pi B_0 = 0.$$

Quant à V_2, nous aurons :

à l'extérieur de E_0 :

$$V_2 = \sum \frac{4\pi}{2n+1} \xi_i R_i^0 S_i M_i N_i,$$

à l'intérieur de E_0 :

$$V_2 = \sum \frac{4\pi}{2n+1} \xi_i R_i S_i^0 M_i N_i.$$

Calcul de l'énergie.

L'énergie totale comprend :

1. *L'énergie due à l'attraction de* E_0 *sur lui-même.*
2. *L'énergie due au moment d'inertie de* E_0.

Ces deux parties ensemble forment W_0.

3. *L'énergie de* E_0 *par rapport à* Σ (plus l'énergie de rotation). Cette somme est nulle, car elle est du premier ordre par rapport aux ξ_i, et les termes du premier ordre doivent disparaître puisque E_0 est une figure d'équilibre.

4. *L'énergie de* Σ *par rapport à lui-même, qui est*, d'après le Mémoire des *Acta*, p. 318 [1] :

$$2\pi\Sigma \frac{1}{2n+1} \xi_i^2 R_i^0 S_i^0 \Omega_i, \qquad \Omega_i = \int l M_i^2 N_i^2 \, d\sigma.$$

5. *L'énergie de* E_0 *par rapport à* $\mathfrak{M}$, *plus l'énergie de rotation de* $\mathfrak{M}$; on en connaît les termes du premier ordre, qui sont nuls; ceux du second ordre, qui d'après le Mémoire des *Acta*, p. 317, sont $-2\pi \sum \frac{1}{3} \xi_i^2 R_2^0 S_2^0 \Omega_i$, mais il faut pousser le calcul plus loin; soit donc $\int \left[V_1 + \frac{1}{2}\omega_0^2 (y^2 + z^2) \right] d\tau$ cette énergie, où $d\tau$ représente l'élément de volume de $\mathfrak{M}$, de sorte que

$$d\tau = d\theta \, d\theta_1 \, d\theta_2 \sqrt{-1} (\mu^2 - \rho^2)(\rho^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2).$$

Soit $d\tau_0$ un élément de la surface de E_0, $d\sigma$ l'élément correspondant de la surface d'un ellipsoïde E homofocal à E_0 (je considère deux éléments comme correspondants quand ils ont mêmes coordonnées elliptiques μ et ν).

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 91.

Soit $d\lambda$ un élément de la courbe $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$, compris entre deux ellipsoïdes E et E′ infiniment voisins et homofocaux à E_0; nous aurons

$$d\tau = d\lambda\, d\sigma = \frac{d\theta\, d\sigma}{l}.$$

D'autre part $l\, d\sigma = l_0\, d\sigma_0$, où

$$l = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad l_0 = \frac{1}{(\rho_0^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si nous posons $\left[V_1 + \frac{1}{2}\omega_0^2(y^2 + z^2)\right] = P$,

$$d\theta = du\,\frac{(\rho_0^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} = \frac{l^2\, du}{l_0},$$

et que nous considérions un instant P comme fonction de u, nous remarquerons d'abord que $d\tau = du\, d\sigma_0$.

Développons P par la formule de Mac Laurin :

$$P = P_0 + u\frac{dP}{du} + \frac{1}{2}u^2\frac{d^2P}{du^2} + \frac{1}{6}u^3\frac{d^3P}{du^3}.$$

Il va sans dire que la variable auxiliaire u a été définie de façon à s'annuler pour $\rho = \rho_0$, et que dans P et ses dérivées on a fait $\rho = \rho_0$. Notre variable u variera donc de zéro à $\frac{dv}{d\sigma}$ quand on passera de la surface de E_0 à celle de la poire.

Alors nous avons pour la portion de l'énergie envisagée

$$\int P\, du\, d\sigma_0 = \int P_0\frac{dv}{d\sigma_0}\, d\sigma_0 + \frac{1}{2}\int \frac{dP}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma_0}\right)^2 d\sigma_0$$
$$- \frac{1}{6}\int \frac{d^2P}{du^2}\left(\frac{dv}{d\sigma_0}\right)^3 d\sigma_0 + \frac{1}{24}\int \frac{d^3P}{du^3}\left(\frac{dv}{d\sigma_0}\right)^4 d\sigma_0.$$

Le premier terme est nul $\left(\text{puisque} \int dv = 0\right)$, le second nous donnerait le terme du second ordre $-2\pi\sum\frac{1}{3}\xi_i^2 R_2^0 S_2^0 \Omega_i$, dont j'ai déjà donné l'expression d'après le Mémoire des *Acta*.

Le troisième va nous donner des termes en $\xi_5^2\xi_i$, et le quatrième un terme en ξ_5^4.

Je commence par rechercher les dérivées de P par rapport à u, en fonction des dérivées $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$.

On a

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dP}{du} = \dfrac{dP}{d\theta}\dfrac{d\theta}{du} = \dfrac{dP}{d\theta}\,l, \qquad \text{car} \quad \dfrac{d\theta}{du} = l \qquad \text{pour} \quad \rho = \rho_0; \\ \dfrac{d^2P}{du^2} = \dfrac{dP}{d\theta}\dfrac{d^2\theta}{du^2} + \dfrac{d^2P}{d\theta^2}\left(\dfrac{d\theta}{du}\right)^2; \\ \dfrac{d^3P}{du^3} = \dfrac{dP}{d\theta}\dfrac{d^3\theta}{du^3} + 3\dfrac{d^2P}{d\theta^2}\dfrac{d\theta}{du}\dfrac{d^2\theta}{du^2} + \dfrac{d^3P}{d\theta^3}\left(\dfrac{d\theta}{du}\right)^3. \end{cases}$$

Tout ce que je veux retenir pour le moment est que $\dfrac{d\theta}{du}$, $\dfrac{d^2\theta}{du^2}$, $\dfrac{d^3\theta}{du^3}$ sont des fonctions de μ^2 et de ν^2 symétriques, paires et *uniformes* (je veux dire par ce dernier mot qu'elles ne changent pas quand μ^2 ou ν^2 tournent autour des valeurs singulières a^2, b^2 ou c^2). Leur développement en séries de Lamé ne contiendra donc que des fonctions de Lamé paires et uniformes. Il en sera de même pour $\dfrac{d\rho}{du}$, $\dfrac{d^2\rho}{du^2}$, $\dfrac{d^3\rho}{du^3}$ qui entrent dans les formules

$$(1\ bis)\qquad \frac{dP}{du} = \frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{du}, \qquad \frac{d^2P}{du^2} = \frac{dP}{d\rho}\frac{d^2\rho}{du^2} + \frac{d^2P}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2, \qquad \ldots.$$

Nous supposons bien entendu dans les formules (1) et (1 *bis*) qu'on remplace partout ρ par ρ_0 à la fin du calcul.

Une autre difficulté provient de ce que P n'a pas la même expression analytique à l'intérieur ou à l'extérieur de E_0.

Si la couche était tout entière à l'intérieur de E_0 $\left(\text{ce qui ne pourrait avoir lieu que si l'on renonçait à l'hypothèse } \int dv = 0\right)$, nous pourrions réduire P à H, à un facteur constant près, nous aurions en effet :

$$P = \left(A'_1 + \frac{1}{2}\omega_0^2 B_1\right) R_1 M_1 N_1 + \left(A'_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2 B_0\right) H,$$

le premier terme se réduit à une constante qui n'a pas de dérivées.

H est aisé de voir que $\dfrac{dH}{d\rho}$ se réduit à un terme en ρ; de sorte que

$$\frac{dH}{d\rho} = \rho\frac{d^2H}{d\rho^2}, \qquad \frac{d^3H}{d\rho^3} = 0.$$

Nos intégrales se réduiraient donc, à un facteur constant près, à

$$\frac{1}{6}\int \frac{d^2H}{d\rho^2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma\left[\rho_0\frac{d^2\rho}{du^2} + \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2\right] + \frac{1}{24}\int \frac{d^2H}{d\rho^2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma\left[\rho_0\frac{d^3\rho}{du^3} + 3\frac{d\rho}{du}\frac{d^2\rho}{du^2}\right].$$

J'écris $d\sigma$ au lieu de $d\sigma_0$, en supprimant l'indice zéro, devenu inutile.

Remarquons que les quantités entre crochets sont les dérivées première et seconde de $\rho\dfrac{d\rho}{du}$.

Remarquons en outre que

$$\frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = -\frac{4\pi}{3l}R_2^0 S_2^0,$$

que $\frac{d\rho}{du}$ est proportionnel à l, et par conséquent $\frac{dP}{d\rho}$ et $\frac{d^2H}{d\rho^2}$ à $\frac{1}{l^2}$.

Les termes qui nous intéressent sont donc :

1° Dans $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2$ les termes $3\xi_5^2\Sigma\xi_i M_i^2 N_5^2 M_i N_i l^3$ qui donnent

$$\sum \frac{1}{2}\xi_5^2\xi_i \int \frac{d^2P}{d\rho^2}\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) M_5^2 N_5^2 M_i N_i l^3\, d\sigma.$$

Il suffira de prendre les fonctions $M_i N_i$ qui sont paires et uniformes, puisque les développements de $M_5^2 N_5^2$, $l^3\frac{d^2P}{d\rho^2}$ n'en contiennent pas d'autres. Si l'on se borne aux formules précédentes, où P est regardé comme proportionnel à H, nous pourrons poser

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} = H_0\frac{1}{l^2},$$

M_0 étant une constante; si nous développons alors

$$H_0\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) M_5^2 N_5^2 = \Sigma\eta_i M_i N_i$$

en série de Lamé, on aura, pour les termes en question : $\sum \frac{1}{2}\xi_5^2\xi_i\eta_i\Omega_i$.

Malheureusement toute la masse $\mathfrak{M}$ n'est pas à l'intérieur de E_0, c'est donc $l^2\frac{d^2P}{du^2}M_5^2N_5^2$ qu'il faudrait développer; et cette expression n'est égale à $M_0\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)M_5^2N_5^2$ que pour les points intérieurs à E_0.

2° Dans $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4$ le terme $\xi_5^4 l^4 M_5^4 N_5^4$ qui donne

$$\frac{1}{24}\xi_5^4 \int \frac{d^2P}{d\rho^2} l^4 \frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) M_5^4 N_5^4\, d\sigma.$$

Nous reviendrons sur tous ces points plus en détail.

6. *L'énergie de* Σ *par rapport à* $\mathfrak{M}$.

C'est $\int V_2\, d\tau$ étendu à $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire étendu à C en supprimant ensuite les termes du second degré; cela fait, puisque

$$\int V_2\, d\tau = \int V_2\, du\, d\sigma = \int V_2\frac{dv}{d\sigma}d\sigma + \frac{1}{2}\int \frac{dV_2}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \frac{1}{6}\int \frac{d^2V_2}{du^3}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma,$$

cela fait, dis-je, puisqu'on doit supprimer les termes du second degré :

$$\frac{1}{2}\int \frac{dV_2}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \frac{1}{6}\int \frac{d^2V_2}{du^2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma.$$

Les dérivées $\frac{dV_2}{du}\cdots$ se calculeraient comme $\frac{dP}{du}\cdots$, et l'on y ferait à la fin du calcul $\rho = \rho_0$.

Les termes qui nous intéressent sont :

dans $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2$:

$$2l^2\Sigma\xi_i\xi_5 M_5 N_5 M_i N_i \quad \text{et} \quad l^2\xi_5^2 M_5^2 N_5^2;$$

dans $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3$:

$$l^3\xi_5^3 M_5^3 N_5^3.$$

Quant à V_2 nous devons distinguer le cas où $\mathfrak{M}$ est intérieur à E_0, et celui où $\mathfrak{M}$ est extérieur à E_0.

Dans le premier cas les termes intéressants sont :

$$\int l^2 \frac{4\pi}{7}\sum \xi_i\xi_5^2 M_5^2 N_5^2 M_i N_i R'_5 S_5 \frac{d\theta}{du} d\sigma + \sum \int l^2 \frac{2\pi}{2n+1}\xi_i\xi_5^2 M_5^2 N_5^2 M_i N_i R'_i S_i \frac{d\theta}{du} d\sigma$$
$$+ \frac{1}{6}\int l^3\xi_5^3 M_5^3 N_5^3 \frac{4\pi}{7}\left[R'_5 S_5 \frac{d^2\theta}{du^2} + R''_5 S_5\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\right] d\sigma.$$

Dans le second cas ils deviennent

$$\int l^2 \frac{4\pi}{7}\sum \xi_i\xi_5^2 M_5^2 N_5^2 M_i N_i R_5 S'_5 \frac{d\theta}{du} d\sigma + \sum \int l^2 \frac{2\pi}{n+1}\xi_i\xi_5^2 M_5^2 N_5^2 M_i N_i R_i S'_i \frac{d\theta}{du} d\sigma$$
$$\frac{1}{6}\int l^3\xi_5^3 M_5^3 N_5^3 \frac{4\pi}{7}\left[R_5 S'_5 \frac{d^2\theta}{du^2} + R_5 S''_5\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\right] d\sigma.$$

Si $\mathfrak{M}$ est en partie extérieure et en partie intérieure à E_0, il faudra employer une formule mixte.

7. *L'énergie de* $\mathfrak{M}$ *par rapport à* $\mathfrak{M}$.

Pour l'obtenir il faut calculer le potentiel de $\mathfrak{M}$ et d'abord revenir sur l'étude du potentiel d'une double couche [1].

Considérons une double couche très mince, mais non infiniment mince. Elle se compose de deux surfaces attirantes, Σ et Σ', très peu différentes l'une de l'autre. Je considère une série de courbes que j'appelle C, de façon que par chaque point de l'espace passe une courbe C et une seule. Ordinairement on

[1] Je prie le lecteur de bien remarquer que pendant quelques pages, et jusqu'à nouvel avertissement, beaucoup de lettres n'ont plus la même signification que dans ce qui précède et dans ce qui suit.

prend pour les courbes C les normales à Σ. Dans les applications qui vont suivre, je prendrai les courbes $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$

Deux points de Σ et de Σ', se trouvant sur une même courbe C, sont dits *correspondants*. L'hypothèse qui sert de définition à la double couche est que les masses attirantes qui se trouvent sur un élément de Σ et sur l'élément correspondant de Σ' sont égales et de signe contraire.

Cela posé, soit M un point de Σ, M' le point correspondant de Σ', soient V et V' le potentiel de la double couche en M et en M'. Il s'agit d'évaluer la différence $V - V'$.

1° Dans le cas où la double couche est infiniment mince, on a par un théorème bien connu

$$V - V' = 4\pi\delta\, MM' \cos\gamma,$$

δ étant la densité de la matière au point M, MM' la distance des deux points correspondants M et M', γ l'angle de la courbe C avec la normale à Σ.

Je rappelle d'ailleurs que si la courbe C est normale aux deux surfaces, c'est-à-dire si $\gamma = 0$, la dérivée normale $\frac{dV}{dn}$ est continue, même quand on franchit la double couche; et que par conséquent cette dérivée a même valeur à des infiniment petits près en deçà des deux surfaces, et au delà des deux surfaces.

2° Supposons maintenant que la double couche soit très mince, mais non infiniment mince. Nous la décomposerons en une infinité de doubles couches infiniment minces. Pour cela entre Σ et Σ' nous ferons passer une infinité de surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ (n très grand). Soit E un élément de Σ, et $E_1, E_2, \ldots, E_n$, E' les éléments correspondants de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \Sigma'$. Nous avons sur E une masse μ et sur E' une masse $-\mu$. Plaçons sur E_1 une masse $-\mu$ et une masse μ qui se détruiront; faisons de même pour $E_2, E_3, \ldots, E_n$. Associons la masse $-\mu$ de E_1 avec la masse μ de E, faisons de même pour tous les autres éléments de E, nous obtiendrons une double couche formée par les deux surfaces Σ et Σ_1; je l'appelle K_1. De même en combinant la masse $-\mu$ de E_2 avec la masse μ de E_1, j'aurai une seconde double couche que j'appelle K_2, et ainsi de suite jusqu'à la double couche K_n due aux masses $-\mu$ de E_n et μ de E_{n-1}, et à la double couche K_{n+1} due aux masses $-\mu$ de E' et μ de E_n.

La double couche proposée est donc remplacée par $n+1$ *doubles couches élémentaires*.

Soit alors v et v' les potentiels aux points M et M' d'une double couche élé-

mentaire K; soient P et P′ les points où la courbe C qui joint M à M′ perce les deux surfaces de cette double couche élémentaire K. Soient w et w' les potentiels de K aux points P et P′. Soit dl un élément de la ligne C, et $\frac{dv}{dl}$ la dérivée du potentiel de K le long de cette ligne, nous aurons

$$w - w' = 4\pi\,\delta_1\,\mathrm{PP}'\cos\gamma_1.$$

δ_1 étant la densité au point P et γ_1 l'angle de C avec la normale

$$v - w = -\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}} \frac{dv}{dl}\,dl, \qquad w' - v' = -\int_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{M}'} \frac{dv}{dl}\,dl.$$

Je puis donc écrire

$$v - v' = 4\pi\,\delta_1\,\mathrm{PP}'\cos\gamma_1 - \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \frac{dv}{dl}\,dl,$$

parce que l'arc PP′ est très petit par rapport à MM′, à la condition d'attribuer sur cet arc à $\frac{dv}{dl}$ la même valeur qu'au point P en dehors de la double couche. On peut observer que si $d\sigma$ est un élément de la surface Σ, $d\sigma_1$ l'élément correspondant de la surface à laquelle appartient P, on aura

$$\delta\,d\sigma = \delta_1\,d\sigma_1.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{V} = \Sigma v, \qquad \mathrm{V}' = \Sigma v';$$

d'où

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}' = 4\pi\,\delta\,\Sigma\,\mathrm{PP}'\cos\gamma_1\,\frac{d\sigma}{d\sigma_1} - \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \sum \frac{dv}{dl}\,dl.$$

Le premier terme est de l'ordre de $\Sigma\,\mathrm{PP}' = \mathrm{MM}'$. Le second est de l'ordre de $(\mathrm{MM}')^2$; car $\frac{dr}{dl}$ est de l'ordre de PP′ et $\sum \frac{dv}{dl}$ de l'ordre de $\Sigma\,\mathrm{PP}' = \mathrm{MM}'$. Nous pousserons l'approximation jusqu'à $(\mathrm{MM}')^2$. Si comme nous le supposons la courbe C est normale à Σ, l'angle γ_1 sera de l'ordre de MM′; nous pourrons donc remplacer $\cos\gamma_1$ par 1, l'erreur commise sur $\mathrm{V} - \mathrm{V}'$ sera de l'ordre de $(\mathrm{MM}')^3$. Maintenant $\sum \frac{dv}{dl}$ sera sensiblement constant et égal à $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$, c'est-à-dire à la dérivée de V estimée suivant la normale au point M et du côté extérieur à la double couche comprise entre les deux surfaces Σ et Σ'.

Appliquons cela à l'évaluation du potentiel de $\mathfrak{M}$. et pour cela revenons encore à notre double couche $\Sigma\Sigma'$; soit M″ un point de C compris entre M et M′; soit v'' le potentiel de la double couche élémentaire K au point M″. $\mathrm{V}'' = \Sigma v''$ le potentiel de la double couche totale.

Supposons d'abord que M″ soit entre P′ et M′, nous aurons

$$v - w = -\int_{M}^{P} \frac{dv}{dl} dl, \qquad w' - v'' = -\int_{P'}^{M''} \frac{dv}{dl} dl;$$

d'où

$$v - v'' = 4\pi\delta_1 PP' \cos\gamma_1 - \int_{M}^{M''} \frac{dv}{dl} dl.$$

Si M″ est entre M et P, nous aurons simplement

$$v - v'' = -\int_{M}^{M''} \frac{dv}{dl} dl.$$

Nous aurons donc encore

$$V - V'' = 4\pi\delta \sum PP' \cos\gamma_1 \frac{d\sigma}{d\sigma_1} - \int_{M}^{M''} \sum \frac{dv}{dl} dl,$$

mais avec cette condition que dans le premier terme du second membre la sommation ne doit être étendue qu'aux doubles couches élémentaires comprises entre M et M″. On aura comme plus haut

$$\sum \frac{dv}{dl} = \frac{dV}{dn}, \qquad \cos\gamma_1 = 1.$$

D'autre part

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = 1 + \frac{MP}{MM'}\left[\frac{d\sigma}{d\sigma'} - 1\right],$$

d'où nous tirerons

$$V - V'' = 4\pi\delta MM'' + 2\pi\delta \frac{MM''^2}{MM'}\left[\frac{d\sigma}{d\sigma'} - 1\right] - \frac{dV}{dn} MM''.$$

Nous poserons d'ailleurs

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} - 1 = kMM'$$

de façon que k soit fini, et que

$$V - V'' = 4\pi\delta MM'' + 2\pi k\delta (MM'')^2 - \frac{dV}{dn} MM''.$$

Si le point M″ est au delà de M′, on aura

$$V - V'' = 4\pi\delta MM' + 2\pi k\delta (MM')^2 - \frac{dV}{dn} MM'',$$

et s'il est en deçà de M :

$$V - V'' = -\frac{dV}{dn} MM''.$$

Cela posé, partageons la couche C, qui est comprise entre la surface de E_0 et celle de la poire, en couches infiniment minces par une série de surfaces très rapprochées, que j'appelle A_0, A_1, A_2, ..., A_n; A_0 coïncidera avec E_0 et A_n avec la surface de la poire. J'appelle C_p la couche comprise entre A_{p-1} et A_p.

Je suppose que l'on concentre la masse de C_p sur E_0 en suivant les lignes $\mu, \nu = \text{const.}$, qui jouent ici le rôle que jouaient tout à l'heure les courbes C. J'appelle Σ_p la simple couche ainsi obtenue. Alors Σ est la somme de toutes les simples couches Σ_p. L'attraction de C_p, moins celle de Σ_p, est l'attraction d'une double couche D_p, et il est clair que $\mathfrak{M}$ est équivalent à l'ensemble de ces doubles couches.

Soit v le potentiel dû à l'une des doubles couches D_p, soit δ_p la densité de Σ_p en un point M de E_0; soit P un point de A_p et M'' un point quelconque de $\mathfrak{M}$, M' un point de la surface de la poire. Les quatre points M, P, M' et M'' sont supposés situés sur une même courbe $\mu, \nu = \text{const.}$ Si alors v et v'' sont les valeurs de v en M et en M'', nous aurons

$$v - v'' = 4\pi\,\delta_p\,\mathrm{MM''} + 2\pi k\,\delta_p\,\mathrm{MM''}^2 - \frac{dv}{dn}\,\mathrm{MM''}$$

si M'' est entre M et P; et

$$v - v'' = 4\pi\,\delta_p\,\mathrm{MP} + 2\pi v\,\delta_p(\mathrm{MP})^2 - \frac{dv}{dn}\,\mathrm{MM''}$$

si P est entre M et M''.

Soit $V = \Sigma v$ et $V'' = \Sigma v''$ les valeurs du potentiel de $\mathfrak{M}$ en M et en M'', nous aurons

$$V - V'' = 4\pi[\Sigma'\,\delta_p\,\mathrm{MM''} + \Sigma''\,\delta_p\,\mathrm{MP}] + 2\pi k[\Sigma'\,\delta_p(\mathrm{MM''})^2 + \Sigma''\,\delta_p(\mathrm{MP})^2] - \frac{dV}{dn}\,\mathrm{MM''}.$$

Nous remarquerons dans les parenthèses du second membre deux signes de sommation différents Σ' et Σ''; le premier Σ' s'étendra à toutes les doubles couches situées entre M'' et la poire, le second Σ'' à toutes les doubles couches situées entre M'' et l'ellipsoïde E_0. Nous conserverons le signe Σ pour les sommations étendues à toutes les doubles couches.

Posons alors $\mathrm{MP} = l$, de sorte que $-\delta_p\,d\sigma$ qui représente la masse de la partie de la couche C_p qui correspond à l'élément $d\sigma$ sera $d\sigma_p\,dl$, $d\sigma_p$ étant l'élément de A_p qui correspond à $d\sigma$; or

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_p} - 1 = kl, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\sigma}{d\sigma_p} = \frac{1}{1+kl} = 1 - kl;$$

d'où enfin

$$\delta_p = -(1 - kl)\,dl.$$

$$\Sigma'\,\delta_p\,\mathrm{MM''} = \mathrm{MM''}\left[\left(\frac{1}{2}k(\mathrm{MM})'^2 - \mathrm{MM'}\right) - \left(\frac{1}{3}k(\mathrm{MM''})^2 - \mathrm{MM''}\right)\right],$$

$$\Sigma''\,\delta_p\,\mathrm{MP} = \frac{1}{3}k(\mathrm{MM''})^3 - \frac{1}{2}(\mathrm{MM''})^2,$$

$$\Sigma''\,\delta(\mathrm{MP})^2 = \frac{1}{4}k(\mathrm{MM''})^4 - \frac{1}{3}(\mathrm{MM''})^3,$$

et si nous posons un instant pour abréger

$$MM' = \varepsilon, \qquad MM'' = \zeta,$$

il viendra

$$V - V'' = 4\pi\zeta\left(\frac{1}{2}k\varepsilon^2 - \varepsilon - \frac{1}{2}k\zeta^2 + \zeta\right)$$
$$+ 4\pi\left(\frac{1}{3}k\zeta^3 - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + 2\pi k\zeta^2(\zeta - \varepsilon) - \frac{2}{3}\pi k\zeta^3 - \zeta\frac{dV}{dn}$$

ou

$$V - V'' = 4\pi\left(\frac{1}{2}\zeta^2 - \zeta\varepsilon\right) + 2\pi k\left(\frac{1}{3}\zeta^3 - \zeta^2\varepsilon + \zeta\varepsilon^2\right) - \zeta\frac{dV}{dn}.$$

L'énergie de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$ sera représentée par l'intégrale $\frac{1}{2}\int(V'' - V)\,d\tau$, étendue à tous les éléments $d\tau$ de C.

Or si par M'' je fais passer l'une de ces surfaces très peu différentes de Σ, et qui me servaient tout à l'heure à définir mes doubles couches, si j'appelle $d\sigma''$ l'élément de cette surface correspondant à $d\sigma$, nous aurons

$$d\tau = d\sigma''\,dMM'' = d\sigma''\,d\zeta \qquad \text{et} \qquad d\sigma'' = d\sigma(1 - k\zeta).$$

L'intégrale à chercher est donc

$$\int d\sigma\,d\zeta\left[2\pi\left(\zeta\varepsilon - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \pi k\left(\zeta^2\varepsilon - \zeta\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\zeta^3\right) - 2\pi k\zeta\left(\zeta\varepsilon - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \frac{1}{2}\zeta\frac{dV}{dn}\right],$$

et elle doit être prise par rapport à ζ entre zéro et ε; on trouve ainsi

$$\int\left(\frac{2}{3}\pi\varepsilon^3 - \frac{2}{3}\pi k\varepsilon^4 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\frac{dV}{dn}\right)d\sigma.$$

Pour rendre la formule comparable à celles qui précèdent, il faut exprimer ε et k en fonctions de $\frac{dv}{d\sigma}$ et de $\frac{d\sigma}{du}, \frac{d\theta}{du}, \ldots$

Nous avons d'abord

$$dv = \int d\tau = d\sigma\int_0^\varepsilon(1 - k\zeta)\,d\zeta = \varepsilon - \frac{1}{2}k\varepsilon^2,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{dv}{d\sigma} + \frac{1}{2}k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2, \qquad \varepsilon^3 = \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 + \frac{3}{2}k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4,$$

et pour l'intégrale de l'énergie :

$$\int d\sigma\left[\frac{2}{3}\pi\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 + \frac{1}{3}\pi k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \frac{1}{4}\frac{dV}{dn}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2\right].$$

Observons que le calcul a été fait dans l'hypothèse où la surface de la poire

est extérieure à celle de E_0. Dans l'hypothèse contraire, il faudrait changer le signe des deux premiers termes et écrire

$$\int d\sigma \left[-\frac{2}{3}\pi \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 - \frac{1}{3}\pi k \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \frac{1}{4}\frac{dV}{dn}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 \right].$$

Il reste à calculer k. Reprenons la lettre l dans son sens primitif, de sorte que

$$l = \frac{1}{(\rho^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad l_0 = \frac{1}{(\rho_0^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{l^2}{l_0}.$$

Nous savons que k est défini par la relation

$$\frac{d\sigma''}{d\sigma} = 1 - k\zeta,$$

si nous reprenons les notations employées plus haut, nous devrons écrire u au lieu de ζ, $d\sigma$ au lieu de $d\sigma''$ et $d\sigma_0$ au lieu de $d\sigma$, et notre relation deviendra

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = 1 - ku, \qquad \text{or} \qquad \frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{l_0}{l},$$

on a donc

$$k = +\frac{l_0}{\rho^2}\frac{dl}{du}, \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{2l}{l_0}\frac{dl}{du},$$

et enfin, puisque sur E_0 on a $l = l_0$:

$$k = +\frac{1}{2l}\frac{d^2\theta}{du^2} \quad (^1).$$

Cela posé, dans notre intégrale les termes qui nous intéressent sont :

1° Dans $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3$ les termes $3\xi_5^2 \Sigma \xi_i M_5^2 N_5^2 M_i N_i l^3$, qui donnent

$$\Sigma 2\pi \xi_5^2 \xi_i \int M_5^2 N_5^2 M_i N_i l^3 \, d\sigma$$

(j'écris $d\sigma$ en supprimant l'indice zéro devenu inutile).

2° Dans $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4$ le terme $\xi_5^4 l^4 M_5^4 N_5^4$ qui donne

$$+\frac{1}{6}\pi \xi_5^4 \int \frac{d^2\theta}{du^2} l^3 M_5^4 N_5^4 \, d\sigma.$$

---

(1) Je puis donc ici reprendre toutes les notations du début de ce travail, et que j'avais abandonnées momentanément, ainsi qu'il est expliqué dans la note de la page 174. On observera que k est une constante généralement négative.

3° Enfin dans $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 \frac{dV}{du}$ le terme intéressant se calculera en supposant tous les ξ nuls, sauf ξ^5.

C'est la portion de l'énergie de la double couche que nous avons calculée au début de ce travail; nous n'avons donc qu'à appliquer la formule établie au début.

D'après cette formule, si $\delta = \Sigma \mathrm{BMN}$ est la densité de la double couche, cette portion de l'énergie sera

$$-2\pi \sum \frac{\mathrm{B}^2 \mathrm{R}' \mathrm{S}'}{2n+1} \int l^2 \mathrm{MN}^2 \, d\sigma.$$

Mais ici

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 = \frac{1}{2} l^2 \xi_5^2 \mathrm{M}_5^2 \mathrm{N}_5^2.$$

Si donc

$$l^2 \mathrm{M}_5^2 \mathrm{N}_5^2 = \Sigma \beta \mathrm{MN},$$

alors la portion cherchée de l'énergie sera

$$\frac{1}{2} \pi \xi_5^4 \sum \frac{\beta^2 \mathrm{R}' \mathrm{S}'}{2n+1} \int l \mathrm{M}^2 \mathrm{N}^2 \, d\sigma.$$

Unification des formules.

Une difficulté provient de ce que quelques-unes des formules précédentes ont une forme analytique différente, suivant que l'élément $d\sigma$ de la surface de E_0 est au-dessous ou au-dessus de la poire. Il est permis toutefois de prévoir qu'il doit y avoir compensation, et que dans la formule finale nous retomberons toujours sur la même forme analytique. Il reste à voir comment se fait cette compensation.

Les termes d'où provient la difficulté sont (outre ceux dus à l'action de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$) :

1° L'énergie de E_0 sur $\mathfrak{M}$ dont l'expression est

$$\int \mathrm{P} \frac{dv}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathrm{P}}{du} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \frac{1}{6} \int \frac{d^2\mathrm{P}}{du^2} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma + \frac{1}{24} \int \frac{d^3\mathrm{P}}{du^3} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma.$$

2° L'énergie de Σ sur $\mathfrak{M}$ dont l'expression est

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\mathrm{V}_2}{du} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \frac{1}{6} \int \frac{d^2\mathrm{V}^2}{du^2} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma.$$

J'observe que V_1, $\frac{d\mathrm{V}_1}{du}$, V_2 sont continus quand on franchit la surface de E_0 et qu'il est de même de

$$\mathrm{P} - \mathrm{V}_1 = \frac{1}{2} \omega_0^2 (y^2 + z^2)$$

et de toutes ses dérivées. Si donc j'appelle $D\frac{dV_1}{du^2}$, $D\frac{d^3V_1}{du^3}$, $D\frac{dV_2}{du}$, $D\frac{d^2V_2}{du^2}$ les sauts brusques subis par $\frac{d^2V_1}{du^2}$ quand on franchit cette surface, du dedans au dehors, la différence entre les deux formules qu'il s'agit de comparer sera

$$\frac{1}{6}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 D\frac{d^2V_1}{du^2}\,d\sigma + \frac{1}{24}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 D\frac{d^2V_1}{du^3}\,d\sigma$$

pour l'action de E_0 sur $\mathfrak{M}$, et

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 D\frac{dV_2}{du}\,d\sigma + \frac{1}{6}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 D\frac{d^2V_2}{du^2}\,d\sigma$$

pour l'action de Σ sur $\mathfrak{M}$.

Calcul de $D\frac{d^2V_1}{du^2}$.

Nous nous servirons pour ce calcul de l'équation suivante :

$$D\Delta V_1 = 4\pi,$$

puisque $\Delta V_1 = 0$ à l'extérieur, et -4π à l'intérieur.

Or si nous nous rappelons l'expression de ΔV_1 et que le D de $\frac{dV_1}{d\mu}$, $\frac{d^2V_1}{d\mu^2}$, $\frac{dV_1}{d\nu}$, $\frac{d^2V_1}{d\nu^2}$ est nul, ainsi que celui de $\frac{dV_1}{d\rho}$, il vient

$$ABC.D\Delta V_1 = D\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho}\right) = \frac{BC}{A}D\frac{d^2V_1}{d\rho^2},$$

d'où

$$D\frac{d^2V_1}{d\rho^2} = A^2\,D\Delta V_1 = 4\pi A^2.$$

Donc

$$D\frac{d^2V_1}{du^2} = \frac{d^2\rho}{du^2}D\frac{dV_1}{d\rho} = \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 D\frac{d^2V_1}{d\rho^2} = 4\pi A^2\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = 4\pi.$$

Calcul de $D\frac{d^3V_1}{du^3}$.

Calculons d'abord $D\frac{d^3V_1}{d\rho^3}$; pour cela nous nous servirons de

$$D\frac{d\Delta V_1}{d\rho} = 0.$$

Si nous observons que

$$D\frac{d^2V_1}{d\mu^2} = D\frac{dV_1}{d\mu} = D\frac{d^2V_1}{d\mu\,d\rho} = D\frac{d^3V_1}{d\mu^2\,d\rho} = 0,$$

et de même pour les dérivées correspondantes par rapport à ν, je puis écrire

$$D\frac{d\Delta V_1}{d\rho} = D\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{ABC}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho}\right)\right].$$

Mais d'ailleurs on a

$$A\,d\rho = \frac{d\theta}{l} = du\frac{l}{l_0}, \qquad BC = H\frac{1}{l},$$

H étant indépendant de ρ; nous pouvons donc écrire

$$\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho} = \frac{H l_0}{l^2}\frac{dV_1}{du}, \qquad \frac{1}{ABC}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho}\right) = \frac{l_0}{H}\frac{d}{du}\left(\frac{H l_0}{l^2}\frac{dV_1}{du}\right) = l_0^2\frac{d}{du}\left(\frac{dV_1}{l^2\,du}\right);$$

$$0 = D\frac{d\Delta V_1}{du} = l_0^2 D\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{dV_1}{l^2\,du}\right), \qquad \frac{1}{l^2}D\frac{d^3V_1}{du^3} - \frac{4\,dl}{l^3\,du}D\frac{d^2V_1}{du^2} = 0,$$

d'où enfin

$$D\frac{d^3V_1}{du^3} = \frac{4\,dl}{l\,du}4\pi = +16\pi k.$$

Calcul de $D\frac{dV_2}{du}$.

D'après la propriété fondamentale des surfaces attirantes, on a

$$D\frac{dV_2}{du} = -4\pi\frac{dv}{d\sigma}.$$

Calcul de $D\frac{d^2V_2}{du^2}$.

Pour ce calcul nous nous servirons de

$$0 = D\Delta V_2 = D\left[\frac{1}{ABC}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_2}{d\rho}\right)\right] = l_0^2 D\frac{d}{du}\left(\frac{dV_2}{l^2\,du}\right),$$

$$\frac{1}{l^2}D\frac{d^2V_2}{du^2} - \frac{2\,dl}{l^3\,du}D\frac{dV_2}{du} = 0;$$

d'où enfin

$$D\frac{d^2V_2}{du^2} = -4\pi\frac{dv}{d\sigma}\frac{2\,dl}{l\,du} = -8\pi k\frac{dv}{d\sigma}.$$

En résumé la différence entre les deux formules qu'il s'agit d'identifier sera :

1° Pour l'action de E sur $\mathfrak{M}$:

$$\frac{1}{6}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 D\frac{d^2V_1}{du^2}d\sigma + \frac{1}{24}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^5 D\frac{d^3V_1}{du^3}d\sigma = \frac{2}{3}\pi\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma + \frac{2}{3}\pi\int k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma.$$

2° Pour l'action de Σ sur $\mathfrak{M}$:

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 \mathrm{D}\frac{\mathrm{V}}{du}\alpha\sigma + \frac{1}{6}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 \mathrm{D}\frac{d^2\mathrm{V}_2}{du^2}\,d\sigma = -2\pi\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma - \frac{4}{3}\pi\int k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma.$$

3° Pour l'action de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned}
&\int d\sigma\left[\quad\frac{2}{3}\pi\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 + \frac{1}{3}\pi k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \frac{1}{4}\frac{d\mathrm{V}}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2\right]\\
&-\int d\sigma\left[-\frac{2}{3}\pi\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 - \frac{1}{3}\pi k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \frac{1}{4}\frac{d\mathrm{V}}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2\right]\\
&\quad = \frac{4}{3}\pi\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma + \frac{2}{3}\pi\int k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma,
\end{aligned}$$

soit au total zéro.

Nous pourrons donc employer indifféremment l'une ou l'autre formule sans nous inquiéter de savoir si la poire est au-dessus ou au-dessous de l'ellipsoïde, pourvu que l'on se serve des formules correspondantes pour le calcul de tous les termes.

Nous choisirons désormais l'hypothèse intérieure.

Groupement des formules.

Nous allons maintenant grouper les termes de même forme, afin d'additionner leurs coefficients.

Nous avons d'abord à envisager les termes en $\xi_i\xi_5^2$; le premier que nous trouvons est

$$\frac{1}{2}\xi_5^2\xi_i\int\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)\mathrm{M}_5^2\mathrm{N}_5^2\mathrm{M}_i\mathrm{N}_i l^3\,d\sigma.$$

Nous avons posé

$$\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2} = \frac{\mathrm{H}_0}{\rho^2},$$

H_0 étant une constante. Nous avons d'autre part

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{du} = \frac{(\rho^2-a^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}\,\frac{(\rho_0^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)} = \frac{f(\rho)}{\rho}\frac{l^2}{l_0}$$

en désignant par $f(\rho)$ une fonction de ρ et par l_0 ce que devient l pour $\rho=\rho_0$. Nous déduisons de là

$$\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = f'(\rho)\frac{d\rho}{du}\frac{l^2}{l_0} + f(\rho)\frac{2l\dfrac{dl}{du}}{l_0} = \frac{ff'}{l}\frac{l^4}{l_0^2} + 2f(\rho)\frac{l\dfrac{dl}{du}}{l_0}$$

et pour $\rho=\rho_0$:

$$\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{ff'}{\rho}l^2 + 2f(\rho)\frac{dl}{du}.$$

Qu'est-ce maintenant que $\frac{dl}{du}$ pour $\rho = \rho_0$?

On trouve

$$\frac{dl}{du} = \frac{dl}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = \frac{f(\rho)}{\rho}\frac{dl}{d\rho}\frac{l^2}{l_0} = \frac{f(\rho)}{\rho}\, l\,\frac{dl}{d\rho}.$$

Calculons encore la dérivée seconde $\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)$. Nous venons de trouver

$$\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{ff'}{\rho}\frac{l^4}{l_0^2} + \frac{2f^2}{\rho}\frac{l^3\frac{dl}{d\rho}}{l_0^2}.$$

On trouve de même

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{ff'}{\rho}\right)\frac{f}{\rho}\frac{l^5}{l_0^3} + \left(\frac{8f^2f'}{\rho^2} - \frac{2f^3}{\rho^3}\right)\frac{l^5\frac{dl}{d\rho}}{l_0^3} + \frac{6f^3}{\rho^2}\frac{l^5\left(\frac{dl}{d\rho}\right)^2}{l_0^3} + \frac{2f^3}{\rho^2}\frac{l^5\frac{d^2l}{d\rho^2}}{l_0^3}$$

ou pour $\rho = \rho_0$:

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{f}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{ff'}{\rho}\right)l^3 + \left(\frac{8f^2f'}{\rho^2} - \frac{2f^3}{\rho^3}\right)l^2\frac{dl}{d\rho} + \frac{2f^3}{\rho^2}\left[3l\left(\frac{dl}{d\rho}\right)^2 + l^2\frac{d^2l}{d\rho^2}\right].$$

Posons

$$\Pi_0\frac{ff'}{\rho} = \mathfrak{A}_1, \qquad \Pi_0\frac{f^2}{\rho} = \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{B}$ seront des constantes dépendant seulement de ρ et faciles à calculer. On aura, pour $\rho = \rho_0$:

$$\Pi_0\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \mathfrak{A}_1 l^2 + 2\mathfrak{B}\, l\frac{dl}{d\rho}.$$

Or nous avons posé plus haut :

$$\Pi_0\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)M_5^2N_5^2 = \Sigma\eta_i M_i N_i$$

et nous avons trouvé que le coefficient cherché était égal à $\frac{1}{2}\eta_i\Omega_i$; nous avons posé un peu plus loin

$$l^2M_5^2N_5^2 = \Sigma\beta_i M_i N_i.$$

En rapprochant toutes ces formules, nous trouvons

$$\eta_i = \mathfrak{A}_1\beta_i + \mathfrak{B}\frac{d\beta_i}{d\rho}.$$

Nous avons trouvé ensuite comme terme en $\xi_i\zeta_5^2$:

$$\frac{4\pi}{7}\int l^2M_5^2N_5^2M_iN_i\frac{d\theta}{du}R'_5S_5\,d\sigma + \frac{2\pi}{2n+1}R'_iS_i\int l^2M_5^2N_5^2M_iN_i\frac{d\theta}{du}\,d\sigma.$$

Si nous observons que $\frac{dl}{du}$ se réduit à l pour $\rho = \rho_0$, nous trouverons pour le coefficient en question :

$$\pi\beta_i\Omega_i\left(\frac{4}{7}R'_5S_5 + \frac{2}{2n+1}R'_iS_i\right).$$

Enfin dans l'énergie de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$ nous avons encore un terme en $\xi_i\xi_5^2$, qui a pour coefficient

$$-2\pi\int M_5^2N_5^2M_iN_il^3\,d\sigma = -2\pi\beta_i\Omega_i.$$

Je prends le signe — parce que j'ai adopté l'hypothèse d'après laquelle $\mathfrak{M}$ est intérieur à E_0.

En réunissant tous ces termes, je trouve que le coefficient définitif de $\xi_i\xi_5^2$ est

$$\beta_i\Omega_i\left(\mathfrak{A}_1 + \frac{4}{7}\pi R'_5S_5 + \frac{2}{2n+1}\pi R'_iS_i + 2\pi\right) + \mathfrak{B}\Omega_i\frac{d\Gamma_i}{d\rho}.$$

Remarquons encore que nous avons trouvé

$$\frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = \frac{\rho}{l^2}H_0\frac{d\rho}{du} = -\frac{4\pi}{3l}R_2S_2.$$

Nous pouvons en déduire

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{4}{3}\pi R_2S_2\frac{f'}{\rho}, \qquad \mathfrak{B} = -\frac{4}{3}\pi R_2S_2\frac{f}{\rho}.$$

Je rappelle que $\frac{4}{3}\pi f$ n'est autre chose que le volume de E_0.

Passons maintenant aux termes en ξ_5^4; le premier que nous rencontrons a pour coefficient l'intégrale

$$\frac{1}{24}\int\frac{d^2P}{d\rho^2}l^4\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)M_5^4N_5^4\,d\sigma = \frac{H_0}{24}\int l^2\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)M_5^4N_5^4\,d\sigma.$$

Supposons que l'on veuille développer en série de Lamé la fonction $l^4M_5^3N_5^3$ et soit

$$l^4M_5^3N_5^3 = \Sigma\Gamma_iM_iN_i,$$

les Γ_i étant certains coefficients, qui naturellement dépendront de ρ, nous en déduirons

$$4l^3\frac{dl}{d\rho}M_5^3N_5^3 = \sum\frac{d\Gamma_i}{d\rho}M_iN_i, \qquad 4\left[3l^2\left(\frac{dl}{d\rho}\right)^2 + l^3\frac{d^2l}{d\rho^2}\right]M_5^3N_5^3 = \sum\frac{d^2\Gamma_i}{d\rho^2}M_iN_i.$$

Il est clair alors que nous aurons pour le seul coefficient qui nous intéresse, qui est Γ_5 et que je désignerai simplement par Γ :

$$\Omega_5\Gamma_5 = \Omega_5\Gamma = \int l^5M_5^4N_5^4\,d\sigma;$$

$$\Omega_5\frac{d\Gamma}{d\rho} = 4\int l^4\frac{dl}{d\rho}M_5^4N_5^4\,d\sigma, \qquad \Omega_5\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2} = 4\int\left[3l^3\left(\frac{dl}{d\rho}\right)^2 + l^4\frac{d^2l}{d\rho^2}\right]M_5^4N_5^4\,d\sigma.$$

Cela nous montre, en rapprochant de l'expression de $\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)$, que si nous posons pour abréger :

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\Pi_0}{24}\frac{f}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{ff'}{\rho}\right), \qquad \mathfrak{D}_1 = \frac{\Pi_0}{48}\left(\frac{4f}{\rho^2} - \frac{f^3}{\rho^3}\right), \qquad \mathfrak{E}_1 = \frac{\Pi_0}{48}\frac{f^3}{\rho^2},$$

le coefficient du terme envisagé en ξ_5^4 sera

$$\mathfrak{C}_1\Gamma\Omega_5 + \mathfrak{D}_1\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5 + \mathfrak{E}_1\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}\Omega_5.$$

Vient ensuite comme terme en ξ_5^4 :

$$\frac{4\pi}{7}\frac{1}{6}\int l^3 M_5^4 N_5^4\left[R_5' S_5\frac{d^2\theta}{du^2} + R_5'' S_5\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\right]d\sigma.$$

Pour le calcul de ce coefficient, il nous faut $\frac{d^2\theta}{du^2}$, quant à $\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2$ c'est l^2. Or nous avons

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{l^2}{l_0}, \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{2l}{l_0}\frac{dl}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = 2l\frac{dl}{d\rho}\frac{f}{\rho},$$

ce qui nous donne en définitive pour le coefficient cherché :

$$\frac{2\pi}{21}R_5'' S_5\Gamma\Omega_5 + \frac{\pi}{21}R_5' S_5\frac{f}{\rho}\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5.$$

Enfin dans l'énergie de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$, nous avons deux termes en ξ_5^4, le premier a pour coefficient

$$-\frac{1}{6}\pi\int\frac{d^2\theta}{du^2}l^3 M_5^4 N_5^4\,d\sigma = -\frac{1}{12}\pi\frac{f}{\rho}\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5$$

(je prends le signe — à cause de l'hypothèse intérieure) et le second

$$-\frac{1}{2}\pi\sum\frac{\beta_i^2 R_i' S_i'}{2n+1}\Omega_i.$$

En réunissant tous ces termes, nous trouvons finalement pour le coefficient de ξ_5^4 :

$$\left[\mathfrak{C}_1 + \frac{2}{21}\pi R_5'' S_5\right]\Gamma\Omega_5 + \left[\mathfrak{D}_1 + \frac{1}{21}\pi\frac{f}{\rho}R_5' S_5 - \frac{1}{12}\pi\frac{f}{\rho}\right]\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5$$
$$+ \mathfrak{E}_1\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}\Omega_5 - \frac{1}{2}\pi\sum\frac{1}{2n+1}B_i^2 R_i' S_i'\Omega_i.$$

Observons que $R_5'' S_5$ est égal à $R_5 S_5$ au facteur constant près $\frac{R_5''}{R_5}$, qui est égal d'après l'équation de Lamé à un polynome connu du second ordre en ρ^2. D'ailleurs $R_5 S_5$ est égal au facteur $\frac{7}{3}$ près à $R_2 S_2$, qui figure dans l'expression

de H_0, et cela parce que le coefficient de stabilité correspondant à R_5 doit s'annuler pour l'ellipsoïde E_0.

Calcul du moment d'inertie.

Le calcul de J est plus facile; nous avons en effet

$$J = \int (y^2 + z^2)\, d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\tau$ de la poire; le moment d'inertie de l'ellipsoïde E_0 sera

$$J_0 = \int (y^2 + z^2)\, d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'ellipsoïde, et la différence $J - J_0$ sera la même intégrale étendue à tous les éléments de la couche comprise entre l'ellipsoïde et la poire. Posons

$$Q = y^2 + z^2 = Q_0 + u\frac{dQ}{du} + \ldots.$$

Nous aurons

$$J - J_0 = \int Q\, du\, d\sigma = \int \left(Q_0 + u\frac{dQ}{du}\right) du\, d\sigma = \int Q_0 \frac{dv}{d\sigma}\, d\sigma + \frac{1}{2}\int \frac{dQ}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Il nous faut donc calculer Q_0 et $\frac{dQ}{du}$, nous avons posé plus haut

$$Q = B_1 R_1 M_1 N_1 + B_3 R_3 M_3 N_3 + B_5 R_5 M_5 N_5 + B_0 H.$$

Pour $\rho = \rho_0$, H est nul; de sorte que

$$Q_0 = B_1 R_1^0 M_1 N_1 + B_3 R_3^0 M_3 N_3 + B_5 R_5^0 M_5 N_5.$$

Comme les fonctions R ne sont définies qu'à un facteur constant près, nous pouvons supposer que $R_1 = 1$, et que le coefficient de ρ^2 dans R_3 et dans R_5 est égal à 1.

On trouve d'autre part

$$\frac{dQ}{d\rho} = 2\rho\left[\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\right],$$

d'où

$$\frac{dQ}{du} = 2fl\left[\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\right].$$

Cette expression peut facilement se mettre sous la forme

$$\frac{dQ}{du} = C_1 l M_1 N_1 + C_3 l M_3 N_3 + C_4 l M_4 N_4,$$

où les C sont des coefficients numériques faciles à déterminer.

Nous trouvons d'abord

$$\int Q_0 \frac{dv}{d\sigma} d\sigma = \int l\, d\sigma (B_1 R_1^0 M_1 N_1 + B_3 R_3^0 M_3 N_3 + B_4 R_4^0 M_4 N_4) \Sigma \xi_i M_i N_i,$$

d'où

$$\int Q_0 \frac{dv}{d\sigma} d\sigma = \xi_1 B_1 R_1^0 \Omega_1 + \xi_3 B_3 R_3^0 \Omega_3 + \xi_4 B_4 R_4^0 \Omega_4 = \xi_3 B_3 R_3^0 \Omega_3 + \xi_4 B_4 R_4^0 \Omega$$

(car nous savons que ξ_1 est nul).

Passons au calcul de

$$\frac{1}{2} \int \frac{dQ}{du} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Nous pouvons réduire $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2$ au terme unique

$$\xi_3^2 l^2 M_3^2 N_3^2.$$

Le terme cherché se réduit donc à

$$\frac{1}{2} \xi_3^2 \int l^3 M_3^2 N_3^2 (C_1 M_1 N_1 + C_3 M_3 N_3 + C_4 M_4 N_4)\, d\sigma,$$

c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2} \xi_3^2 (C_1 \beta_1 \Omega_1 + C_3 \beta_3 \Omega_3 + C_4 \beta_4 \Omega_4)$$

de sorte que finalement

$$J = J_0 + \xi_3 B_3 R_3^0 \Omega_3 + \xi_4 B_4 R_4^0 \Omega_4 + \frac{1}{2} \xi_3^2 (C_1 \beta_1 \Omega_1 + C_3 \beta_3 \Omega_3 + C_4 \beta_4 \Omega_4).$$

Le calcul des coefficients $B_3 R_4^0 \Omega_3$ et $B_4 R_4^0 \Omega_4$ est aisé.

Si en effet a_1, b_1, c_1, sont les trois axes d'un ellipsoïde, on sait que son moment d'inertie est

$$J = \frac{4\pi}{15} a_1 b_1 c_1 (b_1^2 + c_1^2),$$

d'où

$$\frac{dJ}{da_1} = \frac{4\pi}{15} b_1 c_1 (b_1^2 + c_1^2), \qquad \frac{dJ}{db_1} = \frac{4\pi}{15} a_1 c_1 (3 b_1^2 + c_1^2), \qquad \frac{dJ}{dc_1} = \frac{4\pi}{15} b_1 c_1 (b_1^2 + 3 c_1^2).$$

Si nous ajoutons à l'ellipsoïde une couche infiniment mince d'épaisseur

$l\xi_3 M_3 N_3$, la figure reste ellipsoïdale, mais les trois axes subissent des accroissements

$$l^{(1)}\xi_3 M_3^{(1)} N_3^{(1)}, \quad l^{(2)}\xi_3 M_3^{(2)} N_3^{(2)}, \quad l^{(3)}\xi_3 M_3^{(3)} N_3^{(3)},$$

où $l^{(i)}$, $M_3^{(i)}$, $N_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ sont les fonctions l, M_3, N_3, où l'on a fait respectivement :

pour $i = 1$:

$$\mu = b, \quad \nu = c, \quad \rho = \rho_0;$$

pour $i = 2$:

$$\mu = a, \quad \nu = c, \quad \rho = \rho_0;$$

pour $i = 3$:

$$\mu = a, \quad \nu = b, \quad \rho = \rho_0.$$

On voit alors que

$$B_3 R_3^0 \Omega_3 = \frac{dJ}{da_1} l^{(1)} M_3^{(1)} N_3^{(1)} + \frac{dJ}{db_1} l^{(2)} M_3^{(2)} N_3^{(2)} + \frac{dJ}{dc_1} l^{(3)} M_3^{(3)} N_3^{(3)}.$$

Dans les dérivées $\frac{dJ}{da_1}, \cdots$, on a fait bien entendu

$$a_1 = \sqrt{(\rho_0^2 - a^2)}, \qquad b_1 = \sqrt{(\rho_0^2 - b^2)}, \qquad c_1 = \sqrt{(\rho_0^2 - c^2)}.$$

On trouverait de même l'expression de $B_4 R_4^0 \Omega_4$.

Conditions de la stabilité.

Soit U l'énergie de gravitation de la masse envisagée, J le moment d'inertie, ω la vitesse angulaire; l'énergie totale sera $U + \frac{1}{2}\omega^2 J$.

Soit ω_0 la vitesse angulaire de l'ellipsoïde critique E_0 et posons

$$W = U + \frac{1}{2}\omega_0^2 J, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon,$$

notre énergie totale sera $W + \varepsilon J$.

Nous avons trouvé plus haut le développement de W et celui de J jusqu'à l'approximation qui nous convient; nous avons d'abord

$$W = W_0 + \Sigma G_i \xi_i^2 + H_0 \xi_5^4 + \Sigma Q_i \xi_5 \xi_i.$$

Nous avons appris à calculer les coefficients G_i, H_0 et Q_i; nous remarquerons : 1° que les G_i ne sont autre chose que les coefficients de stabilité; 2° que G_5 est nul, et qu'il en est de même de Q_5 ainsi que de tous les coefficients Q_i qui ne se rapportent pas à une fonction de Lamé paire et uniforme.

Comme H_0 se compose de deux parties qui joueront un rôle assez différent, j'écrirai

$$H_0 = H + H',$$

$$H = \left[\mathfrak{C}_1 + \frac{2}{21}\pi R_5'' S_5\right]\Gamma\Omega_5 + \left[\mathfrak{D}_1 + \frac{1}{21}\pi\frac{f}{\rho}R_5' S_5 - \frac{1}{12}\pi\frac{f}{\rho}\right]\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5 + \mathfrak{E}_1\frac{d^2\Gamma}{d^2\rho}\Omega_5$$

$$H' = -\frac{1}{2}\pi\sum\frac{\beta_i^2 R_i' S_i'}{2n+1}\Omega_i.$$

Nous avons d'autre part

$$J = J_0 + \gamma_0\xi_5^2 + \gamma_3\xi_3 + \gamma_4\xi_4$$

et nous avons appris plus haut à calculer les coefficients γ.

On obtiendra les équations qui définissent la poire, en écrivant que les dérivées de l'énergie sont nulles; on trouve ainsi :

1° Par la dérivée par rapport à ξ_5 :

$$2H_0\xi_5^2 + \varepsilon\gamma_0 + \Sigma Q_i\xi_i = 0;$$

2° Par la dérivée par rapport à ξ_3 :

$$2G_3\xi_3 + Q_3\xi_5^2 + \varepsilon\gamma_3 = 0;$$

3° Par la dérivée par rapport à ξ_4 :

$$2G_4\xi_4 + Q_4\xi_5^2 + \varepsilon\gamma_4 = 0;$$

4° Par la dérivée par rapport aux autres ξ_i :

$$2G_i\xi_i + Q_i\xi_5^2 = 0.$$

Le rapprochement de ces diverses équations donne

$$\xi_5^2\left[2H_0 - \sum\frac{Q_i^2}{2G_i}\right] + \varepsilon\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right) = 0.$$

La quantité dont il faut déterminer le signe, c'est

$$\omega J - \omega_0 J_0 = \omega_0(J - J_0) + \frac{\varepsilon}{\omega_0}J_0.$$

Or

$$J - J_0 = \xi_5^2\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right) - \varepsilon\left(\frac{\gamma_3^2}{2G_3} + \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right).$$

Posons alors

$$\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4} = T, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\varepsilon}{\xi_5^2} = \frac{\sum\frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H - 2H'}{T}.$$

On voit que la quantité dont il faut déterminer le signe sera

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{\omega J - \omega_0 J_0}{\omega_0 \xi_5^2} = T + \frac{1}{T}\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right)\left(\sum \frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H - 2H'\right).$$

Il est aisé de vérifier que cette formule (A) est homogène; voici ce que j'entends par là. Les fonctions de Lamé M_i ne sont définies qu'à un facteur constant près, et nos formules, pour avoir un sens, doivent être homogènes par rapport à chacun de ces facteurs constants arbitraires. L'intégrale

$$\Omega_i = \int l M_i^2 N_i^2 \, d\sigma$$

est évidemment proportionnelle à la quatrième puissance de ce facteur, puisque ce facteur entre également dans M_i et dans N_i.

Nous devons donc vérifier que la formule (A) est homogène par rapport à Ω_i, et en particulier par rapport à Ω_5. Pour écrire, par exemple, qu'une quantité (B) est proportionnelle à la $\alpha^{\text{ième}}$ puissance de Ω_i et à la $\beta^{\text{ième}}$ puissance de Ω_5, j'écrirai

$$B = [\Omega_i^\alpha \Omega_5^\beta].$$

Je trouve ainsi

$$\beta_i \Omega_i = \int l^3 M_5^2 N_5^2 M_i N_i \, d\sigma = [\Omega_5 \sqrt{\Omega_i}], \qquad \text{d'où} \qquad \beta_i = \left[\frac{d\beta_i}{d\rho}\right] = [\Omega_5 \Omega_i^{-\frac{1}{2}}].$$

De même

$$\Gamma_i \Omega_i = \int l^5 M_5^3 N_5^3 M_i N_i \, d\sigma = [\Omega_5^{\frac{3}{2}} \Omega_i^{\frac{1}{2}}],$$

d'où

$$\Gamma_i = [\Omega_5^{\frac{3}{2}} \Omega_i^{\frac{1}{2}}] \qquad \text{et} \qquad \Gamma = \Gamma_5 = \left[\frac{d\Gamma}{d\rho}\right] = \left[\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}\right] = [\Omega_5].$$

On trouve ensuite

$$Q_i = [\beta_i \Omega_i] = [\Omega_5 \sqrt{\Omega_i}];$$

$$H = [\Gamma \Omega_5] = [\Omega_5^2], \qquad H' = [\beta_i^2 \Omega_i] = [\Omega_5^2], \qquad G_i = [\Omega_i];$$

$$\sum \frac{Q_i^2}{G_i} = [\Omega_5^2] \qquad \text{et enfin} \qquad \sum \frac{Q_i^2}{G_i} - 2H - 2H' = [\Omega_5^2].$$

Les coefficients appelés plus haut B_i et C_i dans le calcul de J sont proportionnels à $\Omega_i^{-\frac{1}{2}}$, ce qui donne

$$\gamma_0 = [G_i \beta_i \Omega_i] = [\beta_i \sqrt{\Omega_i}] = [\Omega_5];$$

$$\gamma_3 = [B_3 \Omega_3] = [\sqrt{\Omega_3}], \qquad \gamma_4 = [B_4 \Omega_4] = [\sqrt{\Omega_4}];$$

$$\frac{Q_i \gamma_i}{G_i} = \left[\frac{\beta_i \Omega_i \sqrt{\Omega_i}}{\Omega_i}\right] = [\sqrt{\Omega_i}] = [\Omega_5] \qquad \text{et enfin} \qquad T = [\Omega_5].$$

D'autre part

$$\frac{J_0}{\omega_0^2} = \left[\frac{\gamma_i^2}{G_i}\right] = \left[\frac{\Omega_i}{\Omega_i}\right] = [1] \qquad \text{et} \qquad \frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4} = [1],$$

de sorte que finalement le second membre de notre formule (A) est homogène et de degré 1 par rapport à Ω_3 et ne contient pas les autres Ω_i.

Détermination des intégrales.

Dans les coefficients et les formules qui précèdent entrent diverses intégrales, et nous devons chercher à les calculer.

1° Les axes de l'ellipsoïde E_0 étant supposés connus, on formera aisément les diverses fonctions R_i, ce n'est qu'une affaire de calcul algébrique; on a à résoudre diverses équations algébriques, et ces équations sont du second degré pour toutes les fonctions de Lamé d'ordre 0, 1, 2, 3, et pour quelques-unes de celles d'ordre 4 et 5.

Les fonctions R_i étant formées, on aura immédiatement les valeurs R_i^0 qui correspondent à $\rho = \rho_0$ et aussi celles des dérivées successives R_i', R_i'', ...

2° Dans nos équations figurent les intégrales S_i; or le calcul de ces intégrales se ramène à celui des intégrales définies $\int_{\rho_0}^{\infty} d\rho \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right) \frac{1}{R_i^2}$.

Quelle est la forme de la fonction $\frac{1}{R_i^2}$, qui figure sous le signe $\int$? Nous allons l'exprimer en fonction de l'argument elliptique θ, et nous emploierons les notations p et σ de Weierstrass. Soit $R_i = \Pi_i \Pi_i'$, Π_i étant le produit de 0, 1, 2, ou 3 des facteurs $\sqrt{(\rho^2 - a^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - b^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - c^2)}$ et Π_i' un produit de facteurs de la forme $\rho^2 - \lambda_k^2$. Nous poserons

$$\rho^2 - a^2 = p(\theta) - e_1, \qquad \rho^2 - b^2 = p(\theta) - e^2, \qquad \rho^2 - c^2 = p(\theta) - e_3, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0;$$

d'où

$$\rho^2 - p(\theta) = a^2 - e_1 = b^2 - e_2 = c^2 - e_3 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Nous avons d'ailleurs comme on sait

$$p(\omega_1) = e_1, \qquad p(\omega_2) = e_2, \qquad p(\omega_3) = e_3.$$

La valeur zéro de l'argument θ correspond à $\rho = \infty$, et nous appellerons θ_0 et E_k les valeurs qui correspondent à $\rho = \rho_0$ ou à $\rho = \lambda_k$.

Considérons alors la fonction $\frac{1}{R_i^2}$ comme une fonction doublement périodique, et décomposons-la en éléments simples. Les éléments simples seront

1° Un terme constant.

2° Des termes en

$$p(\theta-\omega_1),\quad p(\theta-\omega_2),\quad p(\theta-\omega_3)$$

provenant des facteurs $\sqrt{(\rho^2-a^2)}$, $\sqrt{(\rho^2-b^2)}$, $\sqrt{(\rho^2-c^2)}$, qui peuvent exister dans R_i.

3° Des termes en

$$\zeta(\theta+\varepsilon_k)-\zeta(\theta-\varepsilon_k),\qquad p(\theta-\varepsilon_k)+p(\theta+\varepsilon_k)$$

provenant des facteurs $\rho^2-\lambda_k^2$.

Les coefficients de ces divers termes, sauf le terme constant, peuvent se déterminer par un calcul purement algébrique.

Quant au terme constant, c'est une fonction linéaire non homogène des $\zeta(\varepsilon_k)$, fonction linéaire dont les coefficients peuvent se calculer algébriquement.

L'intégrale indéfinie contiendra donc des termes en

$$\theta,\quad \theta\zeta(\varepsilon_k),\quad \zeta(\theta-\omega_1),\quad \zeta(\theta-\omega_2),\quad \zeta(\theta-\omega_3),\quad \log\frac{\sigma(\theta+\varepsilon_k)}{\sigma(\theta-\varepsilon_k)},\quad \zeta(\theta-\varepsilon_k)+\zeta(\theta+\varepsilon_k),$$

ce qui donnera dans l'intégrale définie des termes en

$$\theta_0,\quad \theta_0\zeta(\varepsilon_k),\quad \zeta(\theta_0-\omega_i)+\zeta(\omega_i)=\zeta(\theta_0-\omega_i)=\eta_i,\quad \log\frac{\sigma(\theta_0+\varepsilon_k)}{\sigma(\theta_0-\varepsilon_k)},\quad \zeta(\theta_0-\varepsilon_k)+\zeta(\theta_0+\varepsilon_k).$$

Le calcul de S_i se ramène donc au calcul de ces diverses quantités. Connaissant S_i, on aura immédiatement S_i' et S_i'' par les formules

$$R_i'S_i-R_iS_i'=2n+1,\qquad R_i''S_i-R_iS_i''=0.$$

4° Nous avons ensuite les intégrales doubles

$$\Omega i=\int l\,M_i^2N_i^2\,d\sigma.$$

M_i^2 est un polynome entier connu en $p(\theta_1)$; N_i^2 est le même polynome en $p(\theta_2)$; nous avons d'ailleurs

$$l\,d\sigma=d\theta_1\,d\theta_2\sqrt{-1}(\nu^2-\mu^2)=d\theta_1\,d\theta_2\sqrt{-1}[p(\theta_2)-p(\theta_1)].$$

Quant aux limites d'intégration, elles sont données par les équations

$$a^2>\mu^2>b^2>\nu^2>c^2,\qquad \text{d'où}\qquad e_1>p(\theta_1)>e_2>p(\theta_2)>e_3,$$

ce qui montre qu'il faut faire varier θ_1 depuis $\omega_1-\omega_3$ jusqu'à $\omega_1+\omega_3$ et θ_2

depuis $\omega_3 - \omega_1$ jusqu'à $\omega_3 + \omega_1$ le long des côtés convenables du rectangle des périodes.

Les limites étant constantes, l'intégrale double se ramène à une combinaison d'intégrales simples :

$$\Omega_i = \sqrt{-1}\left[\int M_i^2\, d\theta_1 \int N_i^2\, p(\theta_2)\, d\theta_2 - \int N_i^2\, d\theta_2 \int M_i^2\, p(\theta_1)\, d\theta_1\right].$$

Ces intégrales simples se calculent d'une façon très simple. On peut par un calcul algébrique décomposer M_i^2 et $M_i^2\, p(\theta_1)$ en éléments simples, c'est-à-dire en polynome dont les termes sont des multiples de $p(\theta_1)$ et de ses dérivées. Parmi ces termes nous retiendrons seulement le terme constant et le terme en $p(\theta_1)$. Le premier donnera comme intégrales ω_1 et ω_3, le second η_1 et η_3 à un facteur numérique près.

Le calcul de Ω_i est ainsi ramené à celui des périodes ω et η.

5° Nous avons ensuite les intégrales

$$\Omega_i \beta_i = \int l^3 M_5^2 N_5^2 M_i N_i\, d\sigma = \sqrt{-1} \int l^2 M_5^2 N_5^2 M_i N_i [p(\theta_2) - p(\theta_1)]\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

Ici encore $M_5^2 M_i$ est un polynome entier en $p(\theta_1)$ et $N_5^2 N_i$ est le même polynome en $p(\theta_2)$. On a d'ailleurs

$$l^2 = \frac{1}{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)} = \frac{1}{[p(\theta_1) - p(\theta_0)][p(\theta_2) - p(\theta_0)]}.$$

Notre intégrale double se ramène encore à une combinaison d'intégrales simples

$$\Omega_i \beta_i = \sqrt{-1}\left[\int \frac{M_5^2 M_i\, d\theta_1}{p(\theta_1) - p(\theta_0)} \int \frac{N_5^2 N_i\, p(\theta_2)\, d\theta_2}{p(\theta_2) - p(\theta_0)} - \int \frac{N_5^2 N_i\, d\theta_2}{p(\theta_2) - p(\theta_0)} \int \frac{M_5^2 M_i\, p(\theta_1)\, d\theta_1}{p(\theta_1) - p(\theta_0)}\right].$$

Le calcul se fait de la même manière. Chacune des fonctions sous le signe $\int$ doit être décomposée en éléments simples, ces éléments sont une constante; $p(\theta_1)$ ou ses dérivées, et enfin

$$\zeta(\theta_1 + \theta_0) - \zeta(\theta_1 - \theta_0) - 2\zeta(\theta_0) = \frac{p'(\theta_0)}{p(\theta_1) - p(\theta_0)}.$$

Les coefficients de cette décomposition pouvant se calculer algébriquement, l'intégration introduira, outre les périodes ω et η, deux transcendantes nouvelles, qui seront

$$-4\zeta(\theta_0)\omega_3 + \log\frac{\sigma(\omega_1 - \omega_3 - \theta_0)\,\sigma(\omega_1 + \omega_3 + \theta_0)}{\sigma(\omega_1 + \omega_3 - \theta_0)\,\sigma(\omega_1 - \omega_3 + \theta_0)} = 4\eta_3\theta_0 - 4\omega_3\zeta(\theta_0),$$

$$-4\zeta(\theta_0)\omega_1 + \log\frac{\sigma(\omega_3 - \omega_1 - \theta_0)\,\sigma(\omega_3 + \omega_1 + \theta_0)}{\sigma(\omega_3 + \omega_1 - \theta_0)\,\sigma(\omega_3 - \omega_1 + \theta_0)} = 4\eta_1\theta_0 - 4\omega_1\zeta(\theta_0)$$

qui se ramènent d'ailleurs toutes deux à θ_0 et à $\zeta(\theta_0)$.

6° Nous avons ensuite l'intégrale $\Omega_i \frac{d\beta_i}{d\rho}$ qui est la dérivée de la précédente par rapport à ρ. (Ici ρ est, bien entendu, pris égal à ρ_0.)

Elle dépend des dérivées par rapport à ρ des quatre intégrales simples qui figurent dans l'expression ci-dessus de $\Omega_i \beta_i$.

La dérivée de chacune de ces intégrales simples se calcule d'ailleurs aisément. Chacune de ces intégrales est une somme de produits où l'un des facteurs est 1, ω_i, η_i ou $\eta_i \theta_0 - \omega_i \zeta(\theta_0)$ et où l'autre facteur est un coefficient calculable algébriquement.

La dérivée de ce coefficient par rapport à ρ_0 sera ainsi calculable algébriquement, et quant à la dérivée du premier facteur elle sera

$$0, \quad 0, \quad 0 \quad \text{ou} \quad \eta_i \frac{d\theta_0}{d\rho_0} - \omega_i \frac{d\zeta(\theta_0)}{d\rho^0} = \frac{\rho_0[\eta_i - \omega_i \wp(\theta_0)]}{\sqrt{\{(\rho_0^2 - a^2)(\rho_0^2 - b^2)(\rho_0^2 - c^2)\}}}.$$

Il ne s'introduit donc aucune transcendante nouvelle.

7° Considérons maintenant l'intégrale

$$\Omega_5 \Gamma = \int P M_5^5 N_5^5 \, d\sigma.$$

Nous aurons

$$P = \frac{1}{[\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)]^2 [\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)]^2},$$

d'où

$$\Omega_5 \Gamma = \sqrt{-1} \left\{ \int \frac{M_5^5 \, d\theta_1}{[\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)]^2} \int \frac{N_5^5 \, \wp(\theta_2) \, d\theta_2}{[\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)]^2} - \int \frac{N_5^5 \, d\theta_2}{[\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)]^2} \int \frac{M_5^5 \, \wp(\theta_1) \, d\theta_1}{[\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)]^2} \right\}.$$

On opérerait toujours de la même manière en décomposant chaque fonction sous le signe $\int$ en éléments simples. Les éléments simples seront ici, outre une constante $\wp(\theta_1)$ et ses dérivées :

$$\zeta(\theta_1 + \theta_0) - \zeta(\theta_1 - \theta_0) - 2\zeta(\theta_0) \quad \text{et} \quad \wp(\theta_1 + \theta_0) + \wp(\theta_1 - \theta_0) - 2\wp(\theta_0).$$

L'intégration introduira donc les mêmes transcendantes que dans le cas de $\Omega_i \beta_i$ et en outre (par l'intégration du dernier élément simple que je viens de citer) : $4\eta_i - 4\omega \wp(\theta_0)$, ce qui n'est pas une transcendante nouvelle.

8° Il ne nous reste plus que les intégrales $\Omega_5 \frac{d\Gamma}{d\rho}$, $\Omega_5 \frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}$ qui sont les dérivées de la précédente.

En raisonnant comme dans le cas de $\frac{d\beta_i}{d\rho}$, on verrait que ces intégrales n'introduisent pas de transcendante nouvelle.

Le calcul de ces transcendantes ne peut présenter de difficulté si l'on emploie les formules de Weierstrass réunies et mises sous une forme si commode par les soins de M. Schwarz. On n'a qu'à employer des séries très convergentes procédant suivant les puissances de la quantité que Jacobi appelle q et Weierstrass h. D'ailleurs dans le cas de l'ellipsoïde E_0, la valeur de q est si petite que l'on pourrait s'arrêter au premier terme. Ainsi dans le calcul de β_i, de Γ, de leurs dérivées et de Ω_i, on ne rencontrera aucun obstacle; car il ne s'introduit qu'un petit nombre de transcendantes ω_1, ω_3, η_1, η_3, $\zeta(\theta_0)$, θ_0. Le calcul ne serait pas tout à fait aussi facile pour S_i, de sorte que, dans ce cas, on pourrait recourir avec avantage aux développements donnés par M. Darwin à la fin de son Mémoire *Ellipsoidal Harmonic Analysis*, et qui procèdent suivant la quantité qu'il appelle β.

Si les axes de l'ellipsoïde jacobien critique sont comme l'a calculé M. Darwin dans son second Mémoire : 0,65066; 0,81498; 1,88583; on trouve, sauf erreur de calcul de ma part :

$$h_1 = e^{-\frac{\omega_1 \pi i}{\omega_3}} = \frac{1}{200}.$$

$$\omega_1 = 0{,}53790; \qquad \omega_3 = i \times 0{,}90528$$
$$\eta_1 = 1{,}1956; \qquad \eta_3 = -i \times 0{,}9080;$$
$$\theta_0 = 0{,}27501; \qquad \zeta(\theta_0) = 0{,}71640.$$

Nouvelle expression des conditions de stabilité.

La détermination de *chacune* des intégrales ne présente donc aucune difficulté, et le calcul serait en somme facile si ces intégrales n'étaient en nombre infini.

Rappelons le résultat obtenu plus haut. *La poire sera stable ou instable, suivant que l'expression*

$$T + \frac{1}{T}\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right)\left(\sum \frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H - 2H'\right)$$

sera positive ou négative.

Or nous pouvons tout de suite remarquer que parmi les quantités qui figurent dans cette expression : T, J_0, ω_0^2, γ_3, γ_4, G_3, G_4, H ne dépendent que d'un nombre fini d'intégrales, tandis que

$$\sum \frac{Q_i^2}{2G_i} \qquad \text{et} \qquad H' = \frac{1}{2}\pi \sum \frac{\beta_i^2 R_i' S_i'}{2n+1}\Omega_i$$

dépendent d'une infinité d'intégrales. Toute la difficulté provient donc du calcul de la quantité

$$Z = \sum \frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H'.$$

Heureusement il ne s'agit pas de calculer la valeur exacte de cette quantité, mais de reconnaître si elle satisfait à une certaine inégalité. Pour étudier cette inégalité, il faut que nous mettions en évidence le signe de plusieurs de nos quantités.

Commençons par les coefficients de stabilité G_i. Si nous suivons la série des ellipsoïdes de Mac Laurin, tous ces coefficients sont d'abord négatifs. Le coefficient G_3 changera de signe, tous les autres restant négatifs, quand nous arriverons à l'ellipsoïde de bifurcation, qui est en même temps un ellipsoïde de Mac Laurin et un ellipsoïde de Jacobi. Mais à partir de cet ellipsoïde de bifurcation, on abandonne la série des ellipsoïdes de Mac Laurin pour suivre celle des jacobiens.

Pour cette série le coefficient G_3 est également négatif, en vertu du principe de l'échange des stabilités convenablement interprété. Pour les premiers jacobiens jusqu'au jacobien critique, tous les coefficients G_i seront donc négatifs sauf G_3. Pour le Jacobien critique, tous les G_i sont négatifs sauf G_5, qui est nul, et G_3, qui est positif.

Déterminons ensuite le signe de

$$Y = \frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}.$$

Je renverrai à mon Mémoire du Tome 7 des *Acta*, et au paragraphe intitulé *Stabilité des ellipsoïdes*. J'ai expliqué dans ce paragraphe que tous les jacobiens sont stables si l'on assujettit (à titre de liaison) la figure de la masse fluide à rester ellipsoïdale, c'est-à-dire si l'on assujettit tous les ξ_i à être nuls sauf ξ_3 et ξ_4.

J'ai exposé en même temps la condition de la stabilité, qui avec notre notation actuelle s'écrit

$$W - W_0 - \frac{\omega_0^2}{2J}(J - J_0)^2 < 0,$$

ou comme il s'agit de petites déformations

$$W - W_0 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}(J - J_0)^2 < 0.$$

En supposant tous les ξ_i nuls sauf ξ_3 et ξ_4, et remplaçant $W - W_0$ et $J - J_0$ par leurs valeurs, nous trouvons

$$G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}(\gamma_3\xi_3 + \gamma_4\xi_4)^2 < 0,$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$\left(G_3 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}\gamma_3^2\right)\left(G_4 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}\gamma_4^2\right) > \frac{\omega_0^4}{4J_0^2}\gamma_3^2\gamma_4^2.$$

Comme ω_0^2, J_0 et G_3 sont positifs et G_4 négatif, l'inégalité change de sens quand on la divise par $\frac{\omega_0^4}{J_0^2}G_3G_4$, ce qui donne

$$\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3}\right)\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right) < \frac{\gamma_3^2\gamma_4^2}{4G_3G_4} \quad \text{ou} \quad \frac{J_0}{\omega_0^2}\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right) < 0$$

ou enfin $Y < 0$.

Passons à la détermination de signe de T. Pour cela nous allons envisager le coefficient G_5 pour un ellipsoïde de Jacobi très peu différent du jacobien critique.

Soit E'_0 cet ellipsoïde, et $\frac{1}{2}\omega_0^2 + \varepsilon$ la valeur de $\frac{1}{2}\omega^2$ correspondante. Nous pourrons considérer ε comme définissant l'ellipsoïde E'_0; nous supposons ε très petit.

Soit ensuite S une surface peu différente de E_0 et de E'_0. Soit $d\sigma'$ un élément de la surface de E'_0 et l' la quantité qui joue par rapport à E'_0 et à $d\sigma'$ le même rôle que l par rapport à E_0 et à $d\sigma$. Par les différents points de $d\sigma'$ je mène des courbes normales aux ellipsoïdes homofocaux à E'_0, et je les prolonge jusqu'à leur rencontre avec S. Soit dv' le petit volume ainsi formé. Je supposerai que la surface S ait été définie de telle sorte que l'on ait

$$\frac{dv'}{d\sigma'} = \eta l' M_5^* N_5^*,$$

η étant un coefficient constant très petit, M_5^* et N_5^* les fonctions qui jouent par rapport à E'_0 le même rôle que M_5 et N_5 par rapport à E_0.

Soit maintenant $d\sigma$ un élément de E_0, par $d\sigma$ menons des courbes $\mu = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ prolongées jusqu'à S, et soit dv le petit volume ainsi engendré. Nous poserons

$$\frac{dv}{d\sigma} = l\Sigma\xi_i M_i N_i,$$

de sorte que les coefficients ξ_i pourront servir à définir la forme de S. Il est

clair que les ξ_i sont des fonctions de ε et de η, développables suivant les puissances de ε et de η.

Pour $\varepsilon = 0$, l'ellipsoïde E'_1 se réduit à E_0, et tous les ξ_i s'annulent à l'exception de ξ_5, qui se réduit à η.

Pour $\eta = 0$, la surface S se réduit à E'_0; alors ξ_3 et ξ_4 sont des quantités du premier ordre, ε étant regardé comme de premier ordre, tandis que les autres ξ_i seront du deuxième ordre.

Si donc ε et η sont regardées comme des quantités du premier ordre, ξ_i (en excluant les valeurs $i = 3, 4, 5$) sera du deuxième ordre, parce que tous ses termes contiendront en facteur soit ε^2, soit $\varepsilon\eta$; ξ_3 et ξ_4 se réduiront à $\frac{d\xi_3}{d\varepsilon}\varepsilon$ et à $\frac{d\xi_4}{d\varepsilon}\varepsilon$ à des quantités près du deuxième ordre; ξ_5 se réduira à η à des quantités près du deuxième ordre.

Nous devons calculer $W + \varepsilon J$.

Dans ce qui va suivre, nous négligerons les quantités du quatrième ordre et en plus ε^3 et $\varepsilon^2\eta$. Dans ces conditions nous pouvons négliger d'abord tous les monomes du quatrième ordre par rapport aux ξ, et arrêter le développement de W suivant les puissances des ξ au troisième ordre inclusivement. Nous pouvons également négliger les monomes du troisième ordre multipliés par ε, et par conséquent arrêter le développement de εJ suivant les puissances des ξ au deuxième ordre inclusivement.

Nous négligerons en outre : les $\xi_i^2 (i \neq 3, 4, 5)$ qui sont du quatrième ordre; les monomes du troisième ordre en ξ_3 et ξ_4 qui sont au quatrième ordre près égaux à un multiple de ε^3; les termes en $\xi_i\xi_k\xi_j (i \neq 3, 4, 5;\ k, j = 3, 4, 5)$, qui sont du quatrième ordre; les termes en $\varepsilon\xi_i (i \neq 3, 4, 5)$, qui pourraient figurer dans εJ, parce qu'ils contiennent ε^2 en facteur et par conséqunet sont, au quatrième ordre près, égaux à un multiple de ε^3 plus un multiple de $\varepsilon^2\eta$.

Dans ces conditions nous devons conserver les termes suivants :

dans W :

$$W = W_0 + G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 + Q_3\xi_5^2\xi_3 + Q_4\xi_5^2\xi_4,$$

dans εJ :

$$\varepsilon J = \varepsilon J_0 + \varepsilon\gamma_0\xi_5^2 + \varepsilon\gamma_3\xi_3 + \varepsilon\gamma_4\xi_4,$$

d'où

$$W + \varepsilon J = (W_0 + \varepsilon J_0) + G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 + Q_3\xi_5^2\xi_3 + Q_4\xi_5^2\xi_4 + \varepsilon\gamma_0\xi_5^2 + \varepsilon\gamma_3\xi_3 + \varepsilon\gamma_4\xi_4.$$

Pour $\eta = 0$, cette expression se réduit à

$$W'_0 = (W_0 + \varepsilon J_0) + G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 + \varepsilon\gamma_3\xi_3 + \varepsilon\gamma_4\xi_4,$$

et ses dérivées doivent s'annuler, puisque le jacobien est une figure d'équilibre. On aura donc

$$2G_3\xi_3 + \varepsilon\gamma_3 = 2G_4\xi_4 + \varepsilon\gamma_4 = 0,$$

d'où, à des quantités près de l'ordre de ε^2, ou de $\varepsilon\eta$,

$$\xi_3 = -\frac{\gamma_3}{2G_3}\varepsilon, \qquad \xi_4 = -\frac{\gamma_4}{2G_4}\varepsilon.$$

Comme ξ_5 se réduit à η, pour $\varepsilon = 0$, on aura

$$W + \varepsilon J = (W_0 + \varepsilon J_0) + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\gamma_3^2}{G_3} + \frac{\gamma_4^2}{G_4}\right) + \varepsilon\eta^2\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right)$$

en négligeant ε^3, $\varepsilon^2\eta$, $\varepsilon\eta^3$, η^4. En faisant $\eta = 0$ il vient

$$W'_0 = (W_0 + \varepsilon J_0) - \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\gamma_3^2}{G_3} + \frac{\gamma_4^2}{G_4}\right).$$

D'autre part, comme η joue par rapport à E'_1 le même rôle que ξ_5 par rapport à E_0, on aura avec la même approximation

$$W + \varepsilon J = W'_0 + G'_5\eta^2,$$

G'_5 étant le coefficient de stabilité relatif à l'ellipsoïde E'_0 et au « third zonal harmonic ».

On aura donc

$$G'_5 = \varepsilon\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right) = \varepsilon T.$$

Si nous supposons que E'_0 est plus allongé que E_0, ε sera négatif, puisque les vitesses de rotation vont en diminuant dans la série des jacobiens. D'ailleurs G'_5 sera positif, puisque le coefficient de stabilité est passé du négatif au positif quand on a franchi l'ellipsoïde critique. Donc $T < 0$.

Revenons aux conditions de stabilité de la poire.

Posons

$$X = 2H + 2H' - \sum\frac{Q_i^2}{2G_i}, \qquad Y = \frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4},$$

Nous avons trouvé

$$\xi_5^2 X + \varepsilon T = 0,$$

ε se rapportant à la poire et non plus à E'_0.

$$\frac{\omega J - \omega_0 J_0}{\omega_0 \xi_5^2} = T - \frac{XY}{T}, \qquad Y < 0, \qquad T < 0.$$

Pour la stabilité, il suffit que ω soit maximum, c'est-à-dire que ε soit négatif; il faut et il suffit que ωJ soit minimum, c'est-à-dire que

$$\omega J - \omega_0 J_0 > 0.$$

Or $\varepsilon < 0$, équivaut, puisque T est négatif, à $X < 0$. C'est donc là une condition *suffisante* de la stabilité.

Supposons maintenant $X > 0$; alors T sera négatif, $\frac{XY}{T}$ positif, et $\omega J - \omega_0 J_0$ négatif; il y aura donc instabilité.

En résumé la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité est $X < 0$, ou

$$2H + 2H' - \sum \frac{Q_i^2}{2G_i} < 0,$$

ou

$$2H - \frac{\pi}{2} \sum \frac{\beta_i^2 R_i' S_i'}{2n+1} \Omega_i - \sum \frac{Q_i^2}{2G_i} < 0.$$

Si nous observons que R_i' est positif, S_i' négatif, les G_i négatifs sauf G_3, nous verrons que tous les termes du premier membre sont positifs sauf $2H$ et $-\frac{Q_3^2}{2G_3}$.

Si donc il y a instabilité, c'est-à-dire si l'inégalité précédente n'a pas lieu, il suffira pour le constater de calculer un nombre fini de termes du premier membre. Si au contraire il y a stabilité, on ne pourra s'en assurer qu'en calculant la somme des termes positifs du premier membre qui sont en nombre infini, ou en évaluant une limite supérieure de cette somme.

LES FORMES D'ÉQUILIBRE
D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION [1]

Revue Générale des Sciences, t. 3, p. 809-815 (15 décembre 1892).

D'après les idées généralement admises, tous les astres ont été originairement liquides ou gazeux, et ceux qui n'ont pas conservé leur fluidité primitive, ont gardé, en se solidifiant, la figure qu'ils avaient prise quand ils étaient encore fluides.

Les astronomes ont ainsi été conduits à se poser le problème suivant, afin d'expliquer la figure des corps célestes : quelles sont les forces auxquelles étaient soumises ces masses fluides qui sont devenues les astres actuels et quelles formes d'équilibre devaient prendre ces masses sous l'influence de ces forces ?

La première de ces forces était l'attraction newtonienne. Chaque molécule fluide était attirée par les autres parties de la masse en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances. La seconde était la force centrifuge produite par la rotation de la masse. On admet que cette rotation devait être uniforme, c'est-à-dire que toutes les parties de la masse devaient effectuer un tour complet dans le même temps. Et en effet, si cette uniformité n'existait pas, le frottement mutuel des diverses parties du fluide l'aurait promptement rétablie.

Déterminer la figure d'équilibre d'un fluide soumis à ces forces est un problème d'Hydrostatique. Ce problème est très difficile, et sa solution, quelque incomplète qu'elle soit encore, a exigé de grands efforts, que l'importance de la question justifiait d'ailleurs pleinement.

---

[1] *Voir* aux Notes, *Masses fluides en rotation (figures annulaires et résultats divers)*.

Plusieurs géomètres du siècle dernier, parmi lesquels Clairaut doit être cité en première ligne, ont résolu le problème, en supposant que la rotation est lente et que la figure d'équilibre diffère peu d'une sphère. C'est bien le cas, en effet, pour toutes les planètes dans leur état actuel; et cependant cela ne saurait suffire, car on peut se demander s'il en est encore de même pour certaines étoiles, comme les étoiles variables, par exemple. On peut aussi supposer, comme le faisait Laplace, que la matière, qui a servi à former les planètes, a d'abord, en se détachant du Soleil, affecté une forme annulaire et par conséquent très différente d'une sphère.

Dès qu'on ne se restreint plus aux figures sphéroïdales, le problème devient beaucoup plus difficile, et il est encore bien loin d'être résolu, même en supposant, comme nous allons le faire, que la masse fluide considérée est homogène, c'est-à-dire que sa densité est constante.

Mac-Laurin a montré qu'une des figures d'équilibre que peut affecter un fluide homogène en rotation est *un ellipsoïde de révolution aplati*. Pendant longtemps on a pu croire que cette solution était unique.

Mais Jacobi, au commencement de ce siècle, a découvert une solution vraiment inattendue : certains ellipsoïdes à trois axes inégaux, appelés aujourd'hui ellipsoïdes de Jacobi, sont également des figures d'équilibre. La rotation s'effectue autour du petit axe.

Ce résultat causa un grand étonnement. On s'était habitué à regarder comme évident que toutes les formes d'équilibre devaient être des surfaces de révolution. Il n'y a aucune raison pour cela, et cette évidence apparente était vaine. L'exemple n'est d'ailleurs pas rare dans les annales de la Science et ce n'est pas là le premier fantôme de ce genre qu'on ait vu se dissiper ainsi.

Certaines personnes ont voulu expliquer de la sorte la variabilité de certaines étoiles à courte période. Si ces astres ont la forme d'ellipsoïdes de Jacobi, ils se présentent à nous tantôt par le grand axe, tantôt par l'axe moyen et leur surface apparente doit varier périodiquement. Il est impossible pour le moment de se prononcer sur la valeur de cette explication.

On a fait une autre hypothèse qui se trouve reproduite dans quelques Ouvrages, bien qu'elle ne soutienne pas un instant d'examen. A une certaine époque, les géodésiens avaient cru observer que l'aplatissement du globe n'est pas le même pour les différents méridiens et que la Terre affecte la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. On a dit que cette figure devait être un ellipsoïde de Jacobi. C'était oublier que les ellipsoïdes de Jacobi diffèrent tous

beaucoup de la sphère et que le seul qui soit compatible avec la vitesse de rotation de la Terre est une sorte d'aiguille très allongée.

Après la découverte de Jacobi, on a été naturellement conduit à se demander s'il n'existait pas d'autres formes d'équilibre non ellipsoïdales.

Le problème a été nettement posé dans l'admirable Traité de Philosophie naturelle de Thomson et Tait où se trouvent quelques pages éminemment suggestives. Ce sont ces pages qui ont inspiré les recherches ultérieures, parmi lesquelles les plus importantes sont, sans contredit, celles de M. Liapounoff. Les travaux de ce savant russe, ceux de M. Matthiessen, de Mme Kowalevski et les miens ont mis en évidence l'existence de nombreuses formes d'équilibre sur lesquelles je voudrais donner quelques détails.

I. — Formes nouvelles d'équilibre.

Équilibre. — Si l'on fait varier d'une manière continue le moment de rotation (c'est-à-dire le produit du moment d'inertie par la vitesse de rotation), les ellipsoïdes de Mac-Laurin, comme ceux de Jacobi se déforment d'une manière continue.

Considérons d'abord les ellipsoïdes de révolution de Mac-Laurin. Quand le moment de rotation croîtra, l'aplatissement, d'abord très faible, croîtra constamment et finira par devenir très considérable; la vitesse de rotation croîtra jusqu'à un certain maximum, pour décroître ensuite jusqu'à s'annuler.

Elle peut en effet décroître, bien que le moment de rotation croisse, parce que l'autre facteur, qui est le moment d'inertie, croît très rapidement.

On arrive à des résultats analogues, ainsi que l'a démontré Liouville, en ce qui concerne les ellipsoïdes de Jacobi. Ces ellipsoïdes n'existent que si le moment de rotation est supérieur à une certaine valeur. Quand ce moment va en croissant à partir de cette valeur, la vitesse de rotation décroît et finit par s'annuler; le grand axe va en croissant et le petit axe en décroissant sans cesse; l'axe moyen décroît plus rapidement encore. D'abord il est égal au grand axe, de telle façon que l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, c'est-à-dire de l'axe de rotation; au contraire quand le moment de rotation est très grand et la vitesse de rotation très petite, l'axe moyen est presque égal au petit axe, de telle sorte que la figure ressemble à un ellipsoïde de révolution très allongé.

On voit que les deux catégories d'ellipsoïdes forment deux séries continues de figures d'équilibre. Mais il y a une figure qui est commune aux deux séries

et qui est, si l'on veut me permettre cette comparaison, un point de *bifurcation*. Je veux parler de l'ellipsoïde de Jacobi qui correspond à la valeur minimum du moment de rotation; il est en effet en même temps, ainsi que je viens de le dire, un ellipsoïde de révolution aplati.

Je l'appellerai l'ellipsoïde E_1.

Les figures nouvelles d'équilibre dont il me reste à parler forment de même des séries continues; et quelques-unes d'entre elles, qui appartiennent en même temps à la série des ellipsoïdes de Mac-Laurin ou à celle des ellipsoïdes de Jacobi, sont de véritables figures de bifurcation analogues à E_1.

Je vais chercher à faire comprendre la forme de ces figures nouvelles. Prenons d'abord pour point de départ un ellipsoïde de révolution. Partageons-en la surface en $n+1$ zones, en y traçant n parallèles. Partageons-la de même en $2p$ fuseaux égaux par p méridiens équidistants.

Ces parallèles et ces méridiens, se coupant à angle droit, déterminent une sorte de damier; imaginons maintenant que la surface de l'ellipsoïde se creuse ou se soulève, de telle façon que les cases noires de notre damier soient remplacées par des montagnes très peu élevées et les cases blanches par des vallées très peu profondes; nous obtiendrons ainsi une figure d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde.

Pour nous rendre compte de la forme des autres solides d'équilibre de la même série, nous n'avons qu'à supposer que ces reliefs vont en s'accentuant et que les lignes qui séparent les dépressions des montagnes se déforment peu à peu.

Il est inutile d'ajouter que l'aplatissement de l'ellipsoïde qui sert de point de départ et les latitudes de nos n parallèles ne peuvent pas être choisis arbitrairement et qu'ils ne sont pas les mêmes pour toutes les séries.

Le nombre n peut être nul de telle sorte que l'ellipsoïde soit seulement divisé en fuseaux; le nombre p peut aussi être nul, de sorte qu'il soit seulement divisé en zones.

A chaque combinaison des deux nombres n et p correspond une série de figures nouvelles d'équilibre. Observons toutefois que les combinaisons $(n=0, p=1)$, $(n=1, p=0)$, $(n=1, p=1)$ ne donnent que l'ellipsoïde de Mac-Laurin déplacé, mais non déformé, et que la série qui correspond à la combinaison $(n=0. p=2)$ n'est autre chose que la série des ellipsoïdes de Jacobi.

Ces figures nouvelles d'équilibre admettent p plans de symétrie passant par

l'axe de rotation. Si p est nul, elles sont de révolution autour de cet axe. Enfin, si n est pair, elles ont un $p+1^{\text{ième}}$ plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation.

Il existe d'autres séries de formes d'équilibre que l'on obtient en prenant comme point de départ un ellipsoïde de Jacobi.

Voici comment on les obtient :

Traçons à la surface d'un ellipsoïde de Jacobi n lignes convenablement choisies de façon à la diviser en $n+1$ zones, entourant les pôles du grand axe. (Ces lignes doivent être choisies parmi celles que les géomètres appellent lignes de courbure.)

Imaginons maintenant que la surface de l'ellipsoïde se creuse ou se soulève de telle façon que la première de ces zones soit remplacée par une montagne,

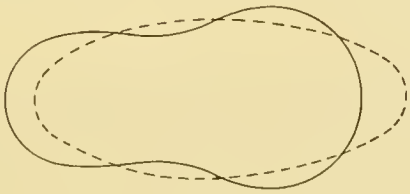

Fig. 1.

la zone suivante par une vallée, la suivante par une montagne et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi une figure d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde.

Pour nous rendre compte de la forme des autres solides d'équilibre de la même série, nous n'avons qu'à supposer que ces reliefs vont en s'accentuant. Notre ellipsoïde déformé va présenter alors une suite de renflements et d'étranglements alternatifs, formant comme une série de plis transversaux.

A chaque valeur du nombre n, à partir de $n=3$ inclusivement, correspond une de ces séries de figures d'équilibre.

Toutes admettent deux plans de symétrie rectangulaires, l'un perpendiculaire à l'axe de rotation, l'autre passant par cet axe. Les figures d'équilibre qui correspondent à une valeur paire de n admettent un troisième plan de symétrie perpendiculaire aux deux premiers.

J'appellerai particulièrement l'attention sur la série qui correspond à $n=3$. Je représente sur la figure 1 l'un des solides d'équilibre de cette série. Le trait pointillé est le contour de l'ellipsoïde de Jacobi qui a servi de point de départ, et le trait plein est le contour de la nouvelle figure d'équilibre.

Parmi les figures de cette série, il y en a une qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi. Je l'appellerai l'ellipsoïde F_2.

Stabilité. — Tous ces solides sont des figures d'équilibre, mais cet équilibre est-il stable ? C'est ce que nous avons encore à examiner.

Lord Kelvin (Sir W. Thomson) et M. Tait, dans l'Ouvrage que j'ai cité plus haut, ont les premiers remarqué qu'il y a deux sortes de stabilité.

Observons d'abord qu'il y a deux espèces d'équilibre. Il y a, en premier lieu, l'équilibre absolu qui est atteint quand tous les corps envisagés sont en repos; mais ce n'est pas celui-là que nous avons à considérer dans le problème qui nous occupe, puisque notre masse fluide n'est pas en repos mais en rotation. Seulement, elle paraîtrait en repos, à un observateur qui serait entraîné comme elle dans un mouvement de rotation uniforme : elle serait en *équilibre relatif* par rapport à cet observateur.

Les lois de l'équilibre absolu et celles de l'équilibre relatif ne sont pas tout à fait les mêmes. L'un et l'autre sont stables quand ils correspondent au minimum de l'énergie totale du système envisagé. Il est clair en effet que, pour faire sortir le système de sa situation d'équilibre, il faut lui fournir une certaine quantité d'énergie, et qu'il ne pourra s'en écarter beaucoup que si cette dépense d'énergie est très grande.

Cette condition, qui est toujours suffisante, est nécessaire dans le cas de l'équilibre absolu; elle ne l'est pas dans le cas de l'équilibre relatif; un système animé d'un mouvement de rotation très rapide peut être en équilibre stable sans que l'énergie soit minimum.

C'est là l'explication d'une foule de paradoxes dynamiques; je n'en citerai qu'un qui est d'observation vulgaire et qui, pour cette raison, a presque cessé de nous sembler surprenant : la toupie, quand elle tourne assez vite, peut se maintenir debout sur la pointe.

Ainsi, quand même l'énergie n'est pas minimum, un système peut conserver son état d'équilibre relatif pendant un temps indéfini. Il le pourrait du moins si les frottements étaient nuls.

Mais Lord Kelvin a démontré que, si les frottements existent, *quelque faibles qu'ils soient*, il n'en est plus de même et que l'équilibre finira par être détruit, à moins que l'énergie ne soit minimum. C'est ainsi, pour reprendre notre exemple, que la toupie finit par se ralentir et par tomber.

Il y a donc deux sortes de stabilité : la stabilité ordinaire, dont les frotte-

ments finissent par avoir raison, et la stabilité séculaire que les frottements ne peuvent détruire.

C'est la seconde qui doit nous intéresser le plus.

En se plaçant au point de vue de la stabilité séculaire, les ellipsoïdes de Mac-Laurin, moins aplatis que E_1, sont stables; les autres sont instables. Les ellipsoïdes de Jacobi, moins différents de l'ellipsoïde de révolution que E_2, sont stables; les autres sont instables.

Enfin toutes les figures nouvelles dont nous avons parlé plus haut sont instables, à l'exception de la série sur laquelle nous avons insisté à la fin du paragraphe précédent [1].

C'est celle qui dérive de l'ellipsoïde de Jacobi et qui correspond au cas de $n = 3$. C'est elle dont fait partie la forme d'équilibre que nous avons représentée plus haut sur la figure 1.

II. — Conséquences cosmogoniques.

On peut tirer de ce qui précède quelques conséquences intéressantes. Supposons une masse fluide homogène animée d'une rotation uniforme. Imaginons que cette masse se refroidisse et se condense; supposons qu'en se condensant elle demeure homogène et que son refroidissement soit assez lent pour que les frottements aient le temps de maintenir l'uniformité de la rotation.

Le moment de rotation de la masse devra demeurer constant, et comme son moment d'inertie va en diminuant, sa vitesse de rotation ira au contraire en augmentant. Si, au début de la condensation, la vitesse de rotation est faible et la figure de notre masse fluide peu différente d'une sphère, son aplatissement ira en croissant avec la vitesse de rotation.

La masse fluide conservera pendant quelque temps la forme d'un ellipsoïde de révolution d'abord peu aplati (*fig.* 2), puis plus aplati (*fig.* 3).

(Dans les figures 2 à 9 qui représentent les formes successives de la masse qui se condense, chacune de ces formes est représentée par deux projections, l'une verticale dans la partie supérieure de la figure, l'autre horizontale dans la partie inférieure; l'axe de rotation est supposé vertical.)

L'ellipsoïde, s'aplatissant de plus en plus, cessera bientôt d'être stable, ou du moins de conserver la stabilité séculaire. Il est vrai qu'il conservera encore

---

[1] Celle-ci est également instable. *Voir* aux Notes, *Figures piriformes*.

quelque temps la stabilité ordinaire; mais les figures d'équilibre qui ne possèdent que cette sorte de stabilité finissent, comme nous l'avons vu, par être détruites par les frottements. Si donc le refroidissement est assez lent, ces

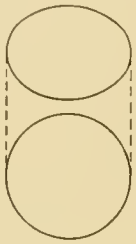

Fig. 2.

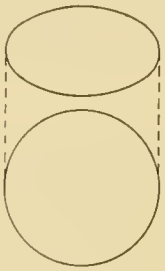

Fig. 3.

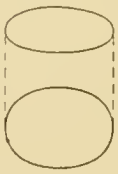

Fig. 4.

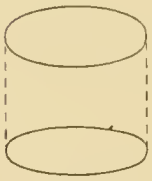

Fig. 5.

ellipsoïdes ne pourront subsister, et la masse fluide devra prendre la forme d'un ellipsoïde de Jacobi, d'abord peu différent d'un ellipsoïde de révolution (*fig.* 4) puis plus allongé (*fig.* 5).

Mais l'ellipsoïde de Jacobi, cessera, à son tour, d'être stable et la masse fluide prendra des formes d'équilibre appartenant à la série de figures nouvelles représentées plus haut (*fig.* 1).

D'abord peu différentes de l'ellipsoïde E_2, notre masse fluide prendra pour ainsi dire la forme d'un œuf avec un gros et un petit bout.

Puis elle se creusera dans le voisinage du petit bout (*fig.* 6); ce relief

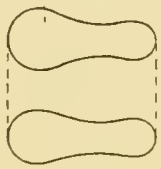

Fig. 6.

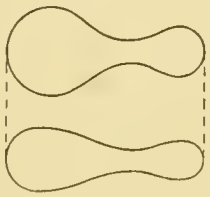

Fig. 7.

s'accentuant peu à peu, il se produira à cette place un étranglement (*fig.* 7) qui fera présager la division du fluide en deux masses distinctes.

Ces deux masses, s'étant séparées, restent d'abord voisines l'une de l'autre.

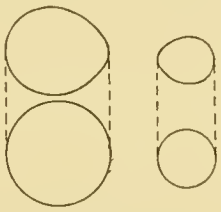

Fig. 8.

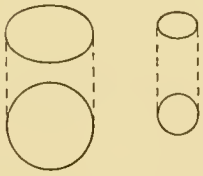

Fig. 9.

Chacune d'elles, sous l'influence de l'attraction de l'autre masse, prend une figure piriforme (*fig.* 8).

Le refroidissement continuant, chacune des masses se condense, sa rotation devient de plus en plus rapide et cesse d'être égale à la vitesse de révolution des deux masses autour de leur centre de gravité commun. Enfin, quand les

dimensions des deux masses sont devenues suffisamment petites par rapport à la distance qui les sépare, leur figure se rapproche de l'ellipsoïde (*fig.* 9).

On pourrait être tenté de tirer de là des conséquences cosmogoniques et d'expliquer de cette manière l'origine des planètes. Le Soleil, en se condensant peu à peu, n'aurait pas alors, comme le croyait Laplace, abandonné successivement des anneaux d'où les planètes seraient sorties ensuite : il se serait au contraire déformé jusqu'à ce qu'une petite masse, destinée à devenir une planète, se détache d'un point quelconque de son équateur. Mais, avant d'adopter cette conclusion, il faut tenir compte de certaines remarques qui lui enlèvent beaucoup de probabilité.

En premier lieu, nous avons supposé notre masse homogène; au contraire, la nébuleuse, qui a servi à former le système solaire, était sans doute très hétérogène et une grande partie de sa masse devait être condensée au centre. Il est impossible, pour le moment, de se rendre compte des changements que cette hétérogénéité apporterait dans nos résultats.

En second lieu, les deux masses représentées dans la figure 9 sont comparables; la plus petite serait sans doute la moitié ou le tiers de l'autre; au contraire la masse de Jupiter n'est que la millième partie de celle du Soleil.

Peut-être le processus que je viens de décrire (*fig.* 2 à 9) se rapproche-t-il plus de celui qui a produit certaines étoiles doubles que de celui d'où est sorti le système solaire. Tout dans tous les cas reste hypothétique.

Anneau de Saturne. — Les figures dont nous venons de parler ne sont pas les seules qui soient connues. Il y a longtemps déjà, M. Matthiessen avait entrevu la possibilité des figures annulaires d'équilibre, et le même résultat avait été retrouvé ensuite par Lord Kelvin, qui s'est borné à l'énoncer. Grâce aux travaux de Mme Kowalevski et aux miens, nous en possédons une démonstration rigoureuse, peu différente probablement de celle que Lord Kelvin avait découverte, mais n'a pas publiée.

On peut établir qu'une masse fluide en rotation, soustraite à toute action extérieure, peut prendre la forme d'un anneau analogue à celui de Saturne, mais sans masse centrale. Si la vitesse de rotation est faible, cet anneau sera une sorte de tore très délié dont la section méridienne différera très peu d'une ellipse peu aplatie; mais l'équilibre de ces figures est instable.

Pour bien le faire comprendre, le mieux est de dire quelques mots des

travaux de Maxwell sur la stabilité de l'anneau de Saturne. On peut faire, au sujet de la nature de cet astre, trois hypothèses différentes :

1° L'anneau est solide;

2° Il est formé d'un très grand nombre de satellites très petits, que le télescope ne peut séparer les uns des autres;

3° Il est fluide.

Laplace avait fait voir depuis longtemps que, si l'anneau est solide, son équilibre ne peut être stable si sa figure est symétrique et si son centre de gravité coïncide avec son centre de figure. Mais il croyait qu'il suffisait, pour rétablir la stabilité, de supposer des irrégularités peu importantes que les observations ne pouvaient déceler.

Un savant anglais, dont des travaux d'une tout autre nature ont illustré le nom, le célèbre électricien Clerk Maxwell, a repris la question par une analyse très simple. Il a montré qu'un anneau solide est instable à moins de présenter des irrégularités énormes. Si elles existaient, le télescope nous les aurait fait connaître depuis longtemps. Si j'ajoute que, d'après les calculs de Hirn, un anneau solide, plusieurs milliers de fois plus résistant que l'acier, se romprait sous l'effort des attractions subies par l'anneau de Saturne, on conclura que la première hypothèse doit être rejetée.

Passons à la seconde, qui a été proposée autrefois par Cassini. Il serait trop difficile de traiter le problème dans toute sa généralité; aussi Maxwell s'est-il borné à quelques cas simples; je ne parlerai que du plus simple de tous. Imaginons une couronne de satellites égaux, également espacés sur une circonférence ayant pour centre Saturne et décrivant cette circonférence d'un mouvement uniforme. Il est clair que ce mouvement peut se continuer indéfiniment si aucune cause extérieure ne vient le troubler. Mais, si une semblable cause vient y apporter une perturbation très petite, la couronne va-t-elle finir par se disloquer, ou bien sa déformation restera-t-elle très petite ? En d'autres termes, l'équilibre de notre couronne sera-t-il stable ?

Je ne puis, bien entendu, reproduire ici l'analyse du savant anglais, et je dois me contenter d'un aperçu grossier. On peut voir d'abord que, si l'astre central n'existait pas, l'équilibre serait instable. Si, en effet, l'un des satellites prend de l'avance pour une cause quelconque, il se rapproche du satellite qui est devant lui et s'éloigne de celui qui est derrière. Il est plus attiré par le premier et

moins par le second : sa marche est encore accélérée; son avance tend à s'accroître et la couronne à se disloquer.

Si nous supposons au contraire que les masses des satellites soient infiniment petites par rapport à celle de Saturne, chaque satellite se comportera comme s'il était seul; or, nous savons que le mouvement d'un satellite isolé est stable.

On peut donc prévoir, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à un calcul complet, que la condition de la stabilité de notre couronne sera que sa masse soit suffisamment petite par rapport à celle de l'astre central.

Le même résultat subsiste pour un système plus compliqué de satellites; c'est encore le même qu'obtient Maxwell dans la troisième hypothèse, c'est-à-dire en supposant la masse fluide. Par un calcul qui n'est peut-être pas parfaitement rigoureux, il démontre qu'un anneau fluide ne peut être stable que si sa densité moyenne est *au plus égale* à la 300e partie de celle de la planète.

Mais, on peut compléter le résultat de Maxwell par un raisonnement qui est assez court pour être reproduit ici. On sait que les électriciens se représentent un champ électrostatique comme sillonné par un très grand nombre de lignes de force. Ce qui définit une de ces lignes, c'est qu'en chacun de ses points la tangente est la direction de la force électrique.

Cette image leur est très précieuse, car elle peut remplacer dans la pratique une foule de formules mathématiques qui sont abstraites et compliquées. Mais ils usent aussi d'une autre image; ils supposent chacune de ces lignes de force remplacée par un petit canal qui est parcouru par un liquide fictif avec un débit constant et dans le sens de la force électrique. La quantité de ce liquide imaginaire qui passe à travers une surface quelconque, s'appelle le flux de force qui traverse cette surface. Tout se passe alors comme si chaque molécule d'électricité positive émettait continuellement une quantité constante de ce liquide, et si chaque molécule d'électricité négative en absorbait au contraire continuellement une quantité constante. On peut, en d'autres termes, résumer toutes les lois de l'Électrostatique, en disant que le flux de force qui traverse une surface fermée est proportionnel à la somme algébrique des masses électriques contenues à l'intérieur de cette surface.

La même règle peut s'appliquer à l'attraction newtonienne : cette force suit, en effet, la même loi que l'attraction électrique, qui est la raison inverse du carré des distances. Elle s'applique encore quand, au lieu de considérer la

gravitation seule, on considère la résultante de la gravitation et de la force centrifuge.

Imaginons en effet une matière fictive dont l'action sur les corps voisins soit conforme à la loi de Newton, mais soit répulsive, au lieu d'être attractive. C'est ce que l'on peut exprimer, si l'on préfère, en disant que la densité de cette matière est négative.

Supposons que cette matière fictive affecte la forme d'un cylindre de révolution indéfini, à l'intérieur duquel se trouvent tous les corps que l'on veut envisager, et que sa densité soit proportionnelle au carré de la vitesse de rotation. La répulsion exercée par cette masse fictive aura même grandeur et même direction que la force centrifuge. Pour obtenir la résultante de la gravitation et de la force centrifuge, il suffira donc de considérer à la fois l'action de toutes ces masses, tant réelles que fictives.

Cela posé, considérons notre masse fluide en rotation et une molécule superficielle faisant partie de cette masse, et soumise par conséquent à la gravitation et à la force centrifuge. La force totale, qui agit sur cette molécule, doit, pour qu'il y ait équilibre, être normale à la surface de la masse; mais, pour que cet équilibre soit stable, il faut de plus que cette force soit dirigée vers l'intérieur de la masse fluide, sans quoi elle tendrait à en détacher notre molécule. Toutes les lignes de force coupent donc normalement la surface de la masse, et le liquide imaginaire, qui est supposé les parcourir, et dont la vitesse a même direction que la force totale, doit toujours traverser cette surface en allant du dehors au dedans. Il en résulte que le flux de force total qui traverse cette surface est positif, et comme, d'après la règle énoncée plus haut, il est proportionnel à la somme algébrique de toutes les masses, tant réelles que fictives, situées à l'intérieur de cette surface, cette somme algébrique doit aussi être positive.

En d'autres termes, la densité moyenne du fluide réel doit être supérieure en valeur absolue à la densité de la matière fictive, laquelle, comme nous l'avons vu, est elle-même proportionnelle au carré de la vitesse de rotation.

Cette règle, appliquée à l'anneau de Saturne, nous apprend qu'un anneau fluide ne peut être stable que si sa densité est *au moins égale* à la seizième partie de celle de la planète. Ce résultat, rapproché de celui de Maxwell, nous amène à cette conclusion que l'anneau ne peut être fluide, et nous force à adopter l'hypothèse de Cassini, que les observations de M. Trouvelot semblent d'ailleurs confirmer.

Pour la même raison, les figures annulaires d'équilibre, étudiées par Mme Kowalevski, ne peuvent être stables.

Figure de la Terre. — Je ne dirai que quelques mots du cas beaucoup plus difficile où la masse en rotation est supposée hétérogène. C'est certainement ce qui se passe pour la Terre, et ce qui complique encore la question, c'est que la loi suivant laquelle la densité varie dans l'intérieur du globe nous est absolument inconnue. Loin de pouvoir nous en servir pour calculer l'aplatissement, nous devons, au contraire, profiter des mesures des géodésiens, pour tâcher de deviner cette loi.

Nous disposons pour résoudre ce problème d'une autre donnée, qui est la constante de la précession des équinoxes. On sait en effet que ce phénomène est dû à l'action du Soleil sur le renflement équatorial du globe terrestre, et comme cette action dépend de la façon dont varie la densité intérieure, les observations de la précession peuvent nous renseigner sur cette variation.

Au premier abord, on serait tenté de croire que le problème est non seulement toujours possible, mais qu'il reste indéterminé et qu'on pourra trouver une infinité de lois satisfaisant à ces deux données d'observation. Loin de là : une série de recherches récentes, parmi lesquelles celles de M. Radau sont les premières en date et en importance, ont montré qu'on ne peut trouver aucune loi des densités qui satisfasse à la fois à l'aplatissement mesuré et à la précession observée.

Les Géodésiens concluent à un aplatissement de 1/292, tandis que l'aplatissement le plus grand qui soit compatible avec la précession observée est de 1/297.

Il est impossible pour le moment de se prononcer sur la valeur des nombreuses hypothèses que l'on peut faire pour expliquer cette divergence.

Les mesures géodésiques doivent-elles être révisées ? doit-on supposer que la Terre n'est pas un ellipsoïde de révolution et que l'aplatissement n'est pas le même suivant les divers méridiens ou dans les deux hémisphères ?

Je ne crois pas que les mesures les plus récentes autorisent cette conclusion.

Admettra-t-on que la Terre, solidifiée depuis longtemps dans presque toute sa masse, a conservé l'aplatissement dû à la vitesse de rotation qu'elle possédait au moment de sa solidification et que sa rotation a depuis cette époque été considérablement ralentie par l'action des marées ?

Croira-t-on au contraire que la croûte solide est très mince et que l'intérieur,

resté liquide, est le siège de mouvements compliqués très différents de ceux que peut prendre un corps solide ? Les calculs de Laplace ayant été faits en regardant la Terre comme un solide invariable, on conçoit que la précession d'un pareil système puisse être très différente de la précession théorique.

Enfin, on peut supposer encore que l'aplatissement primitif a été altéré parce que les diverses couches, en se contractant par suite du refroidissement du globe, ont exercé les unes sur les autres des pressions et se sont mutuellement déformées.

Mais je m'arrête, il est inutile de multiplier les hypothèses puisque toutes ces questions doivent rester provisoirement indécises.

SUR UNE FORME NOUVELLE DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 132, p. 369-371 (18 février 1901).

Ayant eu l'occasion de m'occuper du mouvement de rotation d'un corps solide creux, dont la cavité est remplie de liquide, j'ai été conduit à mettre les équations générales de la Mécanique sous une forme que je crois nouvelle et qu'il peut être intéressant de faire connaître.

Supposons qu'il y ait n degrés de liberté et désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables qui définissent l'état du système. Soient T et U l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Envisageons un groupe transitif continu quelconque. Soit $X_i(f)$ une substitution infinitésimale quelconque de ce groupe, telle que

$$X_i(f) = X_i^1 \frac{df}{dx_1} + X_i^2 \frac{df}{dx_2} + \ldots + X_i^n \frac{df}{dx_n}.$$

Ces substitutions formant un groupe, on devra avoir

$$X_i X_k - X_k X_i = \sum c_{ik,s} X_s.$$

Nous pourrons poser (puisque le groupe est transitif)

$$x'_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} = \eta_1 X_1^\mu + \eta_2 X_2^\mu + \ldots + \eta_r X_r^\mu$$

de telle façon qu'on puisse passer de l'état $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système à l'état infiniment voisin $(x_1 + x'_1\, dt, \ldots, x_n + x'_n\, dt)$ par la substitution infinitésimale du groupe $\Sigma \eta_i\, dt X_i(f)$.

T, au lieu de s'exprimer en fonction des x' et des x, pourra s'exprimer en

fonction des η et des x. Si nous donnons aux η et aux x des accroissements virtuels $\delta\eta$ et δx, il en résultera pour T et U des accroissements

$$\delta T = \sum \frac{dT}{d\eta}\delta\eta + \sum \frac{dT}{dx}\delta x; \qquad \delta U = \sum \frac{dU}{dx}\delta x.$$

Le groupe étant transitif, je pourrai poser

$$\delta x_\mu = \omega_1 X_1^\mu + \omega_2 X_2^\mu + \ldots + \omega_r X_r^\mu$$

de telle façon que l'on puisse passer de l'état x_i du système à l'état infiniment voisin $x_i + \delta x_i$ par la substitution infinitésimale du groupe $\Sigma\omega_i X_i(f)$. Je poserai ensuite

$$\sum \left(\frac{dT}{dx} - \frac{dU}{dx}\right)\delta x = \sum \Omega_i \omega_i.$$

Soit alors l'intégrale de Hamilton

$$J = \int (T - U)\, dt,$$

on aura

$$\delta J = \int \left(\sum \frac{dT}{d\eta_i}\delta\eta_i + \sum \Omega_i \omega_i\right) dt.$$

Or on trouve aisément

$$\delta\eta_i = \frac{d\omega_i}{dt} + \sum c_{ski}\eta_k \omega_s.$$

Le principe de moindre action nous donne alors

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\eta_s} = \sum c_{ski}\frac{dT}{d\eta_i}\eta_k + \Omega_s.$$

Les équations (1) comprennent comme cas particuliers :

1° Les équations de Lagrange, quand le groupe se réduit aux substitutions, toutes permutables entre elles, qui augmentent une des variables x d'une constante infiniment petite.

2° Les équations d'Euler pour la rotation des corps solides, où le rôle des η_i est joué par les composantes p, q, r de la rotation, et celui de Ω_s par les couples dus aux forces extérieures.

Elles sont surtout intéressantes dans le cas où U étant nul, T ne dépend que des η.

SUR UNE GÉNÉRALISATION
DE LA MÉTHODE DE JACOBI

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 149, p. 1105-1108 (13 décembre 1909).

On sait que la méthode de la variation des constantes permet de résoudre un problème de Dynamique quand on sait résoudre un autre problème de Dynamique plus simple, mais très peu différent. Mais il est avantageux de résoudre ce problème approché simple par la méthode de Jacobi, afin que les équations conservent la forme canonique. On peut rencontrer pour cela des difficultés, et c'est ce qui m'est arrivé quand j'ai voulu appliquer cette méthode à la théorie de la précession et de la rotation des corps solides; j'ai été ainsi conduit à généraliser un peu la méthode de Jacobi.

Soit un système dynamique à n degrés de liberté, dont la situation est définie par n coordonnées x_i; nous appellerons T l'énergie cinétique, et U l'énergie potentielle, $T + U = F$ l'énergie totale; nous poserons $y_i = \frac{dT}{dx'_i}$ et nous aurons les équations canoniques de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dx}. \tag{1}$$

Faisons un changement de variables, en exprimant les x en fonction de $n + n'$ variables nouvelles q_k, *en nombre plus grand que celui des degrés de liberté*, et posons

$$p_k = \frac{dT}{dq'_k}.$$

Nous reconnaîtrons qu'on a l'identité

$$\Sigma y\, dx = \Sigma p\, dq; \tag{2}$$

que les p sont liés par n' relations linéaires, de sorte que n seulement d'entre

eux sont indépendants; je les appellerai les p_a; les autres, que j'appellerai les p_b, seront des fonctions des p_a, des q_a et des q_b. On pourrait se demander alors si T peut s'exprimer en fonction des p et des q; l'égalité $dT = \Sigma q\, dp$, qui a lieu quand on regarde les q comme des constantes, nous permet de répondre affirmativement. Donc T et F peuvent s'exprimer en fonction des p_a, des q_a et des q_b, et l'équation des forces vives peut s'écrire

$$F(p_a, q_a, q_b) = \text{const.} \tag{3}$$

Soit maintenant S une fonction des q_a et des q_b, définie par l'équation aux dérivées partielles

$$F\left(\frac{dS}{dq_a}, q_a, -\frac{dS}{dp_b}\right) = \text{const.}, \tag{4}$$

de sorte que

$$p_a = \frac{dS}{dq_a}, \qquad q_b = -\frac{dS}{dp_b}, \tag{5}$$

et dépendant en outre de n constantes arbitraires y'_i (autant que de degrés de liberté); posons

$$x'_i = \frac{dS}{dy'_i}, \tag{6}$$

d'où

$$dS = \Sigma p_a\, dq_a - \Sigma q_b\, dp_b + \Sigma x'\, dy'. \tag{7}$$

Le second membre de cette égalité est une différentielle exacte, si les p_b sont regardés comme des variables indépendantes et, *a fortiori*, si les p_b sont supposés liés aux p_a par les relations linéaires dont nous avons parlé. En rapprochant (7) de (2) on voit que

$$dS_1 = \Sigma y\, dx - \Sigma y'\, dx' \tag{8}$$

est une différentielle exacte; l'identité (8) nous montre d'abord que S_1 est fonction seulement des x et des x', et qu'on a

$$y = \frac{dS_1}{dx}, \qquad y' = -\frac{dS_1}{dx'}, \tag{9}$$

équations qui définissent les x' et les y' en fonction des x et des y. La relation (8) montre que le changement de variables est canonique et n'altère pas la forme canonique des équations [1]. On aura donc pour le problème approché simple

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dx'},$$

---

[1] *Voir* aux Notes, *Principes de Mécanique analytique.*

équations qui s'intègrent immédiatement puisque F ne dépend que des y', et pour le problème complet où F est remplacé par F* :

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dF^*}{dy'}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF^*}{dx'}.$$

Appliquons cette méthode à la théorie de la précession; nous prendrons

$$F^* = T + U, \qquad F = T,$$

parce que U est petit par rapport à T. Nous avons trois degrés de liberté, mais nous prendrons $n + n' = 5$ coordonnées analogues à nos variables q, qui seront :

1° L'angle φ du plan OPz, passant par l'axe Oz mobile et par un axe arbitraire OP avec le plan Oyz des yz mobiles;

2° L'angle ψ de l'axe Oz mobile et de l'axe OP;

3° L'angle χ du plan OPz, avec le plan OPZ qui passe par OP et par l'axe OZ fixe;

4° L'angle ω de OP avec OZ;

5° L'angle θ du plan OPZ avec le plan OYZ des YZ fixes.

Les variables p seront

$$\Phi = \frac{dT}{d\varphi'}, \qquad \Psi = \frac{dT}{d\psi'}, \qquad G = \frac{dT}{d\chi'}, \qquad \Omega = \frac{dT}{d\omega'}, \qquad \Theta = \frac{dT}{d\theta'};$$

elles représentent les moments de rotation par rapport à Oz, à une perpendiculaire à POz, à OP, à une perpendiculaire à POZ, et enfin à OZ. On peut alors exprimer T en fonction de φ, ψ, θ, ω, χ, Φ, G, Θ; et, en introduisant notre fonction S et ne faisant pas varier les constantes y', on aura

$$dS = \Phi\, d\varphi + G\, d\chi + \Theta\, d\theta - \psi\, d\Psi - \omega\, d\Omega. \tag{10}$$

Il faut alors déterminer Φ, G, Θ, ψ et ω de façon que le second membre de (10) soit une différentielle exacte et que $T(\varphi, \psi, \theta, \omega, \chi, \Phi, G, \Theta)$ se réduise à une constante; la solution doit dépendre de trois constantes arbitraires. On y parviendra en faisant

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi = \text{const.}, & \omega = \text{const.}, \qquad G = \text{const.}, \\ \Phi = G\cos\psi = \text{const.}, & \Theta = G\cos\omega = \text{const.}; \end{array}\right. \tag{11}$$

ce qui introduit bien trois constantes arbitraires indépendantes G, Φ et Θ, et qui donne

$$S = \Phi\varphi + G\chi + \Theta\theta - \psi\Psi - \omega\Omega, \qquad T = \frac{G^2}{2A} + \frac{(A-C)\Phi^2}{2AC}$$

(A et C sont les deux moments d'inertie de la Terre).

Les conditions (11) signifient que OP est l'axe des moments de rotation; et l'on en conclut

$$\Psi = \Omega = 0, \qquad S = \Phi\varphi + G\chi + \Theta\theta.$$

Les variables Φ, G, Θ jouent le rôle des y', donc $\varphi = \frac{dS}{d\Phi}$, χ et θ joueront le rôle des x'; les six variables forment donc un système canonique; et l'on a pour une fonction $F^* = T + U$ quelconque

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{dF^*}{dG}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dF^*}{d\Phi}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dF^*}{d\Theta},$$
$$\frac{dG}{dt} = -\frac{dF^*}{d\chi}, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dF^*}{d\varphi}, \qquad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{dF^*}{d\theta};$$

pour le problème approché simple où $F = T$, on a

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{dT}{dG} = \frac{G}{A} = \text{const.}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{A-C}{2AC}\Phi = \text{const.}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{d\Theta} = 0;$$
$$\frac{dG}{dt} = -\frac{dT}{d\chi} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dT}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{dT}{d\theta} = 0.$$

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES
ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 915-918 (30 novembre 1896).

La théorie des solutions périodiques peut, dans certains cas, se rattacher au principe de moindre action.

Supposons trois corps se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse du cube des distances ou d'une puissance plus élevée de ces distances; j'appelle a, b, c ces trois corps.

L'énergie cinétique T est essentiellement positive et il en est de même de la fonction des forces U, qui est égale à une somme de termes de la forme $\frac{kmm'}{r^n}$, où k est une constante positive, m et m' les masses de deux des trois corps, r leur distance et n un exposant au moins égal à 2.

L'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt$$

sera donc essentiellement positive.

Considérons une classe de trajectoires de nos trois corps a, b, c; ce seront des trajectoires fictives, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux équations du mouvement; mais elles seront soumises aux conditions suivantes :

1° Au temps t_1 les distances des trois corps seront les mêmes qu'au temps t_0; les vitesses seront les mêmes en grandeur et feront les mêmes angles avec les côtés du triangle des trois corps; en d'autres termes, la figure formée par les trois corps et par les droites qui représentent leurs vitesses aura repris à l'époque t_1 la même forme qu'elle avait à l'époque t_0; ou bien encore les

distances de ces trois corps seront des fonctions périodiques du temps de période $t_1 - t_0$.

2° La droite bc aura, entre les époques t_0 et t_1, tourné d'un angle donné ω_1.

3° La droite ac aura, entre ces mêmes époques, tourné d'un angle donné $\omega_1 + 2K_2\pi$, K_2 étant un entier donné.

4° La droite ab aura tourné d'un angle $\omega_1 + 2K_3\pi$, K_3 étant un entier donné.

Une classe de trajectoires fictives se trouve ainsi définie par trois constantes entièrement arbitraires t_0, t_1 et ω_1 et par deux entiers arbitraires K_2 et K_3.

Mais l'action hamiltonienne, ne pouvant devenir négative, admettra un minimum, et, en vertu du principe de moindre action, la trajectoire qui correspondra à ce minimum devra être une trajectoire effective et satisfaire aux équations du mouvement.

Cette trajectoire effective, d'après sa définition, correspondra à une solution périodique du problème dont la période sera $t_1 - t_0$.

Je me propose de démontrer que, dans chaque classe de trajectoires fictives, il y en a une qui correspond à un minimum de l'action hamiltonienne et, par conséquent, à une solution périodique.

Pour cela, il me suffit de faire voir qu'en faisant varier d'une manière continue notre trajectoire fictive, elle ne pourra passer d'une classe à l'autre sans que l'action hamiltonienne devienne infinie.

En effet, le passage d'une classe à l'autre s'effectuera lorsque deux des trois corps viendront à se rencontrer. Si, par exemple, a et c se rencontrent, la trajectoire considérée T sera infiniment voisine de deux autres T′ et T″; pour T′, le corps a passera très près de c, mais à droite; pour T″, il passera très près de c, mais à gauche. Il est clair que les valeurs de l'entier K_2, qui correspondent à T′ et à T″, différeront d'une unité.

Je dis maintenant que, si a et c se rencontrent, l'action est infinie.

En effet, l'action sera du même ordre de grandeur que $\int 2U\,dt$, ou que $\int 2\sqrt{U}\,dr$, ou que $2kmm'\int \frac{dr}{r^{\frac{n}{2}}}$, c'est-à-dire infinie si $n \geqq 2$. Or on a $n = 2$ si, comme nous le supposons, l'attraction s'exerce en raison inverse du cube des distances.

Alors, dans chaque classe, il doit y avoir un minimum de l'action; il doit

donc y avoir une trajectoire effective, et cette trajectoire correspond à une solution périodique du problème.

A chaque système de valeurs des deux constantes arbitraires $t_1 - t_0$ et ω_1 et des deux entiers K_2 et K_3 correspond une solution périodique.

Notre raisonnement ne s'applique évidemment que si l'attraction pour les très petites distances est du même ordre de grandeur que l'inverse du cube de la distance ou d'ordre plus grand.

Dans tous ces cas, il y aura une infinité de solutions périodiques.

Mais, dans le cas de la loi de Newton, l'action ne devient plus infinie quand les deux corps se rencontrent; nous ne pouvons plus affirmer qu'il y a une solution périodique dans chaque classe.

Tout ce que nous pouvons dire, c'est qu'à chaque valeur de la période $t_1 - t_0$, et à chaque valeur de l'angle ω_1 (en ne considérant pas comme distinctes deux valeurs différant d'un multiple de 2π), correspond une solution périodique.

On pourrait obtenir certains autres résultats par l'artifice suivant : supposons que la loi d'attraction soit celle de Newton tant que la distance est supérieure à une très petite quantité ε, et celle de l'inverse du cube des distances, quand la distance est plus petite que ε. Alors, les trajectoires seront les mêmes qu'avec la loi de Newton, sauf si deux des corps s'approchent beaucoup l'un de l'autre, auquel cas le mouvement serait troublé pendant un temps très court. Au problème ainsi modifié, les considérations qui précèdent s'appliquent, mais les résultats, applicables au problème ordinaire des trois corps, que l'on peut obtenir ainsi, ne paraissent pas susceptibles d'un énoncé simple.

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES
ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 124, p. 713-716 (5 avril 1897).

Je considère un point mobile dans un plan, les équations du mouvement s'écriront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}, \tag{1}$$

et celle des forces vives s'écrira

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = U + h, \tag{2}$$

U étant la fonction des forces. Je me propose d'étudier à un point de vue nouveau les solutions périodiques de ces équations. La trajectoire qui correspond à une solution périodique sera une courbe fermée (T).

A chaque solution périodique correspondront deux *exposants caractéristiques*, égaux et de signe contraire. Si ces deux exposants sont imaginaires, la solution périodique sera stable; s'ils sont réels, elle sera instable. Mais la considération du principe de moindre action va nous conduire à pousser plus loin cette classification et à distinguer deux sortes de solutions instables.

On sait, par le principe de Maupertuis, que l'intégrale

$$J = \int \sqrt{U + h}\, ds,$$

appelée *action*, est plus petite pour une trajectoire satisfaisant aux équations (1) que pour une courbe infiniment voisine ayant mêmes extrémités.

Cela est vrai si ces deux extrémités sont très voisines l'une de l'autre; mais, en général, tout ce que nous savons est que la variation première δJ de l'intégrale J est nulle.

C'est là une condition nécessaire, mais non suffisante pour qu'il y ait minimum.

Si l'on veut pousser plus loin la discussion, il faut avoir recours à la notion des foyers cinétiques dont je vais rappeler la définition. Soit M un point situé sur une trajectoire T; par ce point je mène une autre trajectoire infiniment voisine de T; si cette trajectoire vient recouper T en un point M', ce point M' sera le foyer de M.

L'étude des foyers cinétiques, dans le cas des solutions périodiques, m'a conduit aux résultats suivants :

Supposons d'abord la solution périodique stable; soient s l'arc de la trajectoire fermée (T) correspondante, compté à partir d'une origine quelconque, et S la longueur totale de cette trajectoire. Il existera une fonction $f(s)$ constamment croissante, augmentant de 2π quand s augmente de S, de telle sorte que

$$f(s+S) = f(s) + 2\pi.$$

La relation entre la valeur s de l'arc correspondant à un point M de (T) et la valeur s' correspondant à son foyer M' sera

$$f(s') = f(s) + \text{const}.$$

Si la solution périodique est instable, deux cas sont à distinguer :

La solution sera de la première sorte, si aucun point de la trajectoire n'a de foyer. Alors les trajectoires correspondant aux solutions asymptotiques seront des courbes spirales s'enroulant autour de (T) et s'en rapprochant asymptotiquement. Les spires de ces courbes spirales ne coupent pas (T) et ne se coupent pas entre elles, au moins si l'on se borne à la partie de la courbe qui ne s'écarte pas trop de (T).

Mais un autre cas peut se présenter et nous dirons alors que la solution périodique instable est de la seconde sorte. La courbe fermée (T) sera divisée en un nombre pair d'arcs; soient $2p$ ce nombre et $A_0, A_1, \ldots, A_{2p-1}$ les points de division. Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment le point A_q par les notations $A_q, A_{q+2p}, A_{q+4p}, \ldots$.

1° Le point A_{q+1} sera le foyer de A_q.

2° Si un point M est sur l'arc $A_q A_{q+1}$, son foyer sera sur l'arc $A_{q+1} A_{q+2}$.

3° Soient M_1 le foyer de M, M_2 le second foyer de M, c'est-à-dire le foyer de M_1, M_q le $q^{\text{ième}}$ foyer de M. Si le point M est sur l'arc $A_0 A_1$, il en sera de même des points M_{2p}, M_{4p}, ..., M_{2kp}, ... et ces points se rapprocheront indéfiniment et constamment de l'un des points A_0 ou A_1.

4° Il existera sur l'arc $A_0 A_1$ un point B_0 qui coïncidera avec son $2p^{\text{ième}}$ foyer et, quand k tendra vers $+\infty$, le point M_{-2kp} se rapprochera indéfiniment de B_0.

Les solutions asymptotiques sont représentées alors par des courbes qui ne présentent plus la même forme que dans le cas précédent : elles coupent une infinité de fois la courbe (T), et les points d'intersection admettent comme points limites le point A_0 et ses foyers ou le point B_0 et ses foyers.

Cela posé, il y a deux faits sur lesquels je veux appeler l'attention :

1° La condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution périodique représentée par une courbe fermée (T) corresponde à une action moindre que toutes les courbes fermées infiniment voisines, c'est que cette solution soit une solution instable de la première sorte.

2° Supposons que l'on fasse varier d'une façon continue la fonction U et les conditions initiales du mouvement et que l'on envisage une solution périodique variant aussi d'une manière continue. On ne pourra jamais passer directement d'une solution instable de la première sorte à une solution instable de la deuxième sorte; on pourra passer seulement d'une solution instable de l'une des deux sortes à une solution stable ou inversement.

Ce que je viens de dire s'appliquerait sans changement au cas du mouvement relatif [1].

Supposons que le point mobile soit rapporté à des axes mobiles, animés d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω.

Les équations s'écriraient alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dy},$$

en comprenant dans la fonction des forces U le terme provenant de la force centrifuge ordinaire.

---

[1] *Voir* aux Notes, *Principes de Mécanique analytique*.

L'équation des forces vives serait encore

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}\right)=\mathrm{U}+h$$

et l'expression de l'action deviendrait

$$\mathrm{J}=\int\left[ds\sqrt{\mathrm{U}+h}+\omega(x\,dy-y\,dx)\right].$$

LES IDÉES DE HERTZ
SUR LA MÉCANIQUE

Revue Générale des Sciences, t. 8, p. 734-743 (30 septembre 1897).

En 1890, le grand électricien Hertz était arrivé à l'apogée de sa gloire; toutes les Académies d'Europe lui avaient prodigué les récompenses dont elles disposaient. Tout le monde espérait que de longues années lui étaient encore réservées et qu'elles seraient aussi brillantes que l'avaient été celles de ses débuts.

Malheureusement, la maladie qui devait l'emporter si prématurément l'avait déjà atteint et bientôt ralentissait et arrêtait presque complètement son activité expérimentale. Il eut à peine le temps d'installer son nouveau laboratoire de Bonn; des maux divers le privèrent et nous privèrent des découvertes qu'il se promettait d'y faire.

Il servait encore les sciences physiques par l'influence énorme qu'il exerçait, par les conseils qu'il donnait à ses élèves; mais cette période n'est marquée que par une seule découverte personnelle, d'une importance capitale, il est vrai, celle de la transparence de l'aluminium par les rayons cathodiques.

Mais s'il était ainsi cruellement détourné des études qui lui avaient été si chères, il ne demeurait pas inactif; si ses sens le trahissaient, son intelligence lui restait, et il l'employait à de profondes réflexions sur la philosophie de la Mécanique. Les résultats de ces réflexions ont été publiés dans un Ouvrage posthume et je voudrais les résumer et les discuter ici brièvement.

Hertz critique d'abord les deux principaux systèmes proposés jusqu'ici et que j'appellerai le système classique et le système énergétique, et il en propose un troisième que j'appellerai le système hertzien.

I. — Système classique.

1. *Définition de la force.* — La première tentative de coordination des faits mécaniques est celle que nous appellerons *le système classique;* c'est, dit Hertz, « la grande route royale dont les principales stations portent les noms d'Archimède, Galilée, Newton et Lagrange.

» Les notions fondamentales que l'on trouve au point de départ sont celles de l'*espace*, du *temps*, de la *force* et de la *masse*. La force, dans ce système, est regardée comme la cause du mouvement; elle préexiste au mouvement et est indépendante de lui. »

Je vais chercher à expliquer pour quelles raisons Hertz n'a pas été satisfait de cette manière de considérer les choses.

Nous avons d'abord les difficultés que l'on rencontre quand on veut définir les notions fondamentales. Qu'est-ce que la *masse?* C'est, répond Newton, le produit du volume par la densité. — Il vaudrait mieux dire, répondent Thomson et Tait, que la densité est le quotient de la masse par le volume. — Qu'est-ce que la *force?* C'est, répond Lagrange, une cause qui produit le mouvement d'un corps ou qui tend à le produire. — C'est, dira Kirchhoff, le produit de la masse par l'*accélération*. Mais alors, pourquoi ne pas dire que la masse est le quotient de la force par l'accélération?

Ces difficultés sont inextricables.

Quand on dit que la force est la cause d'un mouvement, on fait de la Métaphysique, et cette définition, si l'on devait s'en contenter, serait absolument stérile. Pour qu'une définition puisse servir à quelque chose, il faut qu'elle nous apprenne à *mesurer* la force; cela suffit d'ailleurs, il n'est nullement nécessaire qu'elle nous apprenne ce que c'est que la force *en soi*, ni si elle est la cause ou l'effet du mouvement.

Il faut donc définir d'abord l'égalité de deux forces. Quand dira-t-on que deux forces sont égales? C'est, répondra-t-on, quand, appliquées à une même masse, elles lui impriment une même accélération, ou quand, opposées directement l'une à l'autre, elles se font équilibre. Cette définition n'est qu'un trompe-l'œil. On ne peut pas décrocher une force appliquée à un corps pour l'accrocher à un autre corps, comme on décroche une locomotive pour l'atteler à un autre train. Il est donc impossible de savoir quelle accélération telle force, appliquée à tel corps, imprimerait à tel autre corps, *si* elle lui était appliquée.

Il est impossible de savoir comment se comporteraient deux forces qui ne sont pas directement opposées, *si* elles étaient directement opposées.

C'est cette définition que l'on cherche à matérialiser, pour ainsi dire, quand on mesure une force avec un dynamomètre, ou en l'équilibrant par un poids. Deux forces F et F′, que je supposerai verticales et dirigées de bas en haut pour simplifier, sont respectivement appliquées à deux corps C et C′; je suspends un même corps pesant P d'abord au corps C, puis au corps C′; si l'équilibre a lieu dans les deux cas, je conclurai que les deux forces F et F′ sont égales entre elles, puisqu'elles sont égales toutes deux au poids du corps P.

Mais suis-je sûr que le corps P a conservé le même poids quand je l'ai transporté du premier corps au second? Loin de là, *je suis sûr du contraire;* je sais que l'intensité de la pesanteur varie d'un point à un autre, et qu'elle est plus forte, par exemple, au pôle qu'à l'équateur. Sans doute la différence est très faible et, dans la pratique, je n'en tiendrai pas compte; mais une définition bien faite devrait avoir une rigueur mathématique; cette rigueur n'existe pas. Ce que je dis du poids s'appliquerait évidemment à la force du ressort d'un dynamomètre, que la température et une foule de circonstances peuvent faire varier.

Ce n'est pas tout; on ne peut pas dire que le poids du corps P soit appliqué au corps C et équilibre directement la force F. Ce qui est appliqué au corps C, c'est l'action A du corps P sur le corps C; le corps P est soumis de son côté, d'une part à son poids, d'autre part à la réaction R du corps C sur P. En définitive, la force F est égale à la force A, parce qu'elle lui fait équilibre; la force A est égale à R, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction; enfin, la force R est égale au poids de P, parce qu'elle lui fait équilibre. C'est de ces trois égalités que nous déduisons comme conséquence l'égalité de F et du poids de P.

Nous sommes donc obligés de faire intervenir dans la définition de l'égalité de deux forces, le principe même de l'égalité de l'action et de la réaction; *à ce compte, ce principe ne devrait plus être regardé comme une loi expérimentale, mais comme une définition.*

Nous voici donc, pour reconnaître l'égalité de deux forces, en possession de deux règles; égalité de deux forces qui se font équilibre; égalité de l'action et de la réaction. Mais, nous l'avons vu plus haut, ces deux règles sont insuffisantes; nous sommes obligés de recourir à une troisième règle et d'admettre que certaines forces comme, par exemple, le poids d'un corps, sont constantes

en grandeur et en direction. Mais cette troisième règle, je l'ai dit, est une loi expérimentale; elle n'est qu'approximativement vraie; *elle est une mauvaise définition.*

Nous sommes donc ramenés à la définition de Kirchhoff : *la force est égale à la masse multipliée par l'accélération.* Cette « loi de Newton » cesse à son tour d'être regardée comme une loi expérimentale, elle n'est plus qu'une définition. Mais cette définition est encore insuffisante, puisque nous ne savons pas ce que c'est que la masse. Elle nous permet sans doute de calculer le rapport de deux forces appliquées à un même corps à des instants différents; elle ne nous apprend rien sur le rapport de deux forces appliquées à deux corps différents.

Pour la compléter, il faut de nouveau recourir à la troisième loi de Newton (égalité de l'action et de la réaction), regardée encore, non comme une loi expérimentale, mais comme une définition. Deux corps A et B agissent l'un sur l'autre; l'accélération de A multipliée par la masse de A est égale à l'action de B sur A; de même, le produit de l'accélération de B par sa masse est égal à la réaction de A sur B. Comme, par définition, l'action est égale à la réaction, les masses de A et de B sont en raison inverse des accélérations de ces deux corps. Voilà le rapport de ces deux masses défini et c'est à l'expérience à vérifier que ce rapport est constant.

Cela serait très bien si les deux corps A et B étaient seuls en présence et soustraits à l'action du reste du monde. Il n'en est rien; l'accélération de A n'est pas due seulement à l'action de B, mais à celle d'une foule d'autres corps C, D, ... Pour appliquer la règle précédente, il faut donc décomposer l'accélération de A en plusieurs composantes, et discerner quelle est celle de ces composantes qui est due à l'action de B.

Cette décomposition serait encore possible, si nous *admettions* que l'action de C sur A s'ajoute simplement à celle de B sur A, sans que la présence du corps C modifie l'action de B sur A, ou que la présence de B modifie l'action de C sur A; si nous admettions, par conséquent, que deux corps quelconques s'attirent, que leur action mutuelle est dirigée suivant la droite qui les joint et ne dépend que de leur distance; si nous admettions, en un mot, *l'hypothèse des forces centrales.*

On sait que, pour déterminer les masses des corps célestes, on se sert d'un principe tout différent. La loi de la gravitation nous apprend que l'attraction

de deux corps est proportionnelle à leurs masses; si r est leur distance, m et m' leurs masses, k une constante, leur attraction sera $\frac{kmm'}{r^2}$.

Ce qu'on mesure alors, ce n'est pas la masse, rapport de la force à l'accélération, c'est la masse attirante; ce n'est pas l'inertie du corps, c'est son pouvoir attirant.

C'est là un procédé indirect, dont l'emploi n'est pas théoriquement indispensable. Il aurait très bien pu se faire que l'attraction fût inversement proportionnelle au carré de la distance, sans être proportionnelle au produit des masses, qu'elle fût égale à $\frac{f}{r^2}$, mais sans que l'on eût

$$f = kmm'.$$

S'il en était ainsi, on pourrait néanmoins, par l'observation des mouvements *relatifs* des corps célestes, mesurer les masses de ces corps.

Mais avons-nous le droit d'admettre l'hypothèse des forces centrales? Cette hypothèse est-elle rigoureusement exacte? Est-il certain qu'elle ne sera jamais contredite par l'expérience? Qui oserait l'affirmer? Et si nous devons abandonner cette hypothèse, tout l'édifice si laborieusement élevé s'écroulera.

Nous n'avons plus le droit de parler de la composante de l'accélération de A qui est due à l'action de B. Nous n'avons aucun moyen de la discerner de celle qui est due à l'action de C ou d'un autre corps. La règle pour la mesure des masses devient inapplicable.

Que reste-t-il alors du principe de l'égalité de l'action et de la réaction? Si l'hypothèse des forces centrales est rejetée, ce principe doit évidemment s'énoncer ainsi : la résultante géométrique de toutes les forces appliquées aux divers corps d'un système soustrait à toute action extérieure, sera nulle. Ou, en d'autres termes, *le mouvement du centre de gravité de ce système sera rectiligne et uniforme.*

Voilà, semble-t-il, un moyen de définir la masse; la position du centre de gravité dépend évidemment des valeurs attribuées aux masses; il faudra disposer de ces valeurs de façon que le mouvement de ce centre de gravité soit rectiligne et uniforme; cela sera toujours possible si la troisième loi de Newton est vraie, et cela ne sera possible en général que d'une seule manière.

Mais il n'existe pas de système soustrait à toute action extérieure; toutes les parties de l'Univers subissent plus ou moins fortement l'action de toutes les

autres parties. *La loi du mouvement du centre de gravité n'est rigoureusement vraie que si on l'applique à l'Univers tout entier.*

Mais alors il faudrait, pour en tirer les valeurs des masses, observer le mouvement du centre de gravité de l'Univers. L'absurdité de cette conséquence est manifeste; nous ne connaissons que des mouvements relatifs; le mouvement du centre de gravité de l'Univers restera pour nous une éternelle inconnue.

Il ne reste donc rien et nos efforts ont été infructueux; nous sommes acculés à la définition suivante, qui n'est qu'un aveu d'impuissance : *les masses sont des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs.*

Nous pourrions refaire toute la Mécanique en attribuant à toutes les masses des valeurs différentes. Cette Mécanique nouvelle ne serait en contradiction ni avec l'expérience, ni avec les principes généraux de la Dynamique (principe de l'inertie, proportionnalité des forces aux masses et aux accélérations, égalité de l'action et de la réaction, mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité, principe des aires).

Seulement les équations de cette Mécanique nouvelle seraient *moins simples*. Entendons-nous bien : ce seraient simplement les premiers termes qui seraient moins simples, c'est-à-dire ceux que l'expérience nous a déjà fait connaître; peut-être pourrait-on altérer les masses de petites quantités sans que les équations *complètes* gagnent ou perdent en simplicité.

J'ai insisté plus longuement que Hertz lui-même sur cette discussion; mais je tenais à bien montrer que Hertz n'a pas cherché à Galilée et à Newton une simple querelle d'Allemand; nous devons conclure, qu'avec le système classique, *il est impossible de donner de la force et de la masse une idée satisfaisante.*

2. *Objections diverses.* — Hertz se demande ensuite si les principes de la Mécanique sont rigoureusement vrais. « Dans l'opinion de beaucoup de physiciens, dit-il, il apparaîtra comme inconcevable que l'expérience la plus éloignée puisse jamais changer quelque chose aux inébranlables principes de la Mécanique; et cependant ce qui sort de l'expérience peut toujours être rectifié par l'expérience. »

Après ce que nous venons de dire, ces craintes paraîtront superflues. Les principes de la Dynamique nous apparaissaient d'abord comme des vérités expérimentales; mais nous avons été obligés de nous en servir comme de définitions. C'est *par définition* que la force est égale au produit de la masse par

l'accélération; voilà un principe qui est désormais placé hors de l'atteinte d'aucune expérience ultérieure. C'est de même par définition que l'action est égale à la réaction.

Mais alors, dira-t-on, ces principes invérifiables sont absolument vides de toute signification; l'expérience ne peut les contredire; mais ils ne peuvent rien nous apprendre d'utile; à quoi bon alors étudier la Dynamique?

Cette condamnation trop rapide serait injuste. Il n'y a pas, dans la Nature, de système *parfaitement* isolé, parfaitement soustrait à toute action extérieure; mais il y a des systèmes *à peu près* isolés.

Si l'on observe un pareil système, on peut étudier non seulement le mouvement relatif de ses diverses parties l'une par rapport à l'autre, mais le mouvement de son centre de gravité par rapport aux autres parties de l'Univers. On constate alors que le mouvement de ce centre de gravité est *à peu près* rectiligne et uniforme, conformément à la troisième loi de Newton.

C'est là une vérité expérimentale, mais elle ne pourra être infirmée par l'expérience; que nous apprendrait en effet une expérience plus précise? Elle nous apprendrait que la loi n'était qu'à peu près vraie; mais, cela, nous le savions déjà.

On s'explique maintenant comment l'expérience a pu servir de base aux principes de la Mécanique et cependant ne pourra jamais les contredire.

Mais revenons à l'argumentation de Hertz. Le système classique est incomplet, car tous les mouvements qui sont compatibles avec les principes de la Dynamique ne sont pas réalisés dans la Nature, ni même réalisables. En effet, il est évident que les principes des aires et du mouvement du centre de gravité ne sont pas les seules lois qui régissent les phénomènes naturels. Sans doute, il serait déraisonnable d'exiger de la Dynamique qu'elle embrassât dans une même formule toutes les lois que la Physique a découvertes ou pourra découvrir. Mais il n'en est pas moins vrai qu'on doit regarder comme incomplet et insuffisant un système de Mécanique où le principe de la conservation de l'énergie est passé sous silence.

« Notre système, conclut Hertz, embrasse, il est vrai, *tous* les mouvements naturels, mais il en embrasse en même temps beaucoup *d'autres* qui ne sont pas naturels. Un système qui exclura une partie de ces mouvements, sera plus conforme à la nature des choses et constituera par conséquent un progrès. » Tel sera, par exemple, le système énergétique dont nous parlerons plus loin et

dans lequel le principe fondamental de la conservation de l'énergie s'introduit tout naturellement.

Peut-être ne comprendra-t-on pas très bien ce qui empêche d'annexer tout simplement ce principe fondamental aux autres principes du système classique.

Mais Hertz se pose encore une autre question :

Le système classique nous donne une image du monde extérieur. Cette image est-elle *simple* ? y a-t-on épargné les traits parasites, introduits arbitrairement à côté des traits essentiels ? Les forces que nous sommes conduits à introduire ne sont-elles pas de véritables rouages inutiles, tournant à vide ?

Sur cette table repose un morceau de fer ; un observateur non prévenu croira que, puisqu'il n'y a pas de mouvement, il n'y a pas de force. Combien il se tromperait ! La Physique nous enseigne que chaque atome du fer est attiré par tous les autres atomes de l'Univers. De plus, chaque atome du fer est magnétique et par conséquent soumis à l'action de tous les aimants de l'Univers. Tous les courants électriques du monde agissent aussi sur cet atome. J'allais oublier les forces électrostatiques, les forces moléculaires, etc.

Si quelques-unes de ces forces agissaient seules, leur action serait énorme ; le morceau de fer volerait en éclats. Heureusement elles agissent toutes et elles se contrebalancent, de sorte qu'il ne se passe rien du tout. Votre observateur non prévenu, qui ne voit qu'une chose, un morceau de fer en repos, conclura évidemment que toutes ces forces n'existent que dans votre imagination.

Sans doute, toutes ces suppositions n'ont rien d'absurde, mais un système qui nous en débarrasserait serait, par cela seul, meilleur que le nôtre.

Il est impossible de n'être pas frappé de la portée de cette objection. Pour montrer, d'ailleurs, qu'elle n'est pas purement artificielle, il me suffira de rappeler le souvenir d'une polémique qui a eu lieu, il y a quelques années, entre deux savants tout à fait éminents, von Helmholtz et M. Bertrand, à propos des actions mutuelles des courants. M. Bertrand, cherchant à traduire dans le langage classique la théorie de von Helmholtz, se heurtait à des contradictions insolubles. Chaque élément du courant devait être soumis à un couple ; mais un couple se compose de deux forces parallèles, égales et de sens contraire. M. Bertrand calculait que chacune de ces deux composantes devait être considérable, assez grande pour amener la destruction du fil, et il concluait au rejet de la théorie. Au contraire, von Helmholtz, partisan du système énergétique, ne voyait là aucune difficulté.

Ainsi, d'après Hertz, le système classique doit être abandonné :

1° parce qu'une bonne définition de la force est impossible;

2° parce qu'il est incomplet;

3° parce qu'il introduit des hypothèses parasites et que ces hypothèses peuvent engendrer souvent des difficultés purement artificielles et assez grandes cependant pour arrêter les meilleurs esprits.

II. — Système énergétique.

1. *Objections diverses.* — Le système énergétique a pris naissance à la suite de la découverte du principe de la conservation de l'énergie. C'est von Helmholtz qui lui a donné sa forme définitive.

On commence par définir deux quantités qui jouent le rôle fondamental dans cette théorie. Ces deux quantité sont : d'une part, l'*énergie cinétique* ou force vive; d'autre part, l'*énergie potentielle*.

Tous les changements que peuvent subir les corps de la nature sont régis par deux lois expérimentales.

1° La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est une constante. C'est le principe de la conservation de l'énergie.

2° Si un système de corps est dans la situation A à l'époque t_0 et dans la situation B à l'époque t_1, il va toujours de la première situation à la seconde par un chemin tel que la valeur *moyenne* de la différence entre les deux sortes d'énergie, dans l'intervalle de temps qui sépare les deux époques t_0 et t_1, soit aussi petite que possible.

C'est là le principe de Hamilton, qui est une des formes du principe de moindre action.

La théorie énergétique présente sur la théorie classique les avantages suivants :

1° Elle est moins incomplète; c'est-à-dire que les principes de la conservation de l'énergie et de Hamilton nous apprennent plus que les principes fondamentaux de la théorie classique et excluent certains mouvements que la Nature ne réalise pas et qui seraient compatibles avec la théorie classique;

2° Elle nous dispense de l'hypothèse des atomes, qu'il était presque impossible d'éviter avec la théorie classique.

Mais elle soulève à son tour de nouvelles difficultés; avant de parler des objections de Hertz, j'en signale deux qui me viennent à l'esprit :

Les définitions des deux sortes d'énergie soulèveraient des difficultés presque aussi grandes que celles de la force et de la masse dans le premier système. Cependant on s'en tirerait plus facilement, au moins dans les cas les plus simples.

Supposons un système isolé formé d'un certain nombre de points matériels; supposons que ces points soient soumis à des forces ne dépendant que de leur position relative et de leurs distances mutuelles et indépendantes de leurs vitesses. En vertu du principe de la conservation de l'énergie, il devra y avoir une fonction des forces.

Dans ce cas simple, l'énoncé du principe de la conservation de l'énergie est d'une extrême simplicité. Une certaine quantité, accessible à l'expérience, doit demeurer constante. Cette quantité est la somme de deux termes : le premier dépend seulement de la position des points matériels et est indépendant de leurs vitesses; le second est proportionnel au carré de ces vitesses. Cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.

Le premier de ces termes, que j'appellerai U, sera l'énergie potentielle; le second, que j'appellerai T, sera l'énergie cinétique.

Il est vrai que si $T + U$ est une constante, il en est de même d'une fonction quelconque de $T + U$, $\varphi(T + U)$.

Mais cette fonction $\varphi(T + U)$ ne sera pas la somme de deux termes, l'un indépendant des vitesses, l'autre proportionnel au carré de ces vitesses. Parmi les fonctions qui demeurent constantes, il n'y en a qu'une qui jouisse de cette propriété, c'est $T + U$ (ou une fonction linéaire de $T + U$, ce qui ne fait rien, puisque cette fonction linéaire peut toujours être ramenée à $T + U$ par un changement d'unité et d'origine). C'est alors ce que nous appellerons l'énergie; c'est le premier terme que nous appellerons l'énergie potentielle et le second qui sera l'énergie cinétique. La définition des deux sortes d'énergie peut donc être poussée jusqu'au bout sans aucune ambiguïté.

Il en est de même de la définition des masses. L'énergie cinétique ou force vive s'exprime très simplement à l'aide des masses et des vitesses relatives de tous les points matériels, par rapport à l'un d'entre eux. Ces vitesses relatives sont accessibles à l'observation, et, quand nous aurons l'expression de l'énergie cinétique en fonction de ces vitesses relatives, les coefficients de cette expression nous donneront les masses.

Ainsi, dans ce cas simple, on peut définir les notions fondamentales sans difficulté. Mais les difficultés reparaissent dans les cas plus compliqués et, par exemple, si les forces, au lieu de dépendre seulement des distances, dépendent aussi des vitesses. Par exemple, Weber suppose que l'action mutuelle de deux molécules électriques dépend non seulement de leur distance, mais de leur vitesse et de leur accélération. Si les points matériels s'attiraient d'après une loi analogue, U dépendrait de la vitesse, et il pourrait contenir un terme proportionnel au carré de la vitesse.

Parmi les termes proportionnels aux carrés des vitesses, comment discerner ceux qui proviennent de T ou de U? Comment, par conséquent, distinguer les deux parties de l'énergie?

Mais il y a plus, comment définir l'énergie elle-même? Nous n'avons plus aucune raison de prendre comme définition $T + U$ plutôt que toute autre fonction de $T + U$, quand a disparu la propriété qui caractérisait $T + U$, celle d'être la somme de deux termes d'une forme particulière.

Mais ce n'est pas tout, il faut tenir compte, non seulement de l'énergie mécanique proprement dite, mais des autres formes de l'énergie, chaleur, énergie chimique, énergie électrique, etc. Le principe de la conservation de l'énergie doit s'écrire

$$T + U + Q = \text{const.},$$

où T représenterait l'énergie cinétique sensible, U l'énergie potentielle de position, dépendant seulement de la position des corps, Q l'énergie interne moléculaire, sous la forme thermique, chimique ou électrique.

Tout irait bien si ces trois termes étaient absolument distincts, si T était proportionnel au carré des vitesses, U indépendant de ces vitesses et de l'état des corps, Q indépendant des vitesses et des positions des corps et dépendant seulement de leur état interne.

L'expression de l'énergie ne pourrait se décomposer que d'une seule manière en trois termes de cette forme.

Mais il n'en est pas ainsi; considérons des corps électrisés : l'énergie électrostatique due à leur action mutuelle dépendra évidemment de leur charge, c'est-à-dire de leur état; mais elle dépendra également de leur position. Si ces corps sont en mouvement, ils agiront l'un sur l'autre électrodynamiquement et l'énergie électrodynamique dépendra non seulement de leur état et de leur position, mais de leurs vitesses.

Nous n'avons donc plus aucun moyen de faire le triage des termes qui doivent faire partie de T, de U et de Q et de séparer les trois parties de l'énergie.

Si $(T + U + Q)$ est constant, il en est de même d'une fonction quelconque

$$\varphi(T + U + Q).$$

Si $T + U + Q$ était de la forme particulière que j'ai envisagée plus haut, il n'en résulterait pas d'ambiguïté; parmi les fonctions $\varphi(T + U + Q)$ qui demeurent constantes, il n'y en aurait qu'une qui serait de cette forme particulière, et ce serait celle-là que je conviendrais d'appeler énergie.

Mais je l'ai dit, il n'en est pas rigoureusement ainsi; parmi les fonctions qui demeurent constantes, il n'y en a pas qui puissent rigoureusement se mettre sous cette forme particulière; dès lors, comment choisir parmi elles celle qui doit s'appeler l'énergie? Nous n'avons plus rien qui puisse nous guider dans notre choix.

Il ne nous reste plus qu'un énoncé pour le principe de la conservation de l'énergie; *il y a quelque chose qui demeure constant*. Sous cette forme, il se trouve à son tour hors des atteintes de l'expérience et se réduit à une sorte de tautologie. Il est clair que si le monde est gouverné par des lois, il y aura des quantités qui demeureront constantes. Comme les principes de Newton, et pour une raison analogue, le principe de la conservation de l'énergie, fondé sur l'expérience, ne pourrait plus être infirmé par elle.

Cette discussion montre qu'en passant du système classique au système énergétique, on a réalisé un progrès; mais elle montre, en même temps, que ce progrès est insuffisant.

Une autre objection me semble encore plus grave; le principe de moindre action est applicable aux phénomènes réversibles; mais il n'est nullement satisfaisant en ce qui concerne les phénomènes irréversibles; la tentative de von Helmholtz pour l'étendre à ce genre de phénomènes n'a pas réussi et ne pouvait réussir; sous ce rapport tout reste à faire.

Ce sont d'autres objections, d'ordre presque métaphysique, que Hertz développe le plus longuement.

Si l'énergie est pour ainsi dire *matérialisée*, elle devra être toujours positive. Or, il y a des cas où il est difficile d'éviter la considération de l'énergie négative. Considérons, par exemple, Jupiter tournant autour du Soleil; l'énergie totale a pour expression $av^2 - \frac{b}{r} + c$, où a, b, c sont trois constantes positives, v la vitesse de Jupiter; r sa distance au Soleil.

Comme nous disposons de la constante c, nous pouvons la supposer assez grande pour que l'énergie soit positive; il y a déjà là quelque chose d'arbitraire qui choque l'esprit.

Mais, il y a plus. Imaginons, maintenant, qu'un corps céleste d'une masse énorme et d'une vitesse énorme vienne à traverser le système solaire; quand il aura passé et qu'il se sera éloigné de nouveau à d'immenses distances, les orbites des planètes auront subi des perturbations considérables. Nous pouvons imaginer, par exemple, que le grand axe de l'orbite de Jupiter soit devenu beaucoup plus petit, mais que cette orbite soit restée sensiblement circulaire. Quelque grande que soit la constante c, si le nouveau grand axe est très petit, l'expression $av^2 - \frac{b}{r} + c$ sera devenue négative, et l'on verra reparaître la difficulté que nous avions cru éviter en donnant à c une grande valeur.

En résumé, nous ne pouvons pas assurer que l'énergie demeurera toujours positive.

D'autre part, pour *matérialiser* l'énergie, il faut la *localiser;* pour l'énergie cinétique, cela est facile, mais il n'en est pas de même pour l'énergie potentielle. Où localiser l'énergie potentielle due à l'attraction de deux astres? Est-ce dans l'un des deux astres? Est-ce dans les deux? Est-ce dans le milieu intermédiaire?

L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est-à-dire le chemin le plus court.

Cette molécule semble connaître le point où l'on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre. Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes.

2. *Objection de la boule* [1]. — La dernière objection, qui paraît être celle qui a le plus frappé Hertz, est d'une nature un peu différente.

On sait ce qu'on appelle un système à liaisons; imaginons d'abord deux

---

[1] *Voir* aux Notes, *Principes de Mécanique analytique.*

points réunis par une tringle rigide de façon que leur distance soit maintenue invariable ; ou, plus généralement, supposons qu'un mécanisme quelconque maintienne une relation entre les coordonnées de deux ou plusieurs points du système. C'est là une première sorte de liaison qu'on appelle « liaison solide ».

Supposons maintenant qu'une sphère soit assujettie à rouler sur un plan. La vitesse du point de contact doit être nulle ; nous avons donc une seconde sorte de liaison qui s'exprime par une relation non plus seulement entre les coordonnées des divers points du système, mais entre leurs coordonnées et leurs vitesses.

Les systèmes où il y a des liaisons de la seconde sorte jouissent d'une propriété curieuse que je vais chercher à expliquer sur l'exemple simple que je viens de citer, celui d'une boule roulant sur un plan horizontal.

Soit O un point du plan horizontal et C le centre de la sphère.

Pour bien définir la situation de la sphère mobile, je prendrai trois axes de coordonnées fixes Ox, Oy et Oz, les deux premiers situés dans le plan horizontal sur lequel roule la sphère ; et trois axes de coordonnées invariablement liées à la sphère $C\xi$, $C\eta$ et $C\zeta$.

La situation de la sphère sera entièrement définie quand on se donnera les deux coordonnées du point de contact et les neuf cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes. Soit A une position de la sphère où le point de contact est en O à l'origine et où les axes mobiles sont parallèles aux axes fixes.

Les coordonnées du point de contact sont

$$x = 0, \qquad y = 0$$

et les neuf cosinus directeurs :

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & 1. \end{matrix}$$

Donnons à la sphère une rotation infiniment petite ε autour de l'axe $C\xi$; elle viendra dans une position B où les coordonnées du point de contact deviennent

$$x = 0, \qquad y = 0$$

et les neuf cosinus :

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0; \\ 0, & \cos\varepsilon, & \sin\varepsilon; \\ 0, & -\sin\varepsilon, & \cos\varepsilon. \end{matrix}$$

Mais cette rotation est impossible puisqu'elle ferait glisser et non rouler la

sphère sur le plan. Il est donc impossible de passer de la position A à la position infiniment voisine B *directement*, c'est-à-dire par un mouvement infiniment petit.

Mais nous allons voir que ce passage peut se faire *indirectement*, c'est-à-dire par un mouvement fini.

Partons de la position A. Faisons rouler la sphère sur le plan de telle façon que l'axe instantané de rotation soit situé dans le plan horizontal et à chaque instant parallèle à l'axe Oy, et arrêtons-nous quand l'axe $C\xi$ sera devenu vertical et parallèle à Oz. Nous serons arrivés dans une position D où les coordonnées du point de contact seront devenues

$$x = \frac{\pi}{2}R, \qquad y = 0,$$

R étant le rayon de la sphère et les neuf cosinus :

$$\begin{matrix} 0, & 0, & -1; \\ 0, & 1, & 0; \\ +1, & 0, & 0. \end{matrix}$$

Dans la position D le point de contact est à l'extrémité de l'axe $C\xi$ qui est vertical.

Imprimons à la sphère une rotation ε autour de l'axe $C\xi$; cette rotation est un pivotement autour de l'axe vertical passant par le point de contact, elle ne comporte aucun glissement, elle est donc compatible avec les liaisons.

La sphère est venue alors dans une position E où les coordonnées de contact sont

$$x = \frac{\pi}{2}R, \qquad y = 0,$$

et les cosinus :

$$\begin{matrix} 0, & 0, & -1; \\ \sin\varepsilon, & \cos\varepsilon, & 0; \\ \cos\varepsilon, & -\sin\varepsilon, & 0. \end{matrix}$$

Faisons maintenant rouler la sphère de façon que l'axe instantané de rotation reste constamment parallèle à Oy et, par conséquent, que le contact ait tout le temps lieu sur l'axe Ox. Arrêtons-nous quand le point de contact sera revenu à l'origine O. Il est aisé de voir que nous sommes arrivés à la position B.

On peut donc aller de la position A à la position B en passant par l'intermédiaire des positions D et E.

Hertz appelle *holonomes* les systèmes tels que, si les liaisons ne permettent

pas de passer directement d'une certaine position à une autre infiniment voisine, elles ne permettent pas non plus de passer de l'une à l'autre indirectement. Ce sont les systèmes où il n'y a que des liaisons solides.

On voit que notre sphère n'est pas un système holonome.

Or, il arrive ceci que le principe de moindre action n'est pas applicable aux systèmes non holonomes.

En effet, on peut passer de la positon A à la position B par le chemin que je viens de dire, et sans doute par beaucoup d'autres chemins; parmi tous ces chemins il y en a évidemment un qui correspond à une action plus petite que tous les autres; la sphère devrait donc pouvoir le suivre pour aller de A en B; il n'en est rien; quelles que soient les conditions initiales du mouvement, la sphère n'ira jamais de A en B.

Il y a plus, si la sphère va effectivement de la position A à une autre position A', elle ne prendra pas toujours le chemin qui correspond à l'action minimum.

Le principe de moindre action n'est plus vrai.

« Dans ce cas, dit Hertz, une sphère qui obéirait à ce principe, semblerait un être vivant qui poursuivrait consciemment un but déterminé, tandis qu'une sphère, qui suivrait la loi de la Nature, offrirait l'aspect d'une masse inanimée roulant uniformément... Mais, dira-t-on, de semblables liaisons n'existent pas dans la Nature; ce prétendu roulement sans glissement n'est qu'un roulement avec un petit glissement. Ce phénomène rentre dans les phénomènes irréversibles tels que le frottement, encore mal connus et auxquels nous ne *savons* pas encore appliquer les vrais principes de la Mécanique.

« Un roulement sans glissement, répondrons-nous, n'est contraire ni au principe de l'énergie ni à aucune des lois connues de la Physique; ce phénomène peut être réalisé dans le monde visible avec une telle approximation qu'on a pu s'en servir pour construire les machines d'intégration les plus délicates (planimètres, analyseurs harmoniques, etc.). Nous n'avons aucun droit de l'exclure comme impossible; mais le serait-il et ne pourrait-il se réaliser qu'approximativement que les difficultés ne disparaîtraient pas. Pour adopter un principe, nous devons exiger qu'appliqué à un problème dont les données sont approximativement exactes, il donne aussi des résultats approximativement exacts. Et d'ailleurs les autres liaisons, les liaisons solides ne sont aussi qu'approximativement réalisées dans la Nature; on ne les exclut pas cependant... ».

III. — Système hertzien.

Voici maintenant quel est le système que Hertz propose de substituer aux deux théories qu'il critique. Ce système repose sur les hypothèses suivantes :

1° Il n'y aurait dans la Nature que des systèmes à liaisons, mais soustraits à l'action de toute force extérieure ;

2° Si certains corps nous paraissent obéir à des forces, c'est qu'ils sont *liés* à d'autres corps qui, pour nous, sont invisibles.

Un point matériel qui nous semble libre ne décrit pas cependant une trajectoire rectiligne; les anciens mécaniciens disaient qu'il s'en écarte parce qu'il est soumis à une force; Hertz dit qu'il s'en écarte parce qu'il n'est pas libre, mais lié à d'autres points invisibles.

Cette hypothèse semble étrange au premier abord : pourquoi en dehors des corps visibles introduire des corps invisibles hypothétiques? Mais, répond Hertz, les deux anciennes théories sont obligées également de supposer en dehors des corps visibles, je ne sais quels êtres invisibles; la théorie classique introduit les forces, la théorie énergétique introduit l'énergie; mais ces êtres invisibles, force et énergie, sont d'une nature inconnue et mystérieuse : les êtres hypothétiques que j'imagine sont, au contraire, tout à fait de même nature que les corps visibles.

N'est-ce pas plus simple et plus naturel ?

On pourrait discuter sur ce point et soutenir que les entités des anciennes théories doivent être retenues précisément à cause de leur nature mystérieuse. Respecter ce mystère, c'est un aveu d'ignorance; et puisque notre ignorance est certaine, ne vaut-il pas mieux l'avouer que la dissimuler ?

Mais passons, et voyons quel parti tire Hertz de ses hypothèses.

Les mouvements des systèmes à liaisons, sans force extérieure, sont régis par une loi unique.

Parmi les mouvements compatibles avec les liaisons, celui qui se réalisera sera celui qui sera tel que la somme des masses multipliées par le carré des accélérations soit minimum.

Ce principe équivaut à celui de la moindre action si le système est holonome, mais il est plus général, car il s'applique aussi aux systèmes non holonomes.

Pour bien nous rendre compte de la portée de ce principe, prenons un exemple simple : celui d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface. Ici

nous n'avons qu'un seul point matériel; l'accélération doit donc être minimum; pour cela, il faut que l'accélération tangentielle soit nulle; or, cette accélération est égale à $\frac{dv}{dt}$, v étant la vitesse et t le temps; donc v est une constante, et le mouvement du point est uniforme; il faut, de plus, que l'accélération normale soit minimum; or elle est égale à $\frac{v^2}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire, ou à $\frac{v^2}{R\cos\varphi}$, R étant le rayon de courbure de la section normale à la surface, et φ, l'angle du plan osculateur à la trajectoire avec la normale à la surface.

Or la vitesse est supposée connue en grandeur et en direction. Donc v et R sont connus.

Il faut donc que $\cos\varphi = 1$, c'est-à-dire que le plan osculateur soit normal à la surface; c'est-à-dire que le point mobile décrive une ligne géodésique.

Pour faire comprendre maintenant comment peut s'expliquer le mouvement des systèmes qui nous *paraissent* soumis à des forces, je prendrai encore un exemple simple, celui du régulateur à boules. Cet appareil bien connu se compose d'un parallélogramme articulé ABCD : les angles opposés B et D de ce parallélogramme portent des boules dont la masse est notable; l'angle supérieur A est fixe; l'angle inférieur C porte un anneau qui peut glisser le long d'une tige verticale fixe AX; tout l'appareil est animé d'un mouvement de rotation rapide autour de la tige AX. A l'anneau C est suspendue une tringle T.

La force centrifuge tend à écarter les boules et par conséquent à soulever l'anneau C et la tringle T. Cette tringle T est donc soumise à une traction qui est d'autant plus forte que la rotation est plus rapide.

Supposons maintenant un observateur qui voit seulement cette tringle et imaginons que les boules, la tige AX, le parallélogramme, soient faits d'une matière invisible pour lui. Cet observateur constatera la traction exercée sur la tringle T; mais comme il ne verra pas les organes qui la produisent, il l'attribuera à une cause mystérieuse, à une « force », à une attraction exercée par le point A sur la tringle.

Eh bien, d'après Hertz, toutes les fois que nous imaginons une force, nous sommes dupes d'une illusion analogue.

Une question se pose alors : peut-on imaginer un système articulé qui imite un système de forces, défini par une loi quelconque ou en approchant autant qu'on voudra? La réponse doit être affirmative; je me contenterai de rappeler un théorème de M. Kœnigs qui pourrait servir de base à une démonstration.

Voici ce théorème : *On peut toujours imaginer un système articulé, tel qu'un point de ce système décrive une courbe ou une surface algébrique quelconque; ou, plus généralement, on peut imaginer un système articulé tel qu'en vertu de ses liaisons, les coordonnées des divers points du système soient assujetties à des relations algébriques données quelconques.*

Seulement, les hypothèses auxquelles on serait conduit pourraient être très compliquées.

Ce n'est pas d'ailleurs la première tentative que l'on faisait dans ce sens. Il est impossible de ne pas rapprocher les hypothèses de Hertz de la théorie de lord Kelvin sur l'élasticité gyrostatique.

Lord Kelvin, on le sait, a cherché à expliquer les propriétés de l'éther sans faire intervenir aucune force. Il a même donné une forme définitive à son hypothèse et représente l'éther par un de ces modèles mécaniques comme les aiment les Anglais. Les savants anglais, satisfaits d'avoir donné un corps à leurs idées, de les avoir rendues tangibles, ne sont pas effrayés par la complication de ces modèles où l'on a multiplié les tringles, les bielles, les coulisses, comme dans un atelier de mécanicien.

Décrivons, pour en donner une idée, le modèle qui représente l'éther gyrostatique. L'éther serait formé d'une sorte de réseau. Chaque maille de ce réseau est un tétraèdre. Chacune des arêtes de ce tétraèdre est formée de deux tiges, l'une pleine et l'autre creuse, coulissant l'une dans l'autre; cette arête est donc extensible, mais non flexible.

Dans chaque maille se trouve un appareil formé de trois lignes invariablement fixées l'une à l'autre et formant un trièdre trirectangle. Chacune de ces trois tiges s'appuie sur deux des arêtes opposées du tétraèdre; enfin, chacune d'elles porte quatre gyroscopes.

Dans le système que je viens de décrire, il n'y a pas d'énergie potentielle; mais seulement de l'énergie cinétique, celle des tétraèdres, et celle des gyroscopes. Cependant, un milieu ainsi constitué se comporterait comme un milieu élastique; il transmettrait des ondulations transversales absolument comme l'éther.

J'ajouterai une chose encore : avec des systèmes articulés de ce genre, contenant des gyroscopes, on peut non seulement imiter toutes les forces que nous trouvons dans la Nature, mais encore en imiter d'autres que la Nature ne saurait réaliser; c'est précisément là le but que lord Kelvin se proposait; il voulait

expliquer certaines propriétés de l'éther dont les hypothèses ordinaires lui paraissaient incapables de rendre compte.

On sait que l'axe du gyroscope tend à conserver une direction fixe dans l'espace; quand il en est écarté, il tend à y revenir comme s'il était sollicité par une force dirigeante. Cette force apparente qui tend à maintenir la direction du gyroscope, n'est pas, comme les forces réelles, contrebalancée par une réaction égale et contraire. Elle est donc affranchie de la loi de l'action et de la réaction, et de ses conséquences telles que la loi des aires, auxquelles sont soumises les forces naturelles.

On conçoit donc que l'hypothèse gyrostatique, où l'on est affranchi de cette règle restrictive, ait rendu compte de faits que ne pouvaient expliquer les hypothèses ordinaires qui y restent assujetties.

Que doit-on penser, en définitive, de la théorie de Hertz? Intéressante à coup sûr, elle ne me satisfait pas entièrement parce qu'elle fait la part trop grande à l'hypothèse.

Hertz s'est mis à l'abri de quelques-unes des objections qui l'avaient tourmenté ; il ne paraît pas les avoir écartées toutes.

Les difficultés que nous avons longuement discutées au début de cet article pourraient se résumer ainsi :

On a exposé les principes de la Dynamique de bien des manières; mais jamais on n'a suffisamment distingué ce qui est définition, ce qui est vérité expérimentale, ce qui est théorème mathématique. Dans le système hertzien, la distinction n'est pas encore parfaitement nette, et, de plus, un quatrième élément est introduit : l'hypothèse. Néanmoins, par cela seul qu'il est nouveau, ce mode d'exposition est utile : il nous force à réfléchir, à nous affranchir de vieilles associations d'idées. Nous ne pouvons pas encore voir le monument tout entier : c'est quelque chose d'en avoir une perspective nouvelle, prise d'un point de vue nouveau.

SUR CERTAINES SOLUTIONS PARTICULIÈRES
DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 251-252 (23 juillet 1883).

M. Kronecker a présenté à l'Académie de Berlin, en 1869, un Mémoire sur les fonctions de plusieurs variables; on y trouve un important théorème d'où il est aisé de déduire le résultat suivant :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n fonctions continues de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$: la variable x_i est assujettie à varier entre les limites $+a_i$ et $-a_i$. Supposons que, pour $x_i = a_i$, ξ_i soit constamment positif, et pour $x_i = -a_i$ constamment négatif; je dis qu'il existera un système de valeurs des x pour lequel tous les ξ s'annuleront.

Ce résultat peut s'appliquer au problème des trois corps et montre que ce problème admet une infinité de solutions particulières jouissant de propriétés remarquables que nous allons exposer. Nous nous restreignons, bien entendu, au cas où les masses de deux des corps sont très petites.

Le mouvement est périodique, c'est-à-dire que, lorsque le temps augmente d'une période constante, les trois corps reprennent la même position *relative*. A la fin d'une période, les distances des trois corps reprennent leur valeur initiale, ainsi que les vitesses relatives estimées soit dans la direction du rayon vecteur, soit dans la direction perpendiculaire. Le système entier a seulement tourné d'un certain angle autour du centre de gravité, supposé fixe.

Les excentricités sont très petites et de l'ordre des masses; mais les inclinaisons peuvent avoir des valeurs quelconques.

Dans la solution particulière envisagée, il reste encore, si les trois corps sont assujettis à se mouvoir dans un plan, quatre paramètres arbitraires; s'ils se meuvent dans l'espace, il en reste huit. Ainsi, dans l'un comme dans l'autre cas, il faut imposer quatre conditions aux éléments initiaux du mouvement pour que ce mouvement présente cette périodicité dont nous venons de parler.

Quand nous aurons disposé arbitrairement de huit des douze éléments initiaux, notre solution particulière ne sera pas encore complètement déterminée. Projetons, en effet, les deux rayons vecteurs sur le plan du maximum des aires. Après une période, la projection du premier rayon vecteur aura décrit un angle φ, la projection du second vecteur aura décrit un angle $\varphi + 2n\pi$; nous pouvons encore nous donner arbitrairement le nombre entier n, après quoi la solution particulière sera parfaitement définie.

SUR CERTAINES SOLUTIONS PARTICULIÈRES

DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Bulletin astronomique, t. I, p. 65-74 (février 1884).

But de ce travail.

La solution générale du problème des trois corps est encore à trouver, et, bien qu'on ait, dans ces derniers temps, donné des développements purement trigonométriques des distances mutuelles, ces séries, qui peuvent rendre des services dans la pratique, ne sont pas théoriquement satisfaisantes, parce que la convergence n'en est rien moins que démontrée. Il y a cependant certaines solutions particulières pour lesquelles ces difficultés relatives à la convergence n'existent pas : ce sont celles où les distances mutuelles sont des fonctions périodiques du temps et que l'on pourrait appeler *solutions périodiques*.

Je considère en effet trois masses, M, m et m', et je suppose que les rapports $\frac{m}{M}$ et $\frac{m'}{M}$ soient très petits. Je suppose de plus que les deux petites masses m et m' soient rapportées à la grande masse M, de sorte que, quand je parlerai de la position et de la vitesse des petites masses, j'entendrai leur position et leurs vitesses relatives par rapport à M.

Je dirai que les trois masses sont en conjonction symétrique si leurs vitesses sont perpendiculaires à leur plan. Dans le cas particulier où les inclinaisons sont nulles et où les trois masses restent constamment dans un même plan, je dirai qu'elles sont en conjonction symétrique si elles sont en ligne droite et de façon que leurs vitesses soient perpendiculaires à la droite qui les joint.

Supposons maintenant qu'à l'époque t_0 il y ait conjonction symétrique; les distances mutuelles des trois masses seront alors les mêmes aux temps t_0+h et t_0-h. Supposons qu'à l'époque t_1 il y ait encore conjonction symétrique; les distances mutuelles reprendront les mêmes valeurs aux temps t_1+h et t_1-h. Ces distances mutuelles seront donc des fonctions périodiques du temps avec la période $2(t_1-t_0)$. Après une période, le système se retrouve dans la même situation relative; il a seulement tourné d'un certain angle dans l'espace. Je choisirai l'origine et l'unité du temps de telle façon que

$$t_0=0, \qquad t_1=\pi,$$

et que la période soit 2π. Je prendrai pour plan des xy un plan perpendiculaire à la fois au plan des trois corps aux deux époques zéro et π : ce sera évidemment le plan du maximum des aires. Je prendrai l'axe des x dans le plan des trois masses à l'époque zéro. Il en résulte qu'à l'époque zéro les longitudes de m et m' sont zéro, celles des périhélies zéro et celle des nœuds $\frac{\pi}{2}$. Dans le cas des inclinaisons nulles, je prendrai pour plan des xy le plan commun des orbites et pour axe des x la droite qui joint les trois masses à l'époque zéro.

Existe-t-il de pareilles solutions, au moins pour le cas dans lequel je me renfermerai et où deux des masses sont supposées très petites ? Je me propose de faire voir qu'il y en a de trois sortes :

Première sorte : inclinaisons nulles, excentricités très petites;
Deuxième sorte : inclinaisons nulles, excentricités finies;
Troisième sorte : inclinaisons finies, excentricités très petites.

Je ferai voir ensuite quel parti on peut en tirer.

Formule de M. Kronecker.

M. Kronecker a donné, dans les *Monatsberichte* (1869), une formule qui donne le nombre des solutions de n équations à n inconnues qui satisfont à des inégalités données. Nous ferons l'application suivante de cette formule :

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *n fonctions continues des n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Supposons que* X_i *soit toujours positif pour* $x_i=a_i$ *et toujours négatif pour* $x_i=-a_i$. *Il existera au moins un système de valeurs des x qui satisfera aux inégalités*

$$(1) \qquad -a_1<x_1<a_1, \qquad -a_2<x_2<a_2, \qquad \ldots, \qquad -a_n<x_n<a_n$$

et aux équations

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0. \tag{2}$$

Les équations (2) auront donc toujours une solution.

Pour faire comprendre comment on peut démontrer ce théorème, supposons que nous n'ayons que deux variables x_1 et x_2, que nous regarderons comme les coordonnées d'un point dans un plan. Alors les inégalités (1) signifient que ce point est à l'intérieur d'un certain carré ABCD dont les côtés ont pour équations

$$AB : \ x_1 = a_1, \qquad CD : \ x_1 = -a_1, \qquad BC : \ x_2 = a_2, \qquad DA : \ x_2 = -a_2.$$

La courbe $X_2 = 0$ part alors d'un point du côté AB pour aboutir à un point de CD; de même la courbe $X_1 = 0$, partant d'un point de BC pour aboutir à un point de DA, doit forcément rencontrer la première à l'intérieur du carré.

Méthode générale.

On voit immédiatement l'avantage que peut présenter l'application de ce théorème. Pour démontrer rigoureusement que certaines équations peuvent être satisfaites, il suffit d'étudier le signe de certaines fonctions. Or, si les masses sont très petites, les signes de ces fonctions seront les mêmes que quand ces masses sont nulles, c'est-à-dire dans le cas du mouvement keplérien.

J'ai supposé qu'au temps zéro les longitudes des masses et des périhélies sont nulles et celles des nœuds $\frac{\pi}{2}$. Il reste comme éléments initiaux arbitraires les moyens mouvements n et n', les excentricités e et e', les inclinaisons i et i'.

Soient maintenant X, Y, Z, ... un certain nombre de fonctions des coordonnées et des vitesses de m et de m' au temps π. Nous prendrons trois fonctions seulement pour fixer les idées; ce seront des fonctions des éléments initiaux et des masses. Si les masses sont assez petites, on démontre aisément que ces fonctions peuvent être développées en séries suivant les puissances croissantes des masses, de sorte qu'on a, par exemple,

$$X = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots,$$

X_n désignant l'ensemble des termes d'ordre n par rapport aux masses.

Considérons trois des éléments initiaux comme constants et faisons varier

les trois autres. Je suppose que l'on puisse choisir ces derniers éléments de telle façon que

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0,$$

et que le déterminant fonctionnel de X_0, Y_0, Z_0 par rapport aux trois éléments variables ne soit pas nul, je dis qu'on pourra choisir ces mêmes éléments de façon que

$$X = Y = Z = 0.$$

En effet, si le déterminant fonctionnel en question n'est pas nul, on pourra, en donnant aux éléments initiaux des valeurs voisines de celles qui annulent X_0, Y_0 et Z_0, obtenir pour ces trois fonctions tous les systèmes de valeurs satisfaisant aux inégalités

$$X_0^2 < a_1^2, \qquad Y_0^2 < a_2^2, \qquad Z_0^2 < a_3^2,$$

si a_1, a_2 et a_3 sont assez petits. On pourra alors considérer X, Y et Z comme des fonctions de X_0, Y_0 et Z_0, et il est clair que, si les masses sont assez petites par rapport à a_1, a_2, a_3, on aura

$$X > 0 \quad \text{pour} \quad X_0 = a_1; \qquad X < 0 \quad \text{pour} \quad X_0 = -a_1,$$

et de même pour Y et pour Z. C'est dire qu'on pourra appliquer le théorème de M. Kronecker et que les éléments initiaux pourront être choisis de telle façon que

$$X = Y = Z = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème ne s'appliquerait pas si X_0 était identiquement nul, parce qu'alors le déterminant fonctionnel serait nul; mais dans ce cas il suffirait de remplacer X_0 par X_1, qui donne alors son signe à X quand les masses sont assez petites. Nous en verrons plus loin des exemples.

Solutions de la première sorte.

Supposons i et i' nuls, e et e' très petits. Soient maintenant X la différence de longitude de m et de m' au temps π; Y et Z les dérivées, par rapport au temps, des rayons vecteurs de m et de m' à cette même époque π.

Si l'on a

$$e = e' = 0, \qquad n - n' = 1,$$

on a

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0,$$

et il est aisé de voir que le déterminant fonctionnel n'est pas nul. On a donc, pour des valeurs très petites de e et de e',

$$X = Y = Z = 0.$$

Ces équations signifient qu'au temps π les trois masses se retrouvent en conjonction symétrique : il y a donc des solutions périodiques de la première sorte; il y en a même une quadruple infinité. En effet, renonçons momentanément au choix d'unités et d'axes que nous avons fait plus haut et supposons des unités et des axes quelconques. Nous pouvons alors choisir arbitrairement les époques t_0 et t_1 de la première et de la seconde conjonction symétrique, et les longitudes α_0 et α_1 de m à ces deux époques. On doit cependant exclure tout choix tel que $\alpha_1 - \alpha_0$ soit multiple de π, parce qu'alors notre déterminant fonctionnel ne serait plus nul; il ne faut même pas que la différence entre $\alpha_1 - \alpha_0$ et un multiple de π soit de même ordre que les masses.

Il en résulte que les distances mutuelles des trois corps peuvent se développer en séries ordonnées suivant les cosinus des multiples de t. Quant aux coefficients de $\cos pt$, ils peuvent eux-mêmes être développés en séries ordonnées suivant les puissances croissantes des masses, et convergentes pourvu que ces masses soient assez petites.

La difficulté était de démontrer rigoureusement l'existence de la solution périodique et d'écarter ainsi à l'avance tous les embarras que pourraient nous causer les questions de convergence. On peut ensuite calculer les coefficients par des approximations successives. Donnons ici la première approximation, en négligeant les carrés des masses. Si les masses étaient nulles, on aurait la solution du problème en donnant à a et a', n et n' des valeurs convenables, et avec des excentricités nulles et des longitudes zéro au temps zéro, on aur $n - n' = 1$.

Posons

$$R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'\cos t}} - \frac{a}{a'^2}\cos t = \Sigma A_j \cos jt \qquad (j = -\infty \ldots -1, 0, 1, \ldots, \infty)$$

et

$$B_j = 2nA_j + a\frac{dA_j}{da}, \qquad C_j = 3nA_j + 2a\frac{dA_i}{da}.$$

On trouvera, pour les coordonnées polaires de la première petite masse,

$$r = a + \frac{a^2 n}{\mu}\Sigma B_j\left(\frac{1}{n+j} + \frac{1}{n-j}\right)\frac{\cos jt}{2},$$

$$v = nt + \frac{a}{\mu}\sum jB_j\left(\frac{1}{n+j} + \frac{1}{n-j}\right)\sin jt + \frac{an}{\mu}\sum\frac{C_j}{j}\sin jt,$$

μ étant un coefficient dépendant des masses, et de même pour la seconde petite masse.

Ces formules ne s'appliquent pas au cas où n est un nombre entier.

Solutions de la deuxième sorte.

Supposons encore les inclinaisons nulles, mais ne supposons plus les excentricités très petites. Soient l, l', ϖ et ϖ' les longitudes des deux masses m et m' et celles de leurs périhélies au temps π. Soient

$$X = \varpi - \varpi', \qquad Y = l - \varpi, \qquad Z = l' - \varpi'.$$

Ici X_0 est identiquement nul; pour de petites valeurs des masses, c'est donc X_1 qui donne son signe à X. Il faut donc démontrer que l'on peut choisir les éléments initiaux de telle façon que

$$X_1 = Y_0 = Z_0 = 0.$$

On peut évidemment choisir les moyens mouvements n et n' de telle façon que Y_0 et Z_0 soient nuls. Il s'agit maintenant de faire voir que, n et n' étant désormais regardés comme déterminés, on peut choisir e et e' de telle façon que

$$X_1 = 0, \tag{3}$$

Or cette équation peut s'écrire

$$m'\delta_1\varpi = m\,\delta_1\varpi',$$

en posant

$$m'\delta_1\varpi = -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\int_0^\pi \frac{dR}{de}\,dt, \qquad m\,\delta_1\varpi' = -\frac{a'n'\sqrt{1-e^2}}{e'}\int_0^\pi \frac{dR'}{de'}\,dt;$$

de sorte qu'on peut écrire

$$m'e\,\delta_1\varpi = A + Be + Ce' + \ldots, \qquad me'\delta_1\varpi' = A' + B'e + C'e' + \ldots,$$

les seconds membres étant des séries ordonnées suivant les puissances de e et de e' et convergentes pour les petites valeurs de ces quantités. Nous supposerons d'abord que ces excentricités sont assez petites pour qu'il y ait convergence. Cela nous suffira pour montrer la possibilité de satisfaire à l'équation (3). Si n n'est pas multiple de $n - n'$, A et A' sont nuls. Si n n'est pas multiple de $\frac{n-n'}{2}$, B, C, B', C' se réduisent aux termes dits *séculaires*. Nous supposerons que ces conditions sont remplies, puisque notre but est seulement d'établir la possibilité de satisfaire à l'équation (3).

L'équation (3) peut alors s'écrire

$$0 = \boxed{1,0}\, e^2 + ee'[(0,1)-(1,0)] - e'^2 \boxed{0,1} + \varphi.$$

φ se composant de termes d'ordre plus grand que deux par rapport aux excentricités. Si l'on considère e et e' comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation (3) représente une courbe présentant un point double à l'origine. Nous nous proposons de démontrer que cette courbe est réelle, et, pour cela, il nous suffit de faire voir que les tangentes au point double sont réelles; or ces tangentes sont données par l'équation

$$(4) \qquad \boxed{1,0}\, e^2 + ee'[(0,1)-(1,0)] - e'^2 \boxed{0,1} = 0.$$

Mais on a

$$\boxed{1,0} = \boxed{0,1}\, \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.$$

Donc l'équation (4) a ses coefficients extrêmes de signe contraire; donc elle a des racines réelles. Donc par l'origine passent deux branches réelles de courbe que l'on pourra suivre jusqu'à une distance *finie* de l'origine. Donc l'équation (3) peut être satisfaite par des valeurs *finies* des excentricités. En répétant le raisonnement fait plus haut, on conclurait de là qu'on peut donner aux éléments initiaux des valeurs qui annulent à la fois X, Y et Z, ce qui démontre l'existence des solutions périodiques de la deuxième sorte.

Le raisonnement serait en défaut si les excentricités étaient infiniment petites de l'ordre des masses.

Solutions de la troisième sorte.

Supposons les inclinaisons finies et les excentricités très petites.

Soient l, l', θ et θ' les longitudes des deux masses et de leurs nœuds au temps π. Posons

$$X = \theta - \theta', \qquad Y = l - \theta + \frac{\pi}{2}, \qquad Z = l' - \theta' + \frac{\pi}{2}.$$

Soient maintenant T et U les dérivées des rayons vecteurs de m et de m' par rapport au temps, à l'époque π. Ici encore X_0 est identiquement nul, et c'est X_1 qui donne son signe à X. Si l'on annule e et e' et si l'on choisit convenablement n et n', on aura

$$Y_0 = Z_0 = T_0 = U_0 = 0.$$

Il reste à montrer que e, e', n et n' étant supposés désormais déterminés, on peut choisir i et i' de façon à satisfaire à l'équation $X_1 = 0$. Cela est toujours possible, car cette équation signifie simplement que le plan des xy est le plan invariable. On n'a qu'à répéter le raisonnement déjà fait plus haut pour voir que l'on peut choisir les éléments initiaux de telle sorte que

$$X = Y = Z = T = U = 0,$$

ce qui démontre l'existence d'une infinité de solutions périodiques de la troisième sorte.

Solutions de la quatrième sorte.

Il est passible qu'il existe des solutions de la quatrième sorte, où les excentricités et les inclinaisons sont finies à la fois ; mais je n'ai pu encore démontrer leur existence que pour certaines valeurs du rapport $\frac{m}{m'}$.

Application des solutions périodiques. — Il semble au premier abord que ces solutions périodiques ne puissent être d'aucune utilité pratique, puisqu'elles correspondent à des valeurs *particulières* des éléments initiaux, valeurs dont la probabilité est nulle. Mais, si les éléments initiaux sont très voisins de ceux qui correspondent à une solution périodique, on pourra rapporter les positions véritables des trois masses aux positions qu'elles occuperaient dans cette solution périodique et se servir, par conséquent, de cette solution comme d'une *orbite intermédiaire*. Appelons r, v, r', v' les coordonnées polaires de m et de m' sur cet orbite intermédiaire, $r + \rho$, $v + \omega$, z, $r' + \rho'$, $v' + \omega'$, z' les coordonnées semi-polaires de ces mêmes masses sur leur orbite réelle; les quantités ρ, ω, z, ... sont très petites au moins pendant un certain temps. Nous pourrons alors écrire les équations du mouvement sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = R, \tag{5}$$

R étant une série ordonnée suivant les puissances de ρ, ω, z, ρ', ω', z' et de leurs dérivées du premier ordre et dont les coefficients dépendent de r, r' et $v - v'$, et sont par conséquent des fonctions périodiques du temps avec la période 2π. Il faut y ajouter cinq équations de même forme qui donnent les valeurs de $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^2\rho'}{dt^2}$, $\frac{d^2\omega'}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$. On peut appliquer à ces équations les

méthodes de M. Lindstedt et d'autres encore qui conduisent à des résultats sur lesquels je reviendrai plus tard.

Aujourd'hui je supposerai que ρ, ω, ..., qui sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons, soient assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés; les équations se réduiront à des équations linéaires (5) admettant pour coefficients des fonctions périodiques du temps avec la période 2π.

L'intégrale générale de l'équation (5) est de la forme

$$\rho = F + t\Phi,$$

où F et Φ sont des séries trigonométriques. Le dernier terme est séculaire : mais *on peut toujours choisir l'orbite intermédiaire de façon que ce terme soit nul.* Les différences ρ, ω, z, ... sont alors exprimables par des séries trigonométriques.

Voici quelle me semble pouvoir être l'utilité de l'étude des équations (5). Dans le calcul des variations séculaires des excentricités, on est conduit à des équations qui sont linéaires comme les équations (5), mais où les coefficients sont des séries trigonométriques de plusieurs arguments (deux, dans le cas de trois corps). On supprime ensuite tous les termes périodiques pour ne conserver que les termes constants. Il n'est pas sûr qu'on ne commette pas ainsi une erreur considérable; car, si l'on faisait l'intégration en tenant compte des termes périodiques, les approximations successives introduiraient des termes à petit argument qui pourraient exercer une influence appréciable sur la valeur de la période des excentricités. Au contraire, en étudiant les équations (5), on ne rencontrera pas cette difficulté, puisque les coefficients ne dépendent que d'un seul argument. L'étude de cette équation permettra donc de se rendre compte de la grandeur de l'erreur commise par la méthode ordinaire.

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE [1]

Acta Mathematica, t. 13, p. 1-270 (28 avril 1890).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

INTRODUCTION 263

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS.

CHAPITRE I. — *Propriétés générales des équations différentielles.*

1. Notations et définitions 265
2. Calcul des limites 270
3. Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles 280
4. Intégration des équations linéaires à coefficients périodiques 291

CHAPITRE II. — *Théorie des invariants intégraux.*

5. Propriétés diverses des équations de la Dynamique 295
6. Définition des invariants intégraux 300
7. Transformation des invariants intégraux 308
8. Usage des invariants intégraux 313

CHAPITRE III. — *Théorie des solutions périodiques.*

9. Existence des solutions périodiques 331
10. Exposants caractéristiques 338

[1] Mémoire couronné du Prix de S. M. le roi Oscar II de Suède le 21 janvier 1889.

Pages.
11. Solutions périodiques des équations de la Dynamique..... 343
12. Calcul des exposants caractéristiques..... 359
13. Solutions asymptotiques..... 370
14. Solutions asymptotiques des équations de la Dynamique..... 379

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE ET PROBLÈME DES n CORPS.

CHAPITRE I. — *Etude des cas où il n'y a que deux degrés de liberté.*
15. Représentations géométriques diverses..... 395

CHAPITRE II. — *Études des surfaces asymptotiques.*
16. Exposé du problème..... 407
17. Première approximation..... 410
18. Deuxième approximation..... 421
19. Troisième approximation..... 437

CHAPITRE III. — *Résultats divers.*
20. Solutions périodiques du deuxième genre..... 445
21. Divergence des séries de M. Lindstetd..... 462
22. Non-existence des intégrales uniformes..... 470

CHAPITRE IV. — *Tentatives de généralisation.*
23. Problème des n corps..... 476

Introduction.

Le travail qui va suivre et qui a pour objet l'étude du problème des trois corps est un remaniement du Mémoire que j'avais présenté au Concours pour le prix institué par Sa Majesté le Roi de Suède. Ce remaniement était devenu nécessaire pour plusieurs raisons. Pressé par le temps, j'avais dû énoncer quelques résultats sans démonstration; le lecteur n'aurait pu, à l'aide des indications que je donnais, reconstituer les démonstrations qu'avec beaucoup de peine. J'avais songé d'abord à publier le texte primitif en l'accompagnant de notes explicatives; mais j'avais été amené à multiplier ces notes de telle sorte que la lecture du Mémoire serait devenue fastidieuse et pénible.

J'ai donc préféré fondre ces notes dans le corps de l'Ouvrage, ce qui a l'avantage d'éviter quelques redites et de faire ressortir l'ordre logique des idées.

Je dois beaucoup de reconnaissance à M. Phragmén qui non seulement a revu les épreuves avec beaucoup de soin, mais qui, ayant lu le Mémoire avec

attention et en ayant pénétré le sens avec une grande finesse, m'a signalé les points où des explications complémentaires lui semblaient nécessaires pour faciliter l'entière intelligence de ma pensée. Je lui dois la forme élégante que je donne au calcul de S_i^m et de T_i^m à la fin du paragraphe 12. C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.

Dans quelques-unes des additions que j'ai faites au Mémoire primitif, je me borne à rappeler certains résultats déjà connus; comme ces résultats sont dispersés dans un grand nombre de recueils et que j'en fais un fréquent usage, j'ai cru rendre service au lecteur en lui épargnant de fastidieuses recherches; d'ailleurs je suis souvent conduit à appliquer ces théorèmes sous une forme différente de celle que leur auteur leur avait d'abord donnée et il était indispensable de les exposer sous cette nouvelle forme. Ces théorèmes acquis, dont quelques-uns sont même classiques, sont développés, à côté de quelques propositions nouvelles, dans le Chapitre I (Ire Partie).

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

Comme on le voit, ces résultats ne nous apprennent que peu de chose sur le cas général du problème; mais ce qui peut leur donner quelque prix, c'est qu'ils sont établis avec rigueur, tandis que le problème des trois corps ne paraissait jusqu'ici abordable que par des méthodes d'approximation successive où l'on faisait bon marché de cette rigueur absolue qui est exigée dans les autres parties des Mathématiques.

Mais j'attirerai surtout l'attention du lecteur sur les résultats négatifs qui sont développés à la fin du Mémoire. J'établis par exemple que le problème des trois corps ne comporte, en dehors des intégrales connues, aucune intégrale analytique et uniforme. Bien d'autres circonstances nous font prévoir que la solution complète, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus

compliqués. Plus on réfléchira sur les propositions que je démontre plus loin, mieux on comprendra que ce problème présente des difficultés inouies, que l'insuccès des efforts antérieurs avait bien fait pressentir, mais dont je crois avoir mieux encore fait ressortir la nature et la grandeur.

J'ai fait voir également que la plupart des séries employées en Mécanique céleste et en particulier celles de M. Lindstedt qui sont les plus simples, ne sont pas convergentes. Je serais désolé d'avoir par là jeté quelque discrédit sur les travaux de M. Lindstedt ou sur les recherches plus profondes de M. Gyldén. Rien ne serait plus éloigné de ma pensée. Les méthodes qu'ils proposent conservent toute leur valeur pratique. On sait en effet le parti qu'on peut tirer dans un calcul numérique de l'emploi des séries divergentes et la série fameuse de Stirling en est un exemple frappant. C'est grâce à une circonstance analogue que les développements usités en Mécanique céleste ont rendu déjà de si grands services et sont appelés à en rendre de plus grands encore.

L'une des séries dont je ferai usage plus loin et dont je démontrerai d'ailleurs la divergence, offre une grande analogie avec un développement proposé par M. Bohlin à l'Académie de Stockholm le 9 mai 1888. Comme son Mémoire n'a été imprimé que quelques mois plus tard, je n'en avais pas connaissance à l'époque de la fermeture du concours, c'est-à-dire le 1er juin 1888. Je n'ai donc pas cité le nom de M. Bohlin, je m'empresse de lui rendre ici la justice qui lui est due. (Cf. *Supplément aux Comptes rendus de l'Académie de Stockholm*, t. 14 et *Astronomische Nachrichten*, n° 2883.)

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1. — Notations et définitions.

Considérons un système d'équations différentielles :

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où t représente la variable indépendante que nous appellerons le temps, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les fonctions inconnues, où enfin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposons en général que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont analytiques et uniformes pour toutes les valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on savait intégrer les équations (1), on pourrait mettre le résultat de l'intégration sous deux formes différentes; on pourrait écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{array}\right.$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignant les constantes d'intégration.

On pourrait écrire encore, en résolvant par rapport à ces constantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} C_1 = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ C_2 = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_n = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}\right.$$

Pour éviter toute confusion, nous dirons que les équations (2) représentent la *solution générale* des équations (1) si les constantes C y restent arbitraires et qu'elles représentent une *solution particulière* si l'on y donne aux C des valeurs numériques. Nous dirons d'autre part que dans les équations (3), F_1, $F_2, \ldots, F_n$ sont n *intégrales particulières* des équations (1). Le sens des mots *solution* et *intégrale* se trouve ainsi entièrement fixé.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière des équations (1) qui s'écrira

$$(4)\qquad x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

On peut se proposer d'étudier les solutions particulières de (1) qui diffèrent peu de la solution (4). Pour cela posons

$$x_1 = \varphi_1 + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n + \xi_n,$$

et prenons pour nouvelles fonctions inconnues $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si la solution que l'on veut étudier diffère peu de la solution (4), les ξ sont très petits et nous en pouvons négliger les carrés. Les équations (1) deviennent alors, en négligeant les puissances supérieures des ξ :

$$(5)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ doivent être remplacées

par $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, de sorte que ces dérivées peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps.

Les équations (5) s'appelleront les *équations aux variations* des équations (1). On voit que les équations aux variations sont linéaires.

Les équations (1) sont dites *canoniques* lorsque les variables x sont en nombre pair $n = 2p$, se répartissant en deux séries $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p$, et que les équations (1) peuvent s'écrire

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Elles ont alors la forme des équations de la Dynamique et nous dirons, à l'exemple des Anglais, que le système d'équations (6) comporte *p degrés de liberté*.

On sait que ce système (6) admet une intégrale dite des forces vives : $F = \text{const.}$ et que si l'on en connaît $p - 1$ autres, on peut considérer les équations canoniques comme complètement intégrées.

Considérons en particulier le cas de $n = 3$; nous pourrons alors regarder x_1, x_2 et x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. Les équations

$$(6) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

définissent alors la vitesse de ce point P en fonction de ses coordonnées. Considérons une solution particulière des équations (1)

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad x_3 = \varphi_3(t).$$

Lorsque nous ferons varier le temps t, le point P décrira une certaine courbe dans l'espace; nous l'appellerons une *trajectoire*. A chaque solution particulière des équations (1) correspond donc une trajectoire et réciproquement.

Si les fonctions X_1, X_2 et X_3 sont uniformes, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il n'y a d'exception que si l'une de ces trois fonctions devient infinie ou si elles s'annulent toutes les trois. Les points où ces cas d'exception se présenteraient s'appelleraient *points singuliers*.

Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire*.

Comme deux trajectoires ne peuvent se couper sinon en un point singulier, une surface-trajectoire qui ne passe en aucun point singulier ne peut être coupée par aucune trajectoire.

Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité* si les trois quantités x_1, x_2, x_3 restent inférieures à certaines limites quand le temps t varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si la trajectoire du point P reste tout entière dans une région limitée de l'espace.

Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée S; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point P est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera tout entière à l'intérieur de S. Il y aura donc stabilité.

Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées.

On peut varier ce mode de représentation géométrique; supposons par exemple que l'on pose

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3), \qquad x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3), \qquad x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$

les ψ étant des fonctions de z qui sont uniformes pour toutes les valeurs réelles des z. Nous pourrons considérer non plus x_1, x_2, x_3, mais z_1, z_2, z_3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Quand on connaîtra la position de ce point, on connaîtra z_1, z_2, z_3 et par conséquent x_1, x_2, x_3. Tout ce que nous avons dit plus haut reste exact.

Il suffit même que les trois fonctions ψ restent uniformes dans un certain domaine, pourvu qu'on ne sorte pas de ce domaine.

Si $n > 3$, ce mode de représentation ne peut plus être employé en général, à moins qu'on ne se résigne à envisager l'espace à plus de trois dimensions. Il est pourtant un cas où la difficulté peut être tournée.

Supposons par exemple que $n = 4$ et qu'on connaisse une des intégrales des équations (1). Soit

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C \tag{7}$$

cette intégrale. Nous regarderons la constante d'intégration C comme une donnée de la question. Nous pourrons alors tirer de l'équation (7) une des quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction des trois autres, ou bien encore trouver trois variables auxiliaires z_1, z_2, z_3 telles qu'en faisant

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3), \qquad x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3), \qquad x_4 = \psi_4(z_1, z_2, z_3),$$

on satisfasse à l'équation (7) quelles que soient les valeurs de z_1, z_2, z_3. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir ces variables auxiliaires z de façon que les quatre fonctions ψ soient uniformes, sinon pour toutes les valeurs réelles des z, au moins dans un domaine d'où on n'aura pas à sortir.

On pourra alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées dans l'espace seront z_1, z_2 et z_3.

Supposons par exemple que l'on ait des équations canoniques avec deux degrés de liberté :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Nous aurons quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2, mais ces variables seront liées par l'équation des forces vives : $F = C$, de sorte que si nous regardons la constante des forces vives C comme connue, il n'y aura plus que trois variables indépendantes et que la représentation géométrique sera possible.

Nous distinguerons parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les variables *linéaires* et les variables *angulaires*. Il pourra arriver que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient toutes périodiques par rapport à l'une des variables x_i et ne changent pas quand cette variable augmente de 2π. La variable x_i et celles qui jouissent de la même propriété seront alors *angulaires;* les autres seront *linéaires*.

Je dirai que la situation du système n'a pas changé si toutes les variables angulaires ont augmenté d'un multiple de 2π, et si toutes les variables linéaires ont repris leurs valeurs primitives.

Nous adopterons alors un mode de représentation tel que le point représentatif P revienne au même point de l'espace quand une ou plusieurs des variables angulaires aura augmenté de 2π. Nous en verrons des exemples dans la suite.

Parmi les solutions particulières des équations (1), nous distinguerons les *solutions périodiques*. Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution particulière des équations (1). Supposons qu'il existe une quantité h telle que

$$\varphi_i(t+h) = \varphi_i(t)$$

quand x_i est une variable linéaire et

$$\varphi_i(t+h) = \varphi_i(t) + 2k\pi \qquad (k \text{ étant entier})$$

quand x_i est une variable angulaire. Nous dirons alors que la solution considérée est *périodique* et que h est la période.

Si l'on adopte un mode de représentation géométrique tel que le point représentatif reste le même quand une des variables angulaires augmente de 2π, toute solution périodique sera représentée par une trajectoire fermée.

2. — Calcul des limites.

L'une des plus belles découvertes de Cauchy (*C. R. Acad. Sc.*, 14, p. 1020), quoiqu'elle ait été peut-être peu remarquée de son temps, est celle qu'il a appelée le calcul des limites et à laquelle nous conserverons ce nom, quelque mal justifié qu'il puisse être.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z).$$

Si f_1 et f_2 peuvent être développés suivant les puissances croissantes de x, y et z, ces équations admettront une solution de la forme suivante :

$$y = \varphi_1(x), \qquad z = \varphi_2(x),$$

φ_1 et φ_2 étant des séries développées suivant les puissances croissantes de x et s'annulant avec x.

Pour le démontrer, Cauchy remplace les deux fonctions f_1 et f_2 par une expression de la forme

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1-\alpha x)(1-\beta y)(1-\gamma z)},$$

en choisissant M, α, β, γ de façon que chaque terme de f' ait un plus grand coefficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de f_1 et de f_2. En remplaçant ainsi f_1 et f_2 par f', on augmente les coefficients de φ_1 et de φ_2 et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

Tel est le principe fondamental du calcul des limites dont Cauchy a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. Weierstrass qui a remplacé la fonction $f'(x, y, z)$ de Cauchy par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Écrivons les équations (1) sous la forme

$$(1') \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z), \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y, z) = 1.$$

Remplaçons-y ensuite f, f_1 et f_2 par la fonction de M. Weierstrass :

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)};$$

elles deviendront

$$(2') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)}.$$

Les équations (1') sont satisfaites formellement par des séries

$$x = \varphi(t) = t, \qquad y = \varphi_1(t), \qquad z = \varphi_2(t).$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t.

De même les équations (2') seront satisfaites par des séries

$$x = \varphi'(t), \qquad y = \varphi'_1(t), \qquad z = \varphi'_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t. [On voit facilement d'ailleurs que $\varphi'(t) = \varphi'_1(t) = \varphi'_2(t)$.]

Si M et α sont convenablement choisis, les coefficients des séries φ' sont plus grands que ceux des séries φ; or les séries φ' convergent; donc les séries φ convergent également. C. Q. F. D.

Je n'insiste pas sur ces démonstrations qui sont devenues tout à fait classiques et qui se trouvent développées dans tous les traités un peu complets d'Analyse, par exemple dans le *Cours d'Analyse* de M. Jordan (t. 3, p. 87).

Mais on peut aller plus loin.

Théorème I. — *Imaginons que les fonctions f_1 et f_2 dépendent, non seulement de x, y, et z, mais d'un certain paramètre arbitraire μ et qu'elles puissent se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z et μ. Écrivons alors les équations* (1) *sous la forme*

$$(1'') \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu) = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu), \qquad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu).$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0) = t + x_0, \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui satisfassent formellement aux équations (1''), *qui soient développées suivant les puissances croissantes de t, de μ et de trois constantes d'inté-*

gration x_0, y_0, z_0 et qui enfin se réduisent respectivement à x_0, y_0 et z_0 pour $t = 0$.

Je dis que ces séries convergent pourvu que t, μ, x_0, y_0 et z_0 soient suffisamment petits.

En effet remplaçons f, f_1 et f_2 par la fonction

$$f'(x, y, z, \mu) = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}.$$

Cette fonction f' peut être développée suivant les puissances de x, y, z et μ. On peut prendre M, α et β assez grands pour que chaque terme de f' soit plus grand que le terme correspondant de f, de f_1 et de f_2.

Nous obtiendrons ainsi les équations

$$(2'') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}.$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi'(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi'_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad z = \varphi'_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

développées suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0, z_0, satisfaisant aux équations (2″) et se réduisant respectivement à x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$.

En raisonnant comme le faisait Cauchy, on démontrerait que chaque terme des séries φ' est plus grand que le terme correspondant des séries φ. Or les séries φ' convergent, si t, μ, x_0, y_0 et z_0 sont assez petits. Donc les séries φ convergent également. C. Q. F. D.

On peut tirer de là diverses conséquences.

Théorème II. — Nous venons de voir que x, y et z peuvent être développés suivant les puissances de t, μ, x_0 y_0 et z_0 pourvu que ces cinq variables, y compris t, soient suffisamment petites.

Je dis que x, y et z pourront encore être développées suivant les puissances des quatre variables μ, x_0, y_0, et z_0 quelque grand que soit t pourvu que les quatre variables μ, x_0, y_0, et z_0 soient assez petites [1].

Il y a toutefois un cas d'exception sur lequel je reviendrai.

En effet nous trouvons d'abord trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

---

[1] *Voir* aux Notes, *Séries*.

qui définissent x, y et z pour les valeurs suffisamment petites de μ, x_0, y_0, z_0, et quand $|t| < \rho$, ρ étant le rayon de convergence de ces séries. Si donc t_1 est un point intérieur au cercle de convergence et si x_1, y_1 et z_1 sont les valeurs de x, y et z pour $t = t_1$, on voit que x_1, y_1 et z_1 sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0 et z_0, c'est-à-dire développables suivant les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Soient ensuite x_1^0, y_1^0 et z_1^0 les valeurs de x_1, y_1 et z_1 pour

$$\mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Cela posé, on aura dans le voisinage du point $t = t_1$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \varphi'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0),\\ y &= \varphi'_1(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0),\\ z &= \varphi'_2(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0).\end{aligned}\right.$$

Les séries φ', φ'_1 et φ'_2, tout à fait analogues aux séries φ, φ_1 et φ_2, sont définies comme il suit.

Elles satisfont aux équations différentielles; elles sont développées suivant les puissances de $t - t_1$, μ, $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$ et $z_1 - z_1^0$; elles se réduisent à x_1, y_1 et z_1 pour $t = t_1$.

Elles convergeront si μ, $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$, $z_1 - z_1^0$ sont assez petits et si $|t - t_1| < \rho_1$, ρ_1 étant le rayon du nouveau cercle de convergence C_1.

Si t est un point intérieur à ce nouveau cercle de convergence C_1, on voit que x, y et z seront fonctions holomorphes de μ, $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$ et $z_1 - z_1^0$. Mais $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$, $z_1 - z_1^0$ sont déjà fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0. Donc, pour tout point t intérieur au cercle C_1, les trois quantités x, y et z sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0 z_0 développables selon les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Supposons maintenant que le point t soit extérieur au cercle C_1, le théorème sera encore vrai; il est clair en effet qu'il suffit pour le démontrer pour une valeur quelconque de t, de répéter le raisonnement précédent un nombre suffisant de fois, pourvu que les rayons ρ_1, ρ_2, ... des cercles de convergence envisagés successivement restent supérieurs à une quantité donnée.

Cette convergence sera d'ailleurs uniforme pour toute valeur de t inférieure à t_0, quelque grand que soit t_0.

On ne serait arrêté que dans un cas.

Le théorème de Cauchy cesse d'être vrai si les fonctions f_1 et f_2 ne sont plus

holomorphes en x, y, z; par exemple si elles deviennent infinies, ou cessent d'être uniformes.

Si l'on ne peut pas développer les fonctions f, f_1 et f_2 suivant les puissances croissantes de μ, de $x - x_1^0$, $y - y_1^0$, $z - z_1^0$, il n'existera pas en général trois séries φ', φ'_1 et φ'_2 de la forme (3) satisfaisant aux équations différentielles.

On dit alors que le point

$$x = x_1^0, \qquad y = y_1^0, \qquad z = z_1^0$$

est un point singulier.

Si donc, en faisant varier t, on voyait le point mobile (x, y, z) passer par un point singulier, notre théorème serait en défaut. Si t variant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$, le point mobile (x, y, z) ne passe par aucun point singulier, le rayon de convergence de la série de Cauchy ne pourra s'annuler et l'on pourra lui assigner une limite inférieure, de sorte que les trois fonctions x, y, z seront développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 pour toute valeur de t inférieure à t_0. Mais si pour $t = t_0$, le point (x, y, z) se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de t supérieures à t_0.

Notre théorème comporte donc un cas d'exception. Mais ce cas ne se présentera pas dans le problème des trois corps et nous n'avons pas à nous en inquiéter. Soient en effet (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les coordonnées des trois corps, r_{23}, r_{13}, r_{12} leurs distances mutuelles, m_1, m_2 et m_3 leurs masses. Les équations du problème seront de la forme suivante :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{r_{13}^3}.$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 que si l'une des trois distances r_{23}, r_{13}, r_{12} venait à s'annuler, c'est-à-dire si deux corps venaient à se choquer. Or nous n'appliquerons jamais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

Le même résultat peut encore être établi d'une autre manière. Reprenons les équations

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu), \qquad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu).$$

Les fonctions f, f_1, f_2 pourront en général être développées suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $\mu - \mu_0$ pour les valeurs de x, y, z et μ suffisamment voisines de x_0, y_0, z_0 et μ_0. S'il existe un système de

valeurs de x_0, y_0, z_0, μ_0 pour lequel cela n'ait pas lieu, je dirai que ce système de valeurs est *un des points singuliers* de nos équations différentielles.

Cela posé, ces équations admettront une solution telle que x, y et z s'annulent avec t; et cette solution dépendra manifestement de μ. Soit

$$x = \omega_1(t, \mu), \qquad y = \omega_2(t, \mu), \qquad z = \omega_3(t, \mu)$$

cette solution. Il résulte de la définition même de cette solution que l'on a, quel que soit μ :

$$\omega_1(0, \mu) = \omega_2(0, \mu) = \omega_3(0, \mu) = 0.$$

Dans la plupart des applications, on pourra effectuer l'intégration pour $\mu = 0$, de telle sorte que les fonctions $\omega_1(t, 0)$, $\omega_2(t, 0)$, $\omega_3(t, 0)$ seront connues. Je suppose que, pour aucune des valeurs de t comprises entre zéro et t_1, le système de valeurs $\omega_1(t, 0)$, $\omega_2(t, 0)$, $\omega_3(t, 0)$, 0 ne soit un point singulier de nos équations différentielles.

Pour employer un langage incorrect, mais commode, je dirai que la solution particulière

$$x = \omega_1(t, 0), \qquad y = \omega_2(t, 0), \qquad z = \omega_3(t, 0),$$

ne passe par aucun point singulier.

Si cela n'avait pas lieu, nous nous trouverions dans le cas d'exception dont j'ai parlé plus haut.

Si au contraire, cela a lieu, ce que je supposerai, je dis que les expressions $\omega_1(t_1, \mu)$, $\omega_2(t_1, \mu)$, $\omega_3(t_1, \mu)$ sont des fonctions de μ développables suivant les puissances croissantes de cette variable.

Posons en effet

$$x = \xi + \omega_1(t, 0), \qquad y = \eta + \omega_2(t, 0), \qquad z = \zeta + \omega_3(t, 0),$$

les équations différentielles deviendront

$$(4) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, t, \mu).$$

Il résulte de l'hypothèse que nous avons faite que pour toutes les valeurs de t comprises entre zéro et t_1, les fonctions φ, φ_1 et φ_2 peuvent être développées suivant les puissances de ξ, η, ζ et μ, les coefficients du développement étant des fonctions du temps.

J'observe de plus que pour $\mu = 0$, les équations différentielles doivent être satisfaites pour

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

es qui veut dire que φ, φ_1 et φ_2 s'annulent quand μ, ξ, η, ζ s'annulent à la fois.

On pourra alors trouver deux nombres positifs M et α tels que, pour toutes les valeurs de t comprises entre zéro et t_1, chaque coefficient du développement de φ, φ_1 ou φ_2 suivant les puissances croissantes de ξ, η, ζ et μ soit plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant du développement de $\frac{M(\xi+\eta+\zeta+\mu)}{1-\alpha(\xi+\eta+\zeta+\mu)}$ ou *a fortiori* que le coefficient correspondant du développement de

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, \mu) = \frac{M(\xi+\eta+\zeta+\mu)[1+\alpha(\xi+\eta+\zeta+\mu)]}{1-\alpha(\xi+\eta+\zeta+\mu)}.$$

Comparons donc les équations (4) aux suivantes :

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \psi(\xi, \eta, \zeta, \mu).$$

La solution des équations (4), qui est telle que ξ, η et ζ s'annulent à la fois pour $t = 0$, s'écrit

$$\xi = \omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0), \qquad \eta = \omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0), \qquad \zeta = \omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0).$$

D'un autre côté les équations (5) admettent une solution

$$\xi = \eta = \zeta = \omega'(t, \mu)$$

telle que ξ, η, ζ s'annulent avec t.

En raisonnant comme l'a fait Cauchy, on verrait que si $\omega'(t, \mu)$ est développable suivant les puissances croissantes de μ, il doit en être de même de $\omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0)$, $\omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0)$, $\omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0)$, et que chaque coefficient du développement de ces trois dernières fonctions est plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant de $\omega'(t, \mu)$, au moins pour toutes les valeurs de t telles que $0 < t < t_1$. Or les équations (5) sont faciles à intégrer et l'on vérifie aisément que $\omega'(t, \mu)$ peut se développer suivant les puissances de μ. Donc ξ, η et ζ sont également développables suivant les puissances de μ pourvu que $0 < t < t_1$. C. Q. F. D.

Théorème III. — Cela posé, *soit*

$$x = \omega_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \omega_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0,) \qquad z = \omega_3(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

celle des solutions de nos équations différentielles, qui est telle que

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0$$

pour $t = 0$.

Considérons les fonctions

$$\omega_1(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad \omega_2(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad \omega_3(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0).$$

Je dis qu'elles sont développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.

Posons en effet

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0, \qquad z = z' + z_0, \qquad t = t'\frac{t_1+\tau}{t_1}.$$

Nos équations deviendront

$$\frac{dx'}{dt'} = \left(1+\frac{\tau}{t_1}\right) f(x'+x_0, y'+y_0, z'+z_0, \mu),$$
$$\frac{dy'}{dt'} = \left(1+\frac{\tau}{t_1}\right) f_1(x'+x_0, y'+y_0, z'+z_0, \mu),$$
$$\frac{dz'}{dt} = \left(1+\frac{\tau}{t_1}\right) f_2(x'+x_0, y'+y_0, z'+z_0, \mu).$$

Ces équations contiennent cinq paramètres arbitraires, à savoir μ, x_0, y_0, z_0, τ. Considérons donc la solution de ces équations qui est telle que x', y', z' s'annulent avec t'; soit

$$x' = \omega'_1(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau), \qquad y' = \omega'_2(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau), \qquad z' = \omega'_3(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$

Il résulte de ce que nous venons de voir que si l'on fait $t' = t_1$ les expressions

$$\omega'_1(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau), \qquad \omega'_2(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau), \qquad \omega'_3(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau)$$

sont développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ. Mais il est manifeste que l'on a

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega'_1(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) = \omega_1(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ \omega'_2(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) = \omega_2(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ \omega'_3(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) = \omega_3(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Donc les seconds membres des équations (6) sont également développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ. C. Q. F. D.

Théorème IV. — Cauchy a tiré du calcul des limites un autre théorème d'une extrême importance.

Voici quel est ce théorème :

Si l'on a $n+p$ quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p$ entre lesquelles ont lieu n relations

$$(7) \qquad \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0; \end{cases}$$

si les f sont développables suivant les puissances des x et des y et s'annulent avec ces $n+p$ variables;

si enfin le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y n'est pas nul quand les x et les y s'annulent à la fois;

on pourra tirer des équations (7) les n inconnues y sous la forme de séries développées suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Considérons en effet x_1 comme la seule variable indépendante, $x_2, x_3, \ldots, x_p$ comme des paramètres arbitraires, nous pourrons remplacer les équations (7) par les n équations différentielles :

$$(8) \qquad \frac{df_i}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_i}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \ldots + \frac{df_i}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_1} + \frac{df_i}{dx_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous sommes ainsi ramené au cas dont nous venons de nous occuper.

En particulier si $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction développable suivant les puissances de $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$; si quand les x et y s'annulent à la fois, on a

$$f = 0, \qquad \frac{df}{dy} \gtrless 0;$$

si enfin y est défini par l'égalité $f = 0$, y sera développable suivant les puissances de x.

Il nous resterait à examiner ce qui se passe quand le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y est nul. Cette question a fait l'objet de recherches nombreuses sur lesquelles je ne puis insister ici, mais au premier rang desquelles il convient de citer les travaux de M. Puiseux sur les racines des équations algébriques. J'ai eu moi-même l'occasion de m'occuper de recherches analogues dans la première partie de ma Thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879) [1]. Je me bornerai donc à énoncer les théorèmes suivants, en me bornant à renvoyer pour les démonstrations, soit aux traités classiques, soit à ma thèse.

Théorème V. — *Soit y une fonction de x définie par l'équation*

$$(9) \qquad f(y, x) = 0,$$

où f est développable suivant les puissances de x et de y.

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, t. I, p. II.

Je suppose que pour $x = y = 0$, f *s'annule ainsi que* $\frac{df}{dy}, \frac{d^2 f}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} f}{dy^{m-1}}$, *mais que* $\frac{d^m f}{dy^m}$ *ne s'annule pas.*

Il existera m *séries de la forme suivante :*

$$y = a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \ldots \tag{10}$$

(où n est un entier positif et où $a_1, a_2 \ldots$ sont des coefficients constants) qui satisferont à l'équation (9).

Corollaire I. — *Si la série* (10) *satisfait à l'équation* (9) *il en est de même de la série*

$$y = a_1 \alpha x^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 \alpha^3 x^{\frac{3}{n}} + \ldots,$$

où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Corollaire II. — *Le nombre des séries de la forme* (10) *développées suivant les puissances de* $x^{\frac{1}{n}}$ (sans pouvoir être développées suivant les puissances de $x^{\frac{1}{p}}$, $p < n$) *est divisible par* n.

Corollaire III. — *Si* $k_1 n_1$ *est le nombre des séries* (10) *développables suivant les puissances de* $x^{\frac{1}{n_1}}$, *si* $k_2 n_2$ *est le nombre des séries* (10) *développables suivant les puissances de* $x^{\frac{1}{n_2}}$, ..., *si* $k_p n_p$ *est le nombre des séries* (10) *développables suivant les puissances de* $x^{\frac{1}{n_p}}$, *on aura*

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \ldots + k_p n_p = m,$$

d'où l'on conclut que *si* m *est impair, l'un au moins des nombres* $n_1, n_2, \ldots n_p$ *est aussi impair.*

Théorème VI. — *Si l'on a les équations*

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_p, x) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_p, x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p(y_1, y_2, \ldots, y_p, x) = 0, \end{array}\right. \tag{11}$$

dont les premiers membres sont développables suivant les puissances des y *et de* x *et s'annulent avec ces variables, on pourra toujours éliminer entre ces équations* $y_2, y_3, \ldots, y_p$ *et arriver à une équation unique* $f(y_1, x) = 0$ *de même forme que l'équation* (9) *du théorème précédent.*

Il n'y aurait d'exception que si les équations (11) cessaient d'être distinctes.

Corollaire des théorèmes V et VI. — *Le théorème* IV *s'applique toutes les fois que le déterminant fonctionnel des f n'est pas nul, c'est-à-dire toutes les fois que quand les x s'annulent, les équations*

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0 \tag{7}$$

admettent

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$$

comme une solution simple.

Il résulte des théorèmes V et VI et de leurs corollaires énoncés plus haut que le théorème IV est encore vrai si cette solution est multiple, *pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.*

3. — Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles.

Cauchy avait déjà appliqué le procédé du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles. Mme Kowalevski a considérablement simplifié la démonstration de Cauchy et a donné au théorème sa forme définitive.

Voici en quoi consiste le théorème de Mme Kowalevski (*Journal de Crelle*, t. 80).

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles définissant n inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en fonction de p variables indépendantes.

Supposons que ce système s'écrive

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dz_1}{dx_1} = f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \dfrac{dz_i}{dx_2}, \dfrac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \dfrac{dz_i}{dx_p}\right), \\ \dfrac{dz_2}{dx_1} = f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \dfrac{dz_i}{dx_2}, \dfrac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \dfrac{dz_i}{dx_p}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dz_n}{dx_1} = f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \dfrac{dz_i}{dx_2}, \dfrac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \dfrac{dz_i}{dx_p}\right), \end{array}\right. \tag{1}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant développés suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et des $\dfrac{dz_i}{dx_k} - \alpha_{ik}$ (i prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$; k les valeurs $2, 3, \ldots, p$; enfin les α_{ik} sont des constantes quelconques).

Soit maintenant

$$\psi_1(x_2, x_3, \ldots, x_p), \quad \psi_2(x_2, x_3, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad \psi_n(x_2, x_3, \ldots, x_p)$$

n fonctions données *quelconques*, développées suivant les puissances croissantes de $x_2, x_3, \ldots, x_p$ et telles que

$$\frac{d\psi_i}{dx_k} = \alpha_{ik} \qquad \text{pour} \quad x_2 = x_3 = \ldots = x_p = 0.$$

Il existe n fonctions

$$z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad \ldots, \qquad z_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

développables suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, *qui satisferont aux équations* (1) *et qui se réduiront respectivement à* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *pour* $x_1 = 0$.

J'ai moi-même cherché à étendre les résultats obtenus par Mme Kowalevski (*Thèse inaugurale* [1], Paris, Gauthier-Villars, 1879) et j'ai étudié en détail les cas que la savante mathématicienne avait laissés de côté.

Je me suis attaché en particulier à l'équation

$$(2) \qquad X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont développés suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; je suppose de plus que dans le développement de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, il n'y ait pas de terme tout connu et que les termes du premier degré se réduisent respectivement à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n$, de telle sorte que

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

Y_i désignant une suite de termes du deuxième degré au moins par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

J'ai démontré qu'à certaines conditions cette équation admet une intégrale holomorphe développable suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pour que cette intégrale existe, il suffit :

1° que le polygone convexe qui contient les n points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne contienne pas l'origine;

2° que l'on n'ait aucune relation de la forme

$$m_2 \lambda_2 + \ldots + m_n \lambda_n = \lambda_1,$$

où les m sont des entiers positifs dont la somme est plus grande que 1 [2].

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, t. I, p. 11.

[2] Dans ma thèse, je n'énonce pas cette restriction et je ne suppose pas que la somme des m soit plus grande que 1. Il sembterait donc que le théorème est en défaut quand on a par

Je vais chercher à généraliser le résultat obtenu dans ma thèse.

Au lieu de l'équation (2) envisageons l'équation suivante :

$$(3) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z.$$

Nous avons encore

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

Y_i désignant une fonction développée suivant les puissances $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ne comprenant que des termes du deuxième degré au moins par rapport à ces n variables. Mais Y_i ne dépendant pas seulement des x, il dépend aussi de t, de sorte que les coefficients du développement de Y_i suivant les puissances des x sont des fonctions de t. Nous supposerons que ce sont des fonctions périodiques de t de période 2π développées suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Je me propose de chercher dans quel cas l'équation (3) admettra une intégrale holomorphe développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et telle que les coefficients du développement soient des fonctions périodiques de t.

Voyons d'abord quelle va être la forme de Y_i. Nous allons développer Y_i suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; considérons le terme en $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Le coefficient de ce terme étant une fonction périodique de t pourra se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de t, ou ce qui revient au même suivant les puissances positives et négatives de $e^{t\sqrt{-1}}$.

Nous pourrons donc écrire

$$Y_i = \Sigma C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Les C sont des coefficients constants; β est un entier positif ou négatif; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers positifs tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geq 2.$$

---

exemple $\lambda_2 = \lambda_1$. Il n'en est rien. Si l'on avait

$$m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1 \qquad (m_2 + m_3 + \ldots + m_n > 1),$$

certains coefficients du développement prendraient la forme $\frac{A}{0}$ et deviendraient infinis. C'est pour cette raison que nous avons dû supposer qu'une pareille relation n'a pas lieu. Si l'on avait au contraire $\lambda_2 = \lambda_1$ certains coefficients prendraient la forme $\frac{0}{0}$.

J'écrirai aussi quelquefois en supprimant les indices

$$Y_i = \Sigma C e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Posons maintenant

$$Y'_i = \Sigma |C| e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

et envisageons l'équation suivante :

$$(4) \qquad (\lambda'_1 x_1 - Y'_1)\frac{dz}{dx_1} + (\lambda'_2 x_2 - Y'_2)\frac{dz}{dx_2} + \ldots + (\lambda'_n x_n - Y'_n)\frac{dz}{dx_n} = \lambda'_1 z.$$

Dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ n'entre plus; nous pouvons donc regarder t comme un paramètre arbitraire et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les seules variables indépendantes. Si donc les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n$ satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut, l'équation (4) [qui est de même forme que l'équation (2)] admettra une intégrale holomorphe.

Nous supposerons

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \ldots = \lambda'_n.$$

Nous supposerons de plus λ'_1 réel et positif.

Cela posé, soit

$$(5) \qquad z = \Sigma A_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant formellement à l'équation (3). Comment pourra-t-on calculer les coefficients A par récurrence ?

En écrivant l'équation (3) sous la forme

$$\frac{dz}{dt} + \lambda_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \ldots + \lambda_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda_1 z = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + Y_n \frac{dz}{dx_n}$$

et en identifiant les deux membres, on trouve

$$A_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}[\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1] = P[C, A],$$

P[C, A] étant un polynome entier à coefficients positifs par rapport aux C et aux coefficients A déjà calculés.

Soit maintenant

$$(6) \qquad z = \Sigma A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{\sqrt{-1}\beta t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant à l'équation (4). Pour calculer les coefficients A′ nous écrirons l'équation (4) sous la forme

$$\lambda'_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \lambda'_2 x_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + \lambda'_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda'_1 z = Y'_1 \frac{dz}{dx_1} + Y'_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + Y'_n \frac{dz}{dx_n}.$$

En identifiant les deux membres, nous trouverons

$$A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}[\lambda'_1\alpha_1+\lambda'_2\alpha_2+\ldots+\lambda'_n\alpha_n-\lambda'_1]=P[|C|, A'].$$

$P[|C|, A']$ ne diffère de $P[C, A]$ que parce que les C sont remplacés par leurs modules et les A par les A'.

Les λ' étant réels positifs ainsi que les coefficients du polynome P, les A' seront ainsi réels et positifs.

Pour que l'on ait ensuite

$$|A_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}|<A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

il suffit que l'on ait toujours

$$\lambda'_1\alpha_1+\lambda'_2\alpha_2+\ldots+\lambda'_n\alpha_n-\lambda'_1<|\beta\sqrt{-1}+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n-\lambda_1|$$

ou

$$(7)\qquad \lambda'_1<\left|\frac{\beta\sqrt{-1}+\lambda_1(\alpha_1-1)+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n}{(\alpha_1-1)+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\right|.$$

Si l'on a choisi λ'_1 de façon à satisfaire à l'inégalité (7), on aura donc $|A|<A'$.

Or la série (6) converge, donc il en sera de même de la série (5).

Ainsi donc pour que la série (5) converge, il suffit qu'on puisse trouver une quantité positive λ'_1 satisfaisant à l'inégalité (7) pour toutes les valeurs entières et positives des α, et pour toutes les valeurs entières positives et négatives de β.

Commençons par remarquer que le second membre de l'inégalité (7) est toujours plus grand que

$$(8)\qquad \left|\frac{\beta\sqrt{-1}+\lambda_1(\alpha_1-1)+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n}{|\beta|+(\alpha_1-1)+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\right|.$$

Il suffira donc que λ'_1 soit plus petit que l'expression (8). Or cette expression (8) est le module d'une certaine quantité imaginaire représentée par un certain point G. Or il est aisé de voir que ce point G n'est autre chose que le centre de gravité des $n+2$ masses suivantes :

1° n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et situées respectivement aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;

2° une masse égale à $|\beta|$ et située soit au point $+\sqrt{-1}$ soit au point $-\sqrt{-1}$;

3° une masse égale à -1 située au point λ_1.

Toutes ces masses sont positives à l'exception de la dernière.

Il faut chercher la condition pour que la distance OG soit toujours supérieure à une certaine limite λ'_1.

Composons d'abord les $n+1$ premières masses; nous obtiendrons une masse

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + |\beta|.$$

située en un certain point G′ et comme ces $n+1$ premières masses sont positives, le point G′ sera situé à l'intérieur de l'un ou de l'autre des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les $n+1$ points : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, et le second les $n+1$ points : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$.

Si aucun de ces polygones convexes ne contient l'origine, on pourra assigner à la distance OG′ une limite inférieure μ et écrire $OG' > \mu$.

Il reste à composer la masse M située en G′ et la masse -1 située en λ_1. On obtiendra ainsi une masse $M-1$ située en G. On aura évidemment

$$OG > OG' - GG', \qquad GG' = \frac{G'\lambda_1}{M-1} < \frac{OG'}{M-1} + \frac{O\lambda_1}{M-1},$$

d'où

$$OG > OG'\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1} > \mu\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1}.$$

Si donc

$$M > \frac{3\mu + 2O\lambda_1}{\mu}$$

l'inégalité

$$OG > \frac{\mu}{2} \tag{9}$$

sera satisfaite.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de combinaisons des nombres entiers : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ pour lesquelles l'inégalité (9) pourrait ne pas être satisfaite.

Si pour aucune de ces combinaisons OG n'est nul, nous serons certain de pouvoir assigner à OG une limite inférieure λ_1.

Nous sommes donc conduit à la règle suivante :

Pour que l'équation (3) *admette une intégrale développable suivant les puissances des x et périodique par rapport à t, il suffit :*

1° *qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine,*

2° *qu'il n'y ait entre les quantités* λ *aucune relation de la forme*

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = \lambda_1,$$

les α *étant entiers positifs et* β *entier positif ou négatif.*

C'est là une généralisation du théorème démontré dans ma Thèse. Or de ce théorème découlaient un certain nombre de conséquences. Voyons si l'on pourra en tirer de semblables du théorème généralisé.

Nous allons pour cela suivre absolument la même marche que dans la thèse citée.

Considérons l'équation

$$(10) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1\frac{dz}{dx_1} + X_2\frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n\frac{dz}{dx_n} = 0,$$

obtenue en supprimant le second membre de l'équation (3).

Considérons en outre l'équation

$$(3) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1\frac{dz}{dx_1} + X_2\frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n\frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

et l'équation

$$(11) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1\frac{dz}{dx_1} + X_2\frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n\frac{dz}{dx_n} = \lambda_2 z.$$

Si les λ satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer, l'équation (3) admettra une intégrale $z = T_1$, où T_1 est ordonné suivant les puissances des x et périodique par rapport à t.

De même l'équation (11) admettra une intégrale $z = T_2$, où T_2 est de même forme que T_1.

On en conclut que l'équation (10) admet une intégrale particulière $T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}$.

Comme on peut dans le second membre de (3) remplacer successivement $\lambda_1 z$ par $\lambda_2 z$, $\lambda_3 z$, ..., $\lambda_n z$ et qu'on obtient ainsi $n-1$ équations analogues à l'équation (11), on peut conclure que l'équation (10) admet $n-1$ intégrales particulières $T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}$, $T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}T_3^{-\frac{1}{\lambda_3}}$, ..., $T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}T_n^{-\frac{1}{\lambda_n}}$, où T_2, T_3, ..., T_n sont de même forme que T_1.

Pour avoir l'intégrale générale de (10), il faudrait posséder encore une $n^{\text{ième}}$ intégrale particulière. Pour cela considérons l'équation

$$(12) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1\frac{dz}{dx_1} + \ldots + X_n\frac{dz}{dx_n} = z.$$

Cette équation admettra comme intégrale particulière $z = e^t$.

Nous en conclurons que l'équation (10) admet comme intégrales particulières $T_1 e^{-h_1 t}$, $T_2 e^{-h_2 t}$, ..., $T_n e^{-h_n t}$, de sorte que l'intégrale générale de cette équation (10) sera

$$z = \text{fonction arbitraire de } (T_1 e^{-h_1 t}, T_2 e^{-h_2 t}, \ldots, T_n e^{-h_n t}).$$

En d'autres termes les équations différentielles

$$(10') \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

admettront comme intégrale générale

$$T_1 = K_1 e^{h_1 t}, \qquad T_2 = K_2 e^{h_2 t}, \qquad \ldots, \qquad T_n = K_n e^{h_n t},$$

$K_1, K_2, \ldots, K_n$ étant n constantes d'intégration.

Ce théorème peut être regardé comme la généralisation de celui que j'ai démontré à la page 70 de ma Thèse.

Supposons maintenant que nous cherchions à déterminer les p premières variables x à savoir $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonction des $n-p$ autres à savoir x_{p+1}, $x_{p+2}, \ldots, x_n$ et de t, à l'aide des équations suivantes :

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} + X_{p+1}\dfrac{dx_1}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\dfrac{dx_1}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n \dfrac{dx_1}{dx_n} = X_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} + X_{p+1}\dfrac{dx_2}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\dfrac{dx_2}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n \dfrac{dx_2}{dx_n} = X_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_p}{dt} + X_{p+1}\dfrac{dx_p}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\dfrac{dx_p}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n \dfrac{dx_p}{dx_n} = X_p. \end{array} \right.$$

Il est aisé de voir que l'intégrale générale des équations (13) s'écrira

$$(14) \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ représentant p fonctions arbitraires de $T_1 e^{-h_1 t}$, $T_2 e^{-h_2 t}$, ..., $T_n e^{-h_n t}$.

Prenons en particulier

$$\varphi_1 = T_1 e^{-h_1 t}, \qquad \varphi_2 = T_2 e^{-h_2 t}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p = T_p e^{-h_p t}.$$

Les équations (14) s'écriront

$$(14') \qquad T_1 = T_2 = \ldots = T_p = 0.$$

Des équations (14') on pourra tirer $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonction de x_{p+1}, $x_{p+2}, \ldots, x_n$ et t et l'on verra que ce sont des fonctions holomorphes par rapport à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et périodiques par rapport à t.

Donc les équations (13) admettent une solution développable suivant les puissances croissantes de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ce théorème est démontré quand les λ satisfont aux conditions énoncées plus haut; voyons comment on pourra l'étendre aux cas où ces conditions ne sont pas remplies. Je suivrai pour cela la même marche que dans la IVe Partie de mes recherches sur les *courbes définies par les équations différentielles* (*Journal de Liouville*, 4e série, t. 2, p. 156-157) [1].

Proposons-nous de calculer les coefficients de l'intégrale holomorphe des équations (13) (à supposer que cette intégrale existe) et à cet effet écrivons ces équations (13) sous la forme suivante :

$$(13') \quad \frac{dx_i}{dt} + \lambda_{p+1}x_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda_{p+2}x_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda_n x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda_i x_i$$
$$= Y_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y_n\frac{dx_i}{dx_n} - Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Soit

$$Y_i = \Sigma C_{i.\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une quelconque des fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, ainsi que nous l'avons supposé plus haut, et proposons-nous de calculer les p fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sous la forme

$$(15) \qquad x_i = \Sigma A_{i.\beta.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Pour calculer les coefficients A par récurrence, substituons les séries (15) dans les équations (13') et identifions les deux membres. Nous aurons pour calculer $A_{i.\beta.\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n}$ l'équation suivante :

$$A_{i.\beta.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}(\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i) = P[C, (-C'), A],$$

$P[C, (-C'), A]$ étant un polynome entier à coefficients positifs par rapport aux coefficients C de $Y_{p+1}, Y_{p+2}, \ldots, Y_n$, aux coefficients C' de Y_i changés de signe et aux coefficients A déjà calculés.

Pour qu'aucun des coefficients A ne devienne infini nous devons donc supposer qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme

$$(16) \qquad \beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i = 0,$$

où les α soient entiers positifs et β entier positif ou négatif.

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, t. I, p. 172.

Cela posé soit λ' une quantité positive que nous déterminerons plus complètement dans la suite.

Soit ensuite

$$Y'_i = \Sigma\,|C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}|\,e^{i\beta\sqrt{-1}}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \qquad \text{pour} \quad i = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ n$$

et

$$Y'_i = -\Sigma\,|C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}|\,e^{i\beta\sqrt{-1}}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \qquad \text{pour} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Formons les équations

$$(13'') \quad \lambda' x_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda' x_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda' x_n\frac{dx_i}{dx_n} - \lambda' x_i$$
$$= Y'_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y'_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y'_n\frac{dx_i}{dx_n} - Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Cherchons à satisfaire aux équations (13″) à l'aide des séries de la forme suivante :

$$(15') \qquad x_i = \Sigma B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n} e^{i\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Les coefficients B nous seront donnés par les équations suivantes :

$$B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}[\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots + \alpha_n - 1)] = P[\,|C|,\ |C'|,\ B\,],$$

où $P[\,|C|,\ |C'|,\ B\,]$ diffère de $P[C,\ (-C'),\ A]$ en ce que les coefficients C et $-C'$ y sont remplacés par leurs modules, et les coefficients A par les B correspondants.

On en conclut que tous les B sont positifs et que chaque B est plus grand que le module du A correspondant.

Il suffit pour cela d'une seule condition, c'est que

$$\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots + \alpha_n - 1) < \left|\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i\right|.$$

Si cette condition est remplie chacun des termes de la série (15) sera plus petit que le terme correspondant de la série (15′) et comme cette dernière converge, la série (15) convergera également.

Il suffit pour cela que l'on puisse trouver une quantité positive λ' assez petite pour que l'on ait toujours

$$\lambda' < \left|\frac{\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i}{\alpha_{p+1} + \ldots + \alpha_n - 1}\right|,$$

c'est-à-dire, d'après ce que nous avons vu plus haut, qu'aucun des deux *polygones convexes* circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine.

Si donc aucun de ces deux polygones convexes ne contient l'origine, s'il n'y a entre les λ *aucune relation de la forme* (16), *les équations* (13) *admettront une intégrale particulière de la forme suivante :*

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t), \\ x_2 &= \varphi_2(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_p &= \varphi_p(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t), \end{aligned}$$

les φ *étant développables suivant les puissances de* $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ *et les sinus et cosinus des multiples de* t.

Cela posé, envisageons les équations

$$(10'') \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Ces équations sont de même forme que les équations (10'); la seule différence, c'est que les λ n'ont pas des valeurs qui satisfont aux conditions suffisantes énoncées plus haut pour que l'équation (13) ait une intégrale holomorphe.

Nous allons nous proposer de trouver non pas la solution générale des équations (10''), mais une solution contenant $n - p$ constantes arbitraires.

Parmi les équations (10''), je considère en particulier les suivantes :

$$(17) \qquad \frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = X_{p+2}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

J'écris en outre les équations

$$(18) \qquad x_i = \varphi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t) \qquad (1, 2, \ldots, p),$$

les φ_i étant les intégrales holomorphes des équations (13) définies plus haut.

Il est évident que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n fonctions de t qui satisfont aux équations (17) et (18), elles satisferont également aux équations (10'').

Dans les équations (17) substituons à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ leurs valeurs (18), ces équations deviendront

$$(19) \quad \frac{dx_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1}x_{p+1} + Z_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2}x_{p+2} + Z_{p+2}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + Z_n,$$

$Z_{p+1}, Z_{p+2}, \ldots, Z_n$ étant des séries développées suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, dont tous les termes sont du deuxième degré au moins et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t.

Ces équations (19) sont de la même forme que les équations (10'); leur intégrale générale sera donc de la forme suivante :

$$T'_{p+1} = K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, \qquad T'_{p+2} = K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \qquad \ldots, \qquad T'_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

où $K_{p+1}, \ldots, K_n$ sont des constantes d'intégration, où $T'_{p+1}, \ldots, T'_n$ sont des séries développées suivant les puissances des x et les sinus et cosinus des multiples de t.

Les équations

$$(20) \qquad T_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \qquad T'_q = K_q e^{\lambda_q t} \quad (q = p+1, p+2, \ldots, n),$$

nous donnent donc une intégrale des équations (10″) dépendant des $n-p$ constantes arbitraires $K_{p+1}, K_{p+2}, \ldots, K_n$.

Pour obtenir cette intégrale sous forme explicite, il faut résoudre ces équations (20) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, K_{p+1}, \ldots, K_n), \\ x_2 &= \varphi_2(t, K_{p+1}, \ldots, K_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t, K_{p+1}, \ldots, K_n), \end{aligned}$$

les φ étant des séries développées suivant les puissances de $K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \ldots, K_n e^{\lambda_n t}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ces séries sont convergentes, pourvu qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, et le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine et qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme (16).

Cette démonstration fait ressortir l'analogie de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma Thèse et en particulier avec celui-ci :

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de $t, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}$.

J'avais d'abord démontré ce théorème (que j'ai ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma Thèse) par une voie assez différente dans le 45e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* [1] et M. Picard y avait été conduit indépendamment par d'autres considérations (*C. R. Acad. Sc.*, 1878).

4. — Intégration des équations linéaires à coefficients périodiques.

On sait qu'une fonction de x périodique et de période 2π peut se développer en une série de la forme suivante :

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x) = A_0 &+ A_1 \cos x - A_2 \cos 2x - \ldots + A_n \cos nx + \ldots \\ &+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots \end{aligned}$$

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, t. I, p. XXXVI.

J'ai montré dans le *Bulletin astronomique* (novembre 1886) [1] que si la fonction $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p-2$ premières dérivées et si sa $(p+1)^{\text{ième}}$ dérivée est finie, mais peut devenir discontinue en un nombre limité de points, on peut trouver un nombre positif K tel que l'on ait, quel que soit n,

$$|n^p A_n| < K, \qquad |n^p B_n| < K.$$

Si $f(x)$ est une fonction analytique, elle sera finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On pourra donc trouver un nombre K tel que

$$|n^2 A_n| < K, \qquad |n^2 B_n| < K.$$

Il résulte de là que la série

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + \ldots + |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_n| + \ldots$$

converge et par conséquent que la série (1) est absolument et uniformément convergente.

Cela posé, considérons un système d'équations différentielles linéaires :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varphi_{1.1} x_1 + \varphi_{1.2} x_2 + \ldots + \varphi_{1.n} x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \varphi_{2.1} x_1 + \varphi_{2.2} x_2 + \ldots + \varphi_{2.n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \varphi_{n.1} x_1 + \varphi_{n.2} x_2 + \ldots + \varphi_{n.n} x_n. \end{cases}$$

Les n^2 coefficients $\varphi_{i.k}$ sont des fonctions de t périodiques et de période 2π.

Les équations (2) ne changent donc pas quand on change t en $t+2\pi$. Cela posé, soient

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = \psi_{1.1}(t), & x_2 = \psi_{1.2}(t), & \ldots, & x_n = \psi_{1.n}(t), \\ x_1 = \psi_{2.1}(t), & x_2 = \psi_{2.2}(t), & \ldots, & x_n = \psi_{2.n}(t), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x_1 = \psi_{n.1}(t), & x_2 = \psi_{n.2}(t), & \ldots, & x_n = \psi_{n.n}(t), \end{cases}$$

n solutions, linéairement indépendantes, des équations (2).

Les équations ne changent pas quand on change t en $t+2\pi$ et les n solutions deviendront

$$\begin{array}{lll} x_1 = \psi_{1.1}(t+2\pi), & \ldots, & x_n = \psi_{1.n}(t+2\pi), \\ x_1 = \psi_{2.1}(t+2\pi), & \ldots, & x_n = \psi_{2.n}(t+2\pi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 = \psi_{n.1}(t+2\pi), & \ldots, & x_n = \psi_{n.n}(t+2\pi). \end{array}$$

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, t. IV.

Elles devront donc être des combinaisons linéaires des n solutions (3) de sorte qu'on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \psi_{1.1}(t+2\pi) = A_{1.1}\psi_{1.1}(t) + A_{1.2}\psi_{2.1}(t) + \ldots + A_{1.n}\psi_{n.1}(t), \\ \psi_{2.1}(t+2\pi) = A_{2.1}\psi_{1.1}(t) + A_{2.2}\psi_{2.1}(t) + \ldots + A_{2.n}\psi_{n.1}(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n.1}(t+2\pi) = A_{n.1}\psi_{1.1}(t) + A_{n.2}\psi_{2.1}(t) + \ldots + A_{n.n}\psi_{n.1}(t), \end{cases}$$

les A étant des coefficients constants.

On aura d'ailleurs de même (avec les mêmes coefficients)

$$\psi_{1.2}(t+2\pi) = A_{1.1}\psi_{12}(t) + A_{1.2}\psi_{2.2}(t) + \ldots + A_{1.n}\psi_{n.2}(t), \qquad \ldots.$$

Cela posé formons l'équation en S :

$$(5)\quad \begin{vmatrix} A_{1.1} - S & A_{1.2} & \ldots & A_{1.n} \\ A_{2.1} & A_{2.2} - S & \ldots & A_{2.n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n.1} & A_{n.2} & \ldots & A_{n.n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Soit S_1 l'une des racines de cette équation. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existera toujours n coefficients constants $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tels que si l'on pose

$$\theta_{1.1}(t) = B_1\psi_{1.1}(t) + B_2\psi_{2.1}(t) + \ldots + B_n\psi_{n.1}(t)$$

et de même

$$\theta_{1.i}(t) = B_1\psi_{1.i}(t) + B_2\psi_{2.i}(t) + \ldots + B_n\psi_{n.i}(t)$$

on ait

$$\theta_{1.1}(t+2\pi) = S_1\theta_{1.1}(t)$$

et de même

$$\theta_{1.i}(t+2\pi) = S_1\theta_{1.i}(t).$$

Posons

$$S_1 = e^{2\alpha_1\pi},$$

il viendra

$$e^{-\alpha_1(t+2\pi)}\theta_{1.1}(t+2\pi) = S_1 e^{-2\alpha_1\pi} e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.1}(t) = e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.1}(t).$$

Cette équation exprime que $e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.1}(t)$ est une fonction périodique que nous pourrons développer en une série trigonométrique $\lambda_{1.1}(t)$.

Si les fonctions périodiques $\varphi_{i.k}(t)$ sont analytiques, il en sera de même des solutions des équations différentielles (2) et de $\lambda_{1.1}(t)$. La série $\lambda_{1.1}(t)$ sera donc absolument et uniformément convergente.

De même $e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.i}(t)$ sera une fonction périodique qu'on pourra représenter par une série trigonométrique $\lambda_{1.i}(t)$.

Nous avons donc une solution particulière des équations (2) qui s'écrit

$$(6)\qquad x_n = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1}(t),\qquad x_2 = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,2}(t),\qquad \ldots,\qquad x_n = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,n}(t).$$

A chaque racine de l'équation (5) correspond une solution de la forme (6).

Si l'équation (5) a toutes ses racines distinctes, nous aurons n solutions de cette forme linéairement indépendantes et la solution générale s'écrira

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2,1}(t) + \ldots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n,1}(t),\\ x_2 = C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,2}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2,2}(t) + \ldots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n,2}(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n = C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,n}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2,n}(t) + \ldots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n,n}(t). \end{array}\right.$$

Les C sont des constantes d'intégration, les α sont des constantes et les λ sont des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes.

Voyons maintenant ce qui arrive quand l'équation (5) a une racine double, par exemple quand $\alpha_1 = \alpha_2$. Reprenons la formule (7), faisons-y

$$C_3 = C_4 = \ldots = C_n = 0$$

et faisons-y tendre α_2 vers α_1. Il vient

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}[C_1\lambda_{1,1}(t) + C_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2,1}(t)]$$

ou en posant

$$C_1 = C'_1 - C_2,\qquad C_2 = \frac{C'_2}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

il viendra

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C'_1\lambda_{1,1}(t) + C'_2\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)}{\alpha_2 - \alpha_1}\right].$$

Il est clair que la différence $\lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)$ s'annulera pour $\alpha_2 = \alpha_1$. Nous pourrons donc poser

$$\lambda_{2,1}(t) = \lambda_{1,1}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda'(t).$$

Il vient ainsi

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C'_1\lambda_{1,1} + C'_2\lambda_{1,1}\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} + C'_2\lambda'(t)e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\right]$$

et à la limite (pour $\alpha_2 = \alpha_1$);

$$x_1 = C'_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1} + C'_2 e^{\alpha_1 t}[t\lambda_{1,1} + \lim\lambda'(t)].$$

On verrait que la limite de $\lambda'(t)$ pour $\alpha_2 = \alpha_1$ est encore une série trigonométrique absolument et uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (5) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante : $e^{\alpha_1 t}t\lambda(t)$, $\lambda(t)$ étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme $e^{\alpha_1 t} t^2 \lambda(t)$ et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de MM. Floquet, Callandreau, Bruns, Stieltjes, et si j'ai donné ici la démonstration *in extenso* pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de la faire en quelques mots.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES INVARIANTS INTÉGRAUX.

5. — Propriétés diverses des équations de la Dynamique.

Soit F une fonction d'une double série de variables : $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations :

$$\begin{array}{cccccccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n; & y_1, & y_2, & \ldots, & y_n; \\ x_1+\xi_1, & x_2+\xi_2, & \ldots, & x_n+\xi_n, & y_1+\eta_1, & y_2+\eta_2, & \ldots, & y_n+\eta_n, \end{array}$$

les ξ et les η étant assez petits pour que l'on puisse négliger leurs carrés.

Les ξ et les η satisferont alors aux équations différentielles linéaires

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \displaystyle\sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k}\eta_k, \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\displaystyle\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\eta_k, \end{array} \right.$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Soit ξ'_j, η'_j une autre solution de ces équations linéaires de sorte que

$$(2') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\xi'_i}{dt} = \displaystyle\sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k}\xi'_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k}\eta'_k, \\ \dfrac{d\eta'_i}{dt} = -\displaystyle\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k}\xi'_k - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\eta'_k. \end{array} \right.$$

Multiplions les équations (2) et (2') respectivement par η'_i, $-\xi'_i$, $-\eta_i$, ξ_i et faisons la somme de toutes ces équations, il viendra

$$\sum_i \left(\eta'_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi'_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi'_i}{dt} + \xi_i \frac{d\eta'_i}{dt}\right)$$
$$= \sum_i \sum_k \left(\xi_k \eta'_i \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k} + \eta_k \eta'_i \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k} + \xi_k \xi'_i \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k} + \eta_k \xi'_i \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\right)$$
$$- \sum_i \sum_k \left(\eta_i \xi'_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k} + \eta_i \eta'_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k} + \xi_i \xi'_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k} + \xi_i \eta'_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\right)$$

ou

$$\sum_i \frac{d}{dt}[\eta'_i \xi_i - \xi'_i \eta_i] = 0$$

ou enfin

$$(3) \qquad \eta'_1 \xi_1 - \xi'_1 \eta_1 + \eta'_2 \xi_2 - \xi'_2 \eta_2 + \ldots + \eta'_n \xi_n - \xi'_n \eta_n = \text{const.}$$

Voilà une relation qui lie entre elles deux solutions quelconques des équations linéaires (2).

Il est aisé de trouver d'autres relations analogues.

Considérons quatre solutions des équations (2) :

$$\xi_i, \quad \xi'_i, \quad \xi''_i, \quad \xi'''_i, \qquad \eta_i, \quad \eta'_i, \quad \eta''_i, \quad \eta'''_i.$$

Considérons ensuite la somme des déterminants :

$$\sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \xi_i & \xi'_i & \xi''_i & \xi'''_i \\ \eta_i & \eta'_i & \eta''_i & \eta'''_i \\ \xi_k & \xi'_k & \xi''_k & \xi'''_k \\ \eta_k & \eta'_k & \eta''_k & \eta'''_k \end{vmatrix},$$

où les indices i et k varient depuis 1 jusqu'à n. On vérifierait sans peine que cette somme est encore une constante.

Plus généralement si l'on forme à l'aide de $2p$ solutions des équations (2) la somme de déterminants :

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} |\xi_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \eta_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_p} \eta_{\alpha_p}| \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 1, 2, \ldots, n)$$

cette somme sera une constante.

En particulier, le déterminant formé par les valeurs des $2n$ quantités ξ et η dans $2n$ solutions des équations (2) sera une constante.

Ces considérations permettent de trouver une solution des équations (2) quand on en connaît une intégrale et réciproquement.

Supposons en effet que

$$\xi_i = \alpha_i, \qquad \eta_i = \beta_i$$

soit une solution particulière des équations (2) et désignons par ξ_i et η_i une solution quelconque de ces mêmes équations. On devra avoir

$$\Sigma \xi_i \beta_i - \eta_i \alpha_i = \text{const.},$$

ce qui sera une intégrale des équations (2).

Réciproquement soit

$$\Sigma A_i \xi_i + \Sigma B_i \eta_i = \text{const.}$$

une intégrale des équations (2), on devra avoir

$$\sum_i \frac{dA_i}{dt}\xi_i + \sum_i \frac{dB_i}{dt}\eta_i + \sum_i A_i \left[\sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k}\eta_k\right]$$
$$- \sum_i B_i \left[\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\eta_k\right] = 0,$$

d'où en identifiant

$$\frac{dA_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2 F}{dy_k\, dx_i} A_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dx_k\, dx_i} B_k,$$
$$\frac{dB_i}{dt} = -\sum_k \frac{d_2 F}{dy_k\, dy_i} A_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dx_k\, dy_i} B_k,$$

ce qui montre que

$$\xi_i = B_i, \qquad \eta_i = -A_i$$

est une solution particulière des équations (2).

Si maintenant

$$\Phi(x_i, y_i, t) = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (1),

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i}\xi_i + \sum \frac{d\Phi}{dy_i}\eta_i = \text{const.}$$

sera une intégrale des équations (2), et par conséquent

$$\xi_i = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{d\Phi}{dx_i}$$

sera une solution particulière de ces équations.

Si $\Phi = \text{const.}$, $\Phi_1 = \text{const.}$ sont deux intégrales des équations (1), on aura

$$\sum \left(\frac{d\Phi\, d\Phi_1}{dx_i\, dy_i} - \frac{d\Phi\, d\Phi_1}{dy_i\, dx_i}\right) = \text{const.}$$

C'est le théorème de Poisson.

Considérons le cas particulier où les x désignent les coordonnées rectangulaires de n points dans l'espace; nous les désignerons par la notation à double indice x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, le premier indice se rapportant aux trois axes rectangulaires de coordonnées et le second indice aux n points matériels. Soit m_i la masse du $i^{\text{ième}}$ point matériel. On aura alors

$$m_i \frac{d^2 x_{ki}}{dt^2} = \frac{dV}{dx_{ki}},$$

V étant la fonction des forces.

On aura alors pour l'équation des forces vives :

$$F = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_{ki}}{dt}\right)^2 - V = \text{const.}$$

Posons ensuite

$$y_{ki} = m_i \frac{dx_{ki}}{dt},$$

d'où

$$(4) \qquad F = \sum \frac{y_{ki}^2}{2 m_i} - V = \text{const.}$$

et

$$(1') \qquad \frac{dx_{ki}}{dt} = \frac{dF}{dy_{ki}}, \qquad \frac{dy_{ki}}{dt} = -\frac{dF}{dx_{ki}}.$$

Soit

$$(5) \qquad x_{ki} = \varphi_{ki}(t), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t)$$

une solution de ces équations (1'), une autre solution sera

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t + h), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t + h),$$

h étant une constante quelconque.

En regardant h comme infiniment petit, on obtiendra une solution des équations (2') qui correspondent à (1') comme les équations (2) correspondent à (1) :

$$\xi_{ki} = h \varphi'_{ki}(t) = h \frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = h m_i \varphi''_{ki}(t) = h \frac{dV}{dx_{ki}},$$

h désignant un facteur constant très petit que l'on peut supprimer quand on ne considère que les équations linéaires (2').

Connaissant une solution

$$\xi = \frac{y}{m}, \qquad \eta = \frac{dV}{dx}$$

de ces équations, on peut déduire une intégrale

$$\sum \frac{1}{m} \eta - \sum \frac{dV}{dx} \xi = \text{const.}$$

Mais cette même intégrale s'obtient très aisément en différentiant l'équation des forces vives (4).

Si les points matériels sont soustraits à toute action extérieure, on peut déduire de la solution (5) une autre solution :

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \varphi_{1i}(t) + h + kt, & y_{1i} &= m_i\varphi'_{1i}(t) + m_i k, \\ x_{2i} &= \varphi_{2i}(t), & y_{2i} &= m_i\varphi'_{2i}(t), \\ x_{3i} &= \varphi_{3i}(t), & y_{3i} &= m_i\varphi'_{3i}(t), \end{aligned}$$

h et k étant des constantes quelconques. En regardant ces constantes comme infiniment petites, on obtient deux solutions des équations (2') :

$$\begin{aligned} &\xi_{1i} = 1, \quad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{1i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \\ &\xi_{1i} = t, \quad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \quad \eta_{1i} = m_i. \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux intégrales de (2') :

$$\sum_i \eta_{1i} = \text{const.}, \qquad \sum \eta_{1i} t - \sum m_i \xi_{1i} = \text{const.}$$

On peut obtenir ces intégrales en différentiant les équations du mouvement du centre de gravité :

$$\Sigma m_i x_{1i} = t\Sigma y_{1i} + \text{const.}, \qquad \Sigma y_{1i} = \text{const.}$$

Si l'on fait tourner la solution (5) d'un angle ω autour de l'axe des z, on obtient une autre solution :

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \varphi_{1i}\cos\omega - \varphi_{2i}\sin\omega, & \frac{y_{1i}}{m_i} &= \varphi'_{1i}\cos\omega - \varphi'_{2i}\sin\omega, \\ x_{2i} &= \varphi_{1i}\sin\omega + \varphi_{2i}\cos\omega, & \frac{y_{2i}}{m_i} &= \varphi'_{1i}\sin\omega + \varphi'_{2i}\cos\omega, \\ x_{3i} &= \varphi_{3i}, & \frac{y_{3i}}{m_i} &= \varphi'_{3i}. \end{aligned}$$

En regardant ω comme infiniment petit, on trouve comme solution de (2') :

$$\begin{aligned} \xi_{1i} &= -x_{2i}, & \eta_{1i} &= -y_{2i}, \\ \xi_{2i} &= x_{1i}, & \eta_{2i} &= y_{1i}, \\ \xi_{3i} &= 0, & \eta_{3i} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'intégrale de (2') :

$$\sum_i (x_{1i}\eta_{2i} - y_{1i}\xi_{2i} - x_{2i}\eta_{1i} + y_{2i}\xi_{1i}) = \text{const.}$$

que l'on pouvait obtenir aussi en différentiant l'intégrale des aires de (1') :

$$\Sigma(x_{1i}y_{2i} = x_{2i}y_{1i}) = \text{const.}$$

Supposons maintenant que la fonction V soit homogène et de degré -1 par rapport aux x, ce qui est le cas de la nature.

Les équations (1′) ne changeront pas quand on multipliera t par λ^3, les x par λ^2 et les y par λ^{-1}, λ étant une constante quelconque. De la solution (4) on déduira donc la solution suivante :

$$x_{ki} = \lambda^2 \varphi_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right), \qquad y_{ki} = \lambda^{-1} m_i \varphi'_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right).$$

Si l'on regarde λ comme très voisin de l'unité, on obtiendra comme solution des équations (2′) :

$$\xi_{ki} = 2\varphi_{ki} - 3t\varphi'_{ki}, \qquad \eta_{ki} = -m_i\varphi'_{ki} - 3m_i t\varphi''_{ki},$$

ou

$$\xi_{ki} = 2x_{ki} - 3t\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = -y_{ki} - 3t\frac{dV}{dx_{ki}}, \tag{6}$$

d'où l'intégrale suivante des équations (2′), laquelle, à la différence de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, ne peut être obtenue en différentiant une intégrale connue des équations (1′) :

$$\sum(2x_{ki}\eta_{ki} + y_{ki}\xi_{ki}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{ki}\eta_{ki}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{ki}}\xi_{ki}\right)\right] + \text{const.}$$

6. — Définition des invariants intégraux.

Considérons un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

X_i étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on a

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

cette relation s'appelle une intégrale des équations données. Le premier membre de cette relation peut s'appeler un invariant puisqu'il n'est pas altéré quand on augmente les x_i d'accroissements infiniment petits dx_i compatibles avec les équations différentielles.

Soit maintenant $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ une autre solution des mêmes équations différentielles, de telle façon que l'on ait

$$\frac{dx'_i}{dt} = X'_i,$$

X'_1 étant une fonction formée avec $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ comme X_i l'était avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il pourra se faire qu'on ait entre les $2n$ quantités x et x' une relation

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \text{const.}$$

Le premier membre F_1 pourra encore s'appeler un invariant de nos équations différentielles, mais au lieu de dépendre d'une seule solution de ces équations, il dépendra de deux solutions.

On peut supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions et que les équations différentielles données définissent la loi du mouvement de ce point. Si l'on considère deux solutions de ces équations, on aura deux points mobiles différents, se mouvant d'après une même loi définie par nos équations différentielles. L'invariant F_1 sera alors une fonction des coordonnées de ces deux points, qui dans le mouvement de ces deux points conservera sa valeur initiale.

On pourrait évidemment de même, au lieu de deux points mobiles, en envisager trois ou même un plus grand nombre.

Supposons maintenant que l'on considère une infinité de points mobiles et que les positions initiales de ces points forment un certain arc de courbe C dans l'espace à n dimensions.

Quand on se donne la position initiale d'un point mobile et les équations différentielles qui définissent la loi de son mouvement, la position du point à un instant quelconque se trouve entièrement déterminée.

Si donc nous savons que les points mobiles, en nombre infini, forment à l'origine des temps un arc C, nous connaîtrons leurs positions à un instant t quelconque et nous verrons que les points mobiles à l'instant t forment dans l'espace à n dimensions un nouvel arc de courbe C'. Nous sommes donc en présence d'un arc de courbe qui se déplace en se déformant parce que ses différents points se meuvent conformément à la loi définie par les équations différentielles données.

Supposons maintenant que dans ce déplacement et cette déformation l'intégrale suivante :

$$\int (Y_1\,dx_1 + Y_2\,dx_2 + \ldots + Y_n\,dx_n) = \int \Sigma Y_i\,dx_i$$

(où les Y sont des fonctions données des x et qui est étendue à tout l'arc de courbe) ne change pas de valeur. Cette intégrale sera encore pour nos équa-

tions différentielles un invariant, dépendant non plus d'un, de deux ou de trois, mais d'une infinité de points mobiles. Pour indiquer quelle en est la forme, je l'appellerai un invariant intégral.

De même on pourrait imaginer qu'une intégrale de la forme $\int \sqrt{\Sigma Y_{ik}\, dx_i\, dx_k}$, étendue à tout l'arc de courbe, demeure invariable; ce serait encore un invariant intégral.

On peut imaginer également des invariants intégraux qui soient définis par des intégrales doubles ou multiples.

Imaginons qu'on considère un fluide en mouvement permanent et de telle sorte que les trois composantes X, Y, Z de la vitesse d'une molécule quelconque soient des fonctions données des trois coordonnées x, y, z de cette molécule. Alors on pourra dire que la loi du mouvement d'une quelconque des molécules du fluide est définie par les équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z.$$

On sait que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

exprime que le fluide est incompressible. Supposons donc que les fonctions X, Y, Z satisfassent à cette équation et considérons un ensemble de molécules occupant à l'origine des temps un certain volume. Les molécules se déplaceront, mais, en vertu de l'incompressibilité du fluide, le volume qu'elles occuperont demeurera invariable. En d'autres termes le volume, c'est-à-dire l'intégrale triple $\iiint dx\, dy\, dz$ sera un invariant intégral. Plus généralement si l'on envisage les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et que l'on ait la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dX_i}{dx_i} = 0,$$

l'intégrale d'ordre n : $\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ que je continuerai à appeler le volume, sera un invariant intégral.

C'est ce qui arrivera en particulier pour les équations générales de la Dynamique; car si l'on considère ces équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

il est aisé de voir que

$$\sum \frac{d\left(\frac{dF}{dy_i}\right)}{dx_i} + \sum \frac{d\left(-\frac{dF}{dx_i}\right)}{dy_i} = 0.$$

Mais en ce qui concerne ces équations générales de la Dynamique, il y a outre le volume, un autre invariant intégral qui nous sera encore plus utile. Nous avons vu en effet que

$$\Sigma(\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i) = \text{const.}$$

Cela, traduit dans notre nouveau langage, signifie que l'intégrable double $\iint \sum_i dx_i\, dy_i$ est un invariant intégral, ainsi que je le démontrerai plus loin.

Pour exprimer ce résultat d'une autre manière, prenons le cas du problème des n corps.

Nous représenterons la situation du système des n corps par la position de $3n$ points dans un plan. Le premier point aura pour abscisse l'x du premier corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de ce corps; le second point aura pour abscisse l'y de ce même corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des y de sa quantité de mouvement et ainsi de suite.

Imaginons une double infinité de situations initiales du système. A chacune d'elles correspond une position de nos $3n$ points et si l'on considère l'ensemble de ces situations, on verra que ces $3n$ points remplissent $3n$ aires planes.

Si maintenant le système se déplace conformément à la loi de l'attraction, les $3n$ points qui représentent sa situation vont aussi se déplacer; les $3n$ aires planes que je viens de définir vont donc se déformer, mais *leur somme demeurera constante*.

Le théorème sur la conservation du volume n'est qu'une conséquence de celui qui précède.

Il y a dans le cas du problème des n corps un autre invariant intégral sur lequel je veux attirer l'attention.

Considérons une simple infinité de positions initiales du système formant un arc de courbe dans l'espace à $6n$ dimensions. Soient C_0 et C_1 les valeurs de la

constante des forces vives aux deux extrémités de cet arc. Je démontrerai plus loin que l'expression

$$\int \Sigma(2x_i\,dy_i + y_i\,dx_i) + 3(C_1 - C_0)t$$

(où l'intégrale est étendue à l'arc de courbe tout entier et où le temps n'entre plus si $C_1 = C_0$) est encore un invariant intégral; on peut d'ailleurs en déduire aisément les autres invariants intégraux dont il a été question plus haut.

Nous dirons qu'un invariant intégral est du premier ordre, du deuxième ordre .... ou du $n^{\text{ième}}$ ordre selon qu'il sera une intégrale simple, double, ... ou d'ordre n.

Parmi les invariants intégraux nous distinguerons les *invariants positifs* que nous définirons comme il suit.

L'invariant intégral d'ordre n : $\int M\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ sera un invariant positif dans un certain domaine, si M est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui reste positive, finie et uniforme dans ce domaine.

Il me reste à démontrer les divers résultats que je viens d'énoncer; cette démonstration peut se faire par un calcul très simple.

Soit

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

un système d'équations différentielles où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que

$$(2) \qquad \frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0.$$

Soit une solution de ce système d'équations dépendant de n constantes arbitraires : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Cette solution s'écrira

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ x_2 &= \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale

$$J = \int dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \int \Delta\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\alpha_1} & \frac{dx_2}{d\alpha_1} & \cdots & \frac{dx_n}{d\alpha_1} \\ \frac{dx_1}{d\alpha_2} & \frac{dx_2}{d\alpha_2} & \cdots & \frac{dx_n}{d\alpha_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_1}{d\alpha_n} & \frac{dx_2}{d\alpha_n} & \cdots & \frac{dx_n}{d\alpha_n} \end{vmatrix}$$

est une constante.

On a, en effet,

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\Delta}{dt} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \qquad \text{et} \qquad \frac{d\Delta}{dt} = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \Delta_n,$$

Δ_k étant le déterminant Δ dans la $k^{\text{ième}}$ colonne duquel on a remplacé $\frac{dx_k}{d\alpha_1}$, $\frac{dx_k}{d\alpha_2}, \ldots, \frac{dx_k}{d\alpha_n}$ par $\frac{d^2x_k}{d\alpha_1\, dt}, \frac{d^2x_k}{d\alpha_2\, dt}, \ldots, \frac{d^2x_k}{d\alpha_n\, dt}$. Mais on a

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k,$$

d'où

$$\frac{d^2x_k}{d\alpha_i\, dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha_i} + \frac{dX_k}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha_i}.$$

On déduit de là

$$\Delta_k = \Delta \frac{dX_k}{dx_k},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \int (\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \\ &= \int \left(\frac{dX_k}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} \right) \Delta d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'au lieu de la relation (2) nous ayons

$$(2') \qquad \frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0,$$

M étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je dis que

$$J = \int M\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int M\, \Delta d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

est une constante.

On a, en effet,

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left(\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} \right) d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n.$$

Il faut montrer que

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = 0.$$

On a en effet [en vertu des équations (1)]

$$\frac{dM}{dt} = X_1 \frac{dM}{dx_1} + X_2 \frac{dM}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dM}{dx_n}$$

et (d'après ce que nous venons de voir) :

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta\left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right).$$

Il vient donc

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = \Delta\left(\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n}\right) = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons maintenant aux équations de la Dynamique.

Soient les équations

$$(1') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit une solution contenant deux constantes arbitraires α et β et s'écrivant

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha, \beta), \qquad y_i = \psi_i(t, \alpha, \beta).$$

Je dis que

$$J = \int (dx_1\, dy_1 + dx_2\, dy_2 + \ldots + dx_n\, dy_n) = \int \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha}\right) d\alpha\, d\beta$$

est une constante.

Il vient, en effet,

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt\, d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2 y_i}{dt\, d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha} - \frac{d^2 x_i}{dt\, d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2 y_i}{dt\, d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right) d\alpha\, d\beta.$$

Il vient ensuite

$$\frac{d^2 x_i}{dt\, d\alpha} = \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt\, d\beta} = \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k}\frac{dy_k}{d\beta},$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt\, d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt\, d\beta} = -\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\frac{dy_k}{d\beta}.$$

On conclut de là que

$$\sum\left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta}-\frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right)$$
$$=\sum\sum\left(\frac{d^2F}{dy_i\,dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta}+\frac{d^2F}{dy_i\,dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta}+\frac{d^2F}{dx_i\,dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}+\frac{d^2F}{dx_i\,dy_k}\frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_k}{d\alpha}\right).$$

Le second membre ne change pas quand on permute α et β, on a donc

$$\sum\left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta}-\frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right)=\sum\left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha}-\frac{d^2y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha}\right).$$

Cette égalité exprime que la quantité sous le signe $\int$ dans l'expression de $\frac{dJ}{dt}$ est nulle et par conséquent que

$$\frac{dJ}{dt}=0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il me reste à envisager le dernier des invariants intégraux, qui se présente dans le cas du problème des n corps.

Reprenons les équations de la Dynamique, mais en posant

$$F=T+U,$$

T ne dépendant que des y et U des x seulement. De plus T est homogène de degré 2 et U homogène de degré -1.

Prenons une solution

$$x_i=\varphi_i(t,\alpha),\qquad y_i=\psi_i(t,\alpha)$$

ne dépendant que d'une seule constante arbitraire α.

Considérons l'intégrale simple

$$J=\int\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{d\alpha}+y_i\frac{dx_i}{d\alpha}\right)d\alpha+3(C_1-C_0)t,$$

C_1 et C_0 étant les valeurs constantes de la fonction F aux extrémités de l'arc le long duquel on intègre.

Il vient

$$\frac{dJ}{dt}=\int\sum\left(2\frac{dx_i}{dt}\frac{dy_i}{d\alpha}+\frac{dy_i}{dt}\frac{dx_i}{d\alpha}+2x_i\frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}+y_i\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\right)d\alpha+3(C_1-C_0).$$

Il vient

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}=\frac{dT}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dU}{dx_i},$$
$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}=\sum_k\frac{d^2T}{dy_i\,dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},\qquad \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}=-\sum_k\frac{d^2U}{dx_i\,dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt}=\int\sum\sum\left(3\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha}+y_i\frac{d^2T}{dy_i\,dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}-\frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dU}{dx_i}-2x_i\frac{d^2U}{dx_i\,dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\right)d\alpha+3(C_1-C_0).$$

Mais en vertu du théorème des fonctions homogènes on a

$$\sum_i y_i\frac{d^2T}{dy_i\,dy_k}=\frac{dT}{dy_k},\qquad \sum_i x_i\frac{d^2U}{dx_i\,dx_k}=-2\frac{dU}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt}=\int\sum\left(3\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha}+3\frac{dU}{dx_i}\frac{dx_i}{d\alpha}\right)d\alpha+3(C_1-C_0)$$

ou

$$\frac{dJ}{dt}=3\int(dT+dU)+3(C_1-C_0).$$

Or d'après la définition de C_1 et C_0 on a

$$C_0-C_1=\int dW=\int(dT+dU).$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{dt}=0.$$

C. Q. F. D.

7. — Transformation des invariants intégraux.

Reprenons les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{dt}=X_1,\qquad \frac{dx_2}{dt}=X_2,\qquad \ldots,\qquad \frac{dx_n}{dt}=X_n$$

et supposons que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{d(MX_1)}{dx_1}+\frac{d(MX_2)}{dx_2}+\ldots+\frac{d(MX_n)}{dx_n}=0,$$

de telle sorte que l'intégrale d'ordre n

$$I=\int M\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

soit un invariant intégral.

Changeons de variables en posant

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1=\psi_1(z_1,z_2,\ldots,z_n),\\ x_2=\psi_2(z_1,z_2,\ldots,z_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n=\psi_n(z_1,z_2,\ldots,z_n),\end{array}\right.$$

et appelons Δ le déterminant fonctionnel des n fonctions ψ par rapport aux n variables z.

Nous aurons après le changement de variables :

$$J = \int M \Delta dz_1 dz_2 \ldots dz_n.$$

Si l'invariant J était positif avant le changement de variables, il restera positif après ce changement, pourvu que Δ soit toujours positif, fini et uniforme.

Comme en permutant deux des variables z, on change le signe de Δ, il nous suffira de supposer que Δ est toujours de même signe ou qu'il ne s'annule jamais. Il devra de plus être toujours fini et uniforme. Cela arrivera si le changement de variables (3) est doublement univoque, c'est-à-dire si dans le domaine considéré les x sont fonctions uniformes des z et les z fonctions uniformes des x.

Ainsi après un changement de variables doublement univoque, les invariants positifs restent positifs.

Voici un cas particulier intéressant :

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1) :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C.$$

Prenons pour variables nouvelles $z_n = C$ d'une part et d'autre part $n - 1$ autres variables $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ de telle sorte que ce changement de variables soit doublement univoque dans le domaine considéré.

Après le changement de variables, les équations (1) deviendront

$$(4) \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \qquad \frac{dz_2}{dt} = Z_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1}, \qquad \frac{dz_n}{dt} = Z_n = 0,$$

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ étant des fonctions connues de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Si l'on regarde la constante $C = z_n$ comme une donnée de la question, les équations sont réduites à l'ordre $n - 1$ et s'écrivent

$$(4') \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1},$$

les fonctions Z ne dépendant plus que de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ puisque z_n y a été remplacé par sa valeur numérique.

Si les équations (1) admettent un invariant positif $\int M\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, les équations (4) admettront également un invariant positif :

$$J = \int \mu\,dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}\,dz_n.$$

Je dis maintenant que les équations (4') qui sont d'ordre $n-1$ admettent également un invariant intégral positif qui devra être d'ordre $n-1$.

En effet, dire que J est un invariant intégral c'est dire que

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \ldots + \frac{d(\mu Z_n)}{dz_n} = 0$$

ou puisque Z_n est nul,

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \ldots + \frac{d(\mu Z_{n-1})}{dz_n} = 0,$$

ce qui prouve que l'intégrale d'ordre $n-1$: $\int \mu\,dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}$ est un invariant pour les équations (4').

Jusqu'ici nous avons fait porter les changements de variables sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais nous avons conservé le temps t qui est notre variable indépendante. Nous allons supposer maintenant que l'on pose

$$t = \varphi(t_1)$$

et que nous prenions t_1 comme nouvelle variable indépendante.

Les équations (1) deviennent alors

$$(5) \qquad \frac{dx_i}{dt_1} = X'_i = X_i\frac{d\varphi}{dt_1} = X_i\frac{dt}{dt_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Si les équations (1) ont un invariant intégral d'ordre n : $\int M\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ on devra avoir

$$\sum \frac{d}{dx_i}(MX_i) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum \frac{d}{dx_i}\left(M\frac{dt_1}{dt}X'_i\right) = 0.$$

Cela montre que $\int M\frac{dt_1}{dt}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ est un invariant intégral pour les équations (5).

Pour que cette transformation puisse être utile, il faut que t et t_1 soient liés de telle sorte que $\frac{dt_1}{dt}$ puisse être regardé comme une fonction connue, finie, continue et uniforme de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons par exemple que nous prenions pour nouvelle variable indépendante :

$$x_n = t_1.$$

Il vient alors

$$\frac{dt_1}{dt} = X_n$$

et les équations (5) s'écrivent

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{X_1}{X_n}, \qquad \frac{dx_2}{dt_1} = \frac{X_2}{X_n}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_{n-1}}{dt_1} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \qquad \frac{dx_n}{dt_1} = 1,$$

et elles admettent comme invariant intégral :

$$\int MX_n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

De même si nous prenons pour nouvelle variable indépendante :

$$t_1 = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

Θ étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le nouvel invariant intégral s'écrira

$$\int M\left(\frac{d\Theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\Theta}{dx_2}X_2 + \ldots + \frac{d\Theta}{dx_n}X_n\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Il est à remarquer que la forme et la signification d'un invariant intégral sont beaucoup plus profondément modifiées quand on change la variable indépendante appelée temps que quand le changement de variables porte seulement sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car alors les lois du mouvement du point représentatif P se trouvent complètement transformées.

Supposons $n = 3$ et regardons x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. L'équation

$$\Theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentera une surface. Considérons une portion quelconque de cette surface et appelons S cette portion de surface.

Je supposerai qu'en tous les points de S on a

$$\frac{d\Theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\Theta}{dx_2}X_2 + \frac{d\Theta}{dx_3}X_3 > 0.$$

Il en résulte que la portion de surface S n'est tangente à aucune trajectoire. Je dirai alors que S est une surface sans contact.

Soit P_0 un point de S; par ce point passe une trajectoire. Si cette trajectoire

prolongée vient recouper S en un point P_1, je dirai que P_1 est le *conséquent* de P_0. A son tour P_1 peut avoir un conséquent P_2 que j'appellerai le *second conséquent* de P_0 et ainsi de suite.

Si l'on considère une courbe C tracée sur S, les $n^{\text{ièmes}}$ conséquents des divers points de cette courbe formeront une autre courbe C′ que j'appellerai la $n^{\text{ième}}$ *conséquente* de C. On définirait de la même façon l'aire qui est la $n^{\text{ième}}$ conséquente d'une aire donnée faisant partie de S.

Cela posé, soit une portion de surface sans contact S ayant pour équation $\Theta = 0$; soit C une courbe fermée tracée sur cette surface et limitant une aire A; soient C′ et A′ les premières conséquentes, C^n et A^n les $n^{\text{ièmes}}$ conséquentes de C et de A.

Par chacun des points de C passe une trajectoire que je prolonge depuis sa rencontre avec C jusqu'à sa rencontre avec C′. L'ensemble de ces trajectoires formera une surface trajectoire T.

Je considère le volume V limité par la surface trajectoire T et par les deux aires A et A′. Supposons qu'il y ait un invariant positif

$$J = \int M\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

J'étends cet invariant au volume V et j'écris que $\frac{dJ}{dt}$ est nul.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S. Menons la normale à cet élément, prenons sur cette normale une longueur infiniment petite dn. Soit $\Theta + \frac{d\Theta}{dn}\, dn$ la valeur de Θ à l'extrémité de cette longueur. Si l'on a mené la normale dans le sens des Θ croissants, on aura

$$\frac{d\Theta}{dn} > 0.$$

Posons

$$\frac{\frac{d\Theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\Theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\Theta}{dx_3} X_3}{\frac{d\Theta}{dn}} = H,$$

on aura alors

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{A'} MH\, d\omega - \int_{A} MH\, d\omega,$$

la première intégrale étant étendue à l'aire A′ et la seconde à l'aire A.

L'intégrale $\int MH\, d\omega$ conserve la même valeur qu'on l'étende à l'aire A, ou à A′, ou par conséquent à A^n. C'est donc un invariant intégral d'une nature

particulière qui conserve la même valeur pour une aire quelconque ou pour l'une de ses conséquentes.

Cet invariant est d'ailleurs positif, car par hypothèse, M, H et par conséquent MH sont positifs.

8. — Usage des invariants intégraux.

Ce qui fait l'intérêt des invariants intégraux, ce sont les théorèmes suivants dont nous ferons un fréquent usage.

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

C'est dans ce dernier sens que Poisson entendait la stabilité. Lorsqu'il a démontré que, si l'on tient compte des secondes puissances des masses, les grands axes des orbites demeurent invariables, il s'est seulement attaché à établir que les développements de ces grands axes en séries ne contiennent que des termes périodiques de la forme $\sin \alpha t$ ou $\cos \alpha t$, ou des termes mixtes de la forme $t \sin \alpha t$ ou $t \cos \alpha t$, sans contenir aucun terme séculaire de la forme t ou t^2. Cela ne signifie pas que les grands axes ne peuvent jamais dépasser une certaine valeur, car un terme mixte $t \cos \alpha t$ peut croître au delà de toute limite; cela veut dire seulement que les grands axes repasseront une infinité de fois par leur valeur primitive.

La stabilité, au sens de Poisson, peut-elle appartenir à toutes les solutions ? Poisson ne le croyait pas, car sa démonstration suppose expressément que les moyens mouvements ne sont pas commensurables; elle ne s'applique donc pas quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

L'existence des solutions asymptotiques, que nous établirons plus loin, montre suffisamment que si la position initiale du point P est convenablement choisie, ce point P ne repassera pas une infinité de fois aussi près que l'on voudra de cette position initiale.

Mais je me propose d'établir que, dans un des cas particuliers du problème des trois corps, on peut choisir la position initiale du point P (et cela d'une infinité de manières), de telle façon que ce point P repasse une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

En d'autres termes, il y aura une infinité de solutions particulières du problème qui ne jouiront pas de la stabilité au second sens du mot, c'est-à-dire au sens de Poisson; mais il y en aura une infinité qui en jouiront. J'ajouterai que les premières peuvent être regardées comme exceptionnelles et je chercherai plus loin à faire comprendre le sens précis que j'attache à ce mot.

Supposons $n = 3$ et imaginons que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point P dans l'espace.

Théorème I. — *Supposons que le point* P *reste à distance finie, et que le volume* $\int dx_1\, dx_2\, dx_3$ *soit un invariant intégral; si l'on considère une région* r_0 *quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.*

En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. J'appelle V le volume de cette région R.

Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles. Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps zéro la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc., au temps $n\tau$ une région r_n. Je puis supposer que τ est assez grand et r_0 assez petit pour que r_0 et r_1 n'aient aucun point commun.

Le volume étant un invariant intégral, ces diverses régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$ auront même volume v. Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume total serait plus grand que nv; mais d'autre part toutes ces régions sont intérieures à R, le volume total est donc plus petit que V. Si donc on a

$$n > \frac{V}{v},$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions $(q > p)$. Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune.

Plus généralement, si l'on ne pouvait trouver k régions ayant une partie commune, aucun point de l'espace ne pourrait appartenir à plus de $k - 1$ des

régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$. Le volume total occupé par ces régions serait donc plus grande que $\frac{nv}{k-1}$. Si donc on a

$$n > (k-1)\frac{V}{v},$$

il faut que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune. Soient $r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}$ ces régions. Alors $r_0, r_{p_2-p_1}, r_{p_3-p_1}, \ldots, r_{p_k-p_1}$ auront aussi une partie commune.

Mais reprenons la question à un autre point de vue. Par analogie avec la nomenclature du paragraphe précédent nous conviendrons de dire que la région r_n est la $n^{\text{ième}}$ conséquente de r_0 et que r_0 est la $n^{\text{ième}}$ antécédente de r_n.

Supposons alors que r_p soit la première des conséquentes successives de r_0 qui ait une partie commune avec r_0. Soit r'_0 cette partie commune; soit s'_0 la $p^{\text{ième}}$ antécédente de r'_0 qui fera aussi partie de r_0, puisque sa $p^{\text{ième}}$ conséquente fait partie de r_p.

Soit ensuite r'_{p_1} la première des conséquentes de r'_0 qui ait une partie commune avec r'_0; soit r''_0 cette partie commune; sa $(p_1)^{\text{ième}}$ antécédente fera partie de r'_0 et par conséquent de r_0, et sa $(p+p_1)^{\text{ième}}$ antécédente que j'appellerai s''_0 fera partie de s'_0 et par conséquent de r_0.

Ainsi s''_0 fera partie de r_0 ainsi que ses $p^{\text{ième}}$ et $(p+p_1)^{\text{ième}}$ conséquentes.

Et ainsi de suite.

Avec r''_0 nous formerons r'''_0 comme nous avons formé r''_0 avec r'_0 et r'_0 avec r_0; nous formerons ensuite $r^{\text{IV}}_0, \ldots, r^{n}_0, \ldots$

Je supposerai que la première des conséquentes successives de r^n_0 qui ait une partie commune avec r^n_0, soit celle d'ordre p_n.

J'appellerai s^n_0 l'antécédente d'ordre $p+p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}$ de r^n_0.

Alors s^n_0 fera partie de r_0 ainsi que ses n conséquentes d'ordre

$$p, \quad p+p_1, \quad p+p_1+p_2, \quad \ldots, \quad p+p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}.$$

De plus s^n_0 fera partie de s^{n-1}_0, s^{n-1}_0 de $s^{n-2}_0, \ldots$.

Il y aura alors des points qui appartiendront à la fois aux régions $r_0, s'_0, s''_0, \ldots, s^n_0, s^{n+1}_0, \ldots$. L'ensemble de ces points formera une région σ qui pourra d'ailleurs se réduire à un ou à plusieurs points.

Alors la région σ fera partie de r_0 ainsi que ses conséquentes d'ordre

$$p, \quad p+p_1, \quad \ldots \quad p+p_1+\ldots+p_n, \quad p+p_1+\ldots+p_n+p_{n+1}, \quad \ldots$$

En d'autres termes, toute trajectoire issue d'un des points de σ traversera une infinité de fois la région r_0. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.*

Cette expression n'ayant par elle-même aucun sens précis, je suis obligé d'abord d'en compléter la définition.

Nous conviendrons de dire que la probabilité pour que la position initiale du point mobile P appartienne à une certaine région r_0 est à la probabilité pour que cette position initiale appartienne à une autre région r'_0 dans le même rapport que le volume de r_0 au volume de r'_0.

Les probabilités étant ainsi définies, je me propose d'établir que la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est nulle, quelque grand que soit k et quelque petite que soit la région r_0. C'est là ce que j'entends quand je dis que les trajectoires qui ne traversent r_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles.

Je suppose que la position initiale du point P appartienne à r_0 et je me propose de calculer la probabilité pour que la trajectoire issue de ce point ne traverse pas $k+1$ fois la région r_0 depuis l'époque zéro jusqu'à l'époque $n\tau$.

Nous avons vu que si le volume v de r_0 est tel que $n > \frac{kV}{v}$, on pourra trouver $k+1$ régions que j'appellerai r_0, r_{α_1}, r_{α_2}, ..., r_{α_k} et qui auront une partie commune. Soit s_{α_k} cette partie commune, soit s_0 son antécédente d'ordre α_k; et désignons par s_p la $p^{\text{ième}}$ conséquente de s_0.

Je dis que si la position initiale du point P appartient à s_0, la trajectoire issue de ce point traversera $k+1$ fois au moins la région r_0 entre l'époque zéro et l'époque $n\tau$.

En effet, le point mobile qui décrit cette trajectoire se trouvera à l'époque zéro dans la région s_0, à l'époque $p\tau$ dans la région s_p, à l'époque $n\tau$ dans la région s_n. Il traversera donc nécessairement, entre les époques zéro et $n\tau$, les régions suivantes : s_0, $s_{\alpha_k-\alpha_{k-1}}$, $s_{\alpha_k-\alpha_{k-2}}$, ..., $s_{\alpha_k-\alpha_2}$, $s_{\alpha_k-\alpha_1}$, s_{α_k}. Or je dis que toutes ces régions font partie de r_0. En effet s_{α_k} fait partie de r_0 par définition; s_0 fait partie de r_0 parce que sa $(\alpha_k)^{\text{ième}}$ conséquente s_{α_k} fait partie de r_{α_k}, et en général $s_{\alpha_k-\alpha_i}$ fera partie de r_0 parce que sa $(\alpha_i)^{\text{ième}}$ conséquence s_{α_k} fait partie de r_{α_i}.

Donc le point mobile traversera $k+1$ fois au moins la région r_0.

C. Q. F. D.

Soit maintenant σ_0 la portion de r_0 qui n'appartient ni à s_0, ni à aucune région analogue, de telle façon que les trajectoires issues des divers points de σ_0 ne traversent pas la région r_0 au moins $k+1$ fois entre les époques zéro et $n\tau$. Soit w le volume de σ_0.

La probabilité cherchée, c'est-à-dire la probabilité pour que notre trajectoire ne traverse pas $k+1$ fois r_0 entre ces deux époques sera alors $\frac{w}{v}$.

Or par hypothèse aucune trajectoire issue de σ_0 ne traverse $k+1$ fois r_0 ni *a fortiori* σ_0 entre ces deux époques. On a donc

$$w = \frac{kV}{n},$$

et notre probabilité sera plus petite que $\frac{kV}{nv}$. Quelque grand que soit k, quelque petit que soit v, on pourra toujours prendre n assez grand pour que cette expression soit aussi petite que nous le voudrons. Donc il y a une probabilité nulle pour que notre trajectoire, que nous savons issue d'un point de r_0, ne traverse pas cette région plus de k fois depuis l'époque zéro jusqu'à l'époque $+\infty$. C. Q. F. D.

Extension du théorème I. — Nous avons supposé :

1° que $n=3$;

2° que le volume est un invariant intégral;

3° que le point P est assujetti à rester à distance finie.

Le théorème est encore vrai si le volume n'est pas un invariant intégral, pourvu qu'il existe un invariant positif quelconque $\int M\,dx_1\,dx_2\,dx_3$. Il est encore vrai si $n>3$, s'il existe un invariant positif $\int M\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, et si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coordonnées du point P dans l'espace à n dimensions, sont assujetties à rester finies.

Mais il y a plus. Supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne soient plus assujetties à rester finies, mais que l'invariant intégral positif $\int M\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ étendu à l'espace à n dimensions tout entier ait une valeur finie. Le théorème sera encore vrai.

Voici un cas qui se présentera plus fréquemment.

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

Si $F = \text{const.}$ est l'équation générale d'un système de surfaces fermées dans l'espace à n dimensions, si en d'autres termes F est une fonction uniforme qui devient infinie quand une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cesse d'être finie, il est clair que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resteront toujours finies, puisque F conserve une valeur constante finie; on se trouve donc dans les conditions de l'énoncé du théorème.

Mais supposons que les surfaces $F = \text{const.}$ ne soient pas fermées; il pourra se faire néanmoins que l'invariant intégral positif $\int M\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ étendu à tous les systèmes de valeurs des x tels que

$$C_1 < F < C_2$$

ait une valeur finie; le théorème sera encore vrai.

C'est ce qui arrive en particulier dans le cas suivant.

M. Hill dans sa théorie de la Lune a négligé dans une première approximation la parallaxe du Soleil, l'excentricité du Soleil et l'inclinaison des orbites; il est ainsi arrivé aux équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = 2n'y' - x\left[\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 3n'^2\right],$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2n'x' - \frac{\mu y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

qui admettent l'intégrale

$$F = \frac{x'^2+y'^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3}{2}n'^2x^2 = \text{const.}$$

et l'invariant intégral $\int dx\, dy\, dx'\, dy'$.

Si l'on regarde x, y, x' et y' comme les coordonnées d'un point dans l'espace à quatre dimensions, l'équation $F = \text{const.}$ représente un système de surfaces qui ne sont pas fermées. Mais l'invariant intégral étendu à tous les points compris entre deux de ces surfaces est fini, comme nous allons le montrer.

Le théorème I est donc encore vrai; c'est-à-dire qu'il existe des trajectoires qui traversent une infinité de fois toute région de l'espace à quatre dimensions, quelque petite que soit cette région.

Soit donc à calculer l'intégrale quadruple

$$J = \int dx\, dy\, dx'\, dy',$$

cette intégrale étant étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$C_1 < F < C_2.$$

Changeons de variables et transformons notre intégrale quadruple, en posant

$$x' = \cos\varphi\sqrt{2r}, \qquad y' = \sin\varphi\sqrt{2r},$$
$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega;$$

cette intégrale devient

$$J = \int \rho\, d\rho\, dr\, d\omega\, d\varphi,$$

et il vient d'autre part

$$F = r - \frac{\mu}{\rho} - \frac{3}{2}n'^2\rho^2\cos^2\omega.$$

Nous devons intégrer d'abord par rapport à φ entre les limites zéro et 2π, ce qui donne

$$J = 2\pi\int \rho\, d\rho\, dr\, d\omega,$$

et l'intégration doit être étendue à tous les systèmes de valeurs de ρ, r et ω qui satisfont aux inégalités

$$(1) \qquad r > 0, \qquad r > C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2}n'^2\rho^2\cos^2\omega, \qquad r < C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2}n'^2\rho^2\cos^2\omega.$$

De ces inégalités on peut déduire la suivante :

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2}n'^2\rho^2\cos^2\omega > 0.$$

Regardons ρ et ω comme les coordonnées polaires d'un point et construisons la courbe

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2}n'^2\rho^2\cos^2\omega = 0.$$

Nous verrons que si C_2 est plus petit que $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$ cette courbe se compose d'une ovale fermée située tout entière à l'intérieur du cercle

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{3n'^2}}$$

et de deux branches infinies situées tout entières à l'extérieur de ce cercle.

Le lecteur fera facilement cette construction; s'il y éprouvait quelque

difficulté, je le renverrais au Mémoire original de M. Hill dans le Tome I de l'*American Journal of Mathematics*.

M. Hill conclut de là que si le point ρ, ω est à l'origine des temps à l'intérieur de cette ovale fermée, il y restera toujours; que par conséquent ρ restera toujours plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$. Ainsi si l'on négligeait la parallaxe du Soleil, son excentricité et les inclinaisons, il serait permis d'assigner une limite supérieure au rayon vecteur de la Lune. En ce qui concerne la Lune, en effet, la constante C_2 est plus petite que $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$.

C'est ce remarquable résultat de M. Hill que je me propose de compléter en montrant que, dans ces conditions, la Lune jouirait également de la stabilité au sens de Poisson; je veux dire par là que, si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles, la Lune repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position primitive. C'est pour cela, comme je l'ai expliqué plus haut, que je me propose de démontrer que l'intégrale J est finie.

Comme ρ est plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$ et par conséquent limité, l'intégrale

$$J = 2\pi \int \rho \, d\rho \, dr \, d\omega$$

ne peut devenir infinie que si r croît indéfiniment, et r ne peut devenir infini, en vertu des inégalités (1), que si ρ s'annule.

Posons donc

$$J = J' + J'',$$

J' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$(2) \qquad r > 0, \qquad \rho > \rho_0, \qquad C_1 < F < C_2,$$

et J'' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$(3) \qquad r > 0, \qquad \rho < \rho_0, \qquad C_1 < F < C_2.$$

Quand les inégalités (2) sont satisfaites ρ ne peut s'annuler; donc r ne peut devenir infini. Donc la première intégrale J' est finie.

Examinons maintenant J''. Je puis supposer que ρ_0 a été pris assez petit pour que

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho_0} > 0.$$

Les inégalités $F > C_1$, $\rho < \rho_0$ entraînent alors $r > 0$. Nous devons donc intégrer par rapport à r entre les limites

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega \quad \text{et} \quad C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega.$$

Il vient alors

$$J'' = 2\pi (C_2 - C_1) \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho_0} \rho \, d\rho = 2\pi^2 \rho_0^2 (C_2 - C_1).$$

J'' et par conséquent J est donc fini. C. Q. F. D.

M. Bohlin a généralisé de la manière suivante le résultat de M. Hill. Considérons le cas particulier suivant du problème des trois corps. Soit A un corps de masse $1 - \mu$, B un corps de masse μ et C un corps de masse infiniment petite. Imaginons que les deux corps A et B (dont le mouvement doit être képlerien, puisqu'il n'est pas troublé par la masse de C) décrivent autour de leur centre de gravité commun supposé fixe deux circonférences concentriques, et que C se meuve dans le plan de ces deux circonférences. Je prendrai pour unité de longueur la distance constante AB, de telle façon que les rayons de ces deux circonférences soient $1 - \mu$ et μ. Je supposerai que l'unité de temps ait été choisie de telle sorte que la vitesse angulaire des deux points A et B sur leurs circonférences soit égale à 1 (ou ce qui revient au même que la constante de Gauss soit égale à 1).

Choisissons alors deux axes mobiles ayant leur origine au centre de gravité des deux masses A et B; le premier de ces axes sera la droite AB, et le second sera perpendiculaire au premier.

Les coordonnées de A par rapport à ces deux axes sont $-\mu$ et zéro, celles de B sont $1 - \mu$ et zéro; quant à celles de C je les appelle x et y; j'ai alors pour les équations du mouvement :

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = 2y' + \frac{dV}{dx} + x,$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2x' + \frac{dV}{dy} + y,$$

en posant

$$V = \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC}.$$

On a d'ailleurs

$$\overline{AC}^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \qquad \overline{BC}^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2.$$

Ces équations admettent une intégrale

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - V - \frac{x^2 + y^2}{2} = K,$$

et un invariant intégral

$$J = \int dx\, dy\, dx'\, dy'.$$

M. Bohlin, dans le Tome 10 des *Acta Mathematica*, a généralisé le résultat de M. Hill, en montrant que si la constante K a une valeur convenable (ce que nous supposerons) et si les valeurs initiales de x et de y sont assez petites, ces quantités x et y resteront limitées.

Je me propose maintenant de montrer que l'intégrale J étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$K_1 < F < K_2$$

est finie; d'où nous pourrons conclure, comme nous l'avons fait plus haut, que la stabilité au sens de Poisson subsiste encore dans ce cas.

Si les constantes K_1 et K_2 sont convenablement choisies, le théorème de M. Bohlin montre que x et y seront limités. Quant à x' et y' ils ne pourront devenir infinis que si V devient infini, c'est-à-dire si AC s'annule, ou si BC s'annule.

Posons alors

$$J = J' + J'' + J''',$$

l'intégrale J′ étant étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$K_1 < F < K_2, \qquad \overline{AC}^2 > \rho_0^2, \qquad \overline{BC}^2 > \rho_0^2 \qquad \left(\rho_0 < \frac{1}{2}\right),$$

l'intégrale J″ à tous les systèmes de valeurs tels que

$$K_1 < F < K_2, \qquad \overline{AC}^2 < \rho_0^2 \qquad \left(\text{d'où } \overline{BC}^2 > \rho_0^2\right),$$

et l'intégrale J‴ à tous les systèmes de valeurs tels que

$$K_1 < F < K_2, \qquad \overline{BC}^2 < \rho_0^2 \qquad \left(\text{d'où } \overline{AC}^2 > \rho_0^2\right).$$

Comme pour aucun des systèmes de valeurs auxquels l'intégrale J′ est étendue, AC ou BC ne s'annule, cette intégrale J′ est finie.

Examinons maintenant l'intégrale J″. Je puis supposer que ρ_0 ait été choisi assez petit pour que

$$\frac{1-\mu}{\rho_0} + K_1 > 0, \qquad \frac{\mu}{\rho_0} + K_1 > 0.$$

Dans ce cas $\frac{x'^2 + y'^2}{2}$ peut varier entre les limites

$$L_1 = K_1 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{2}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad K_2 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{x^2+y^2}{2} = L_2,$$

car la plus petite de ces deux limites est positive.

Posons alors comme plus haut :

$$x' = \sqrt{2r}\cos\varphi, \qquad y' = \sqrt{2r}\sin\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad r = \frac{x'^2 + y'^2}{2};$$

l'intégrale deviendra

$$J'' = \int dx\, dy\, dr\, d\varphi,$$

et l'on devra intégrer par rapport à φ entre les limites zéro et 2π et par rapport à r entre les limites L_1 et L_2; il viendra donc

$$J'' = 2\pi(K_2 - K_1)\int dx\, dy.$$

L'intégrale double $\int dx\, dy$ devra être étendue à tous les systèmes de valeurs tels que $\overline{AC}^2 < \rho_0^2$; elle est donc égale à $\pi\rho_0^2$; de sorte qu'il vient

$$J'' = 2\pi^2\rho_0^2(K_2 - K_1).$$

J'' est donc fini, et il en est de même de J''' et de J. C. Q. F. D.

Nous devons donc conclure que (si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles au sens donné à ce mot dans le corollaire du théorème I) le troisième corps C repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

Dans le cas général du problème des trois corps, on ne peut plus affirmer qu'il en sera encore de même.

Théorème II. — *Si $n = 3$ et que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et s'il y a invariant positif, il ne peut pas y avoir de surface* fermée *sans contact.*

Soit, en effet,

$$J = \int M\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

un invariant intégral positif. Supposons qu'il existe une surface S fermée et sans contact, ayant pour équation

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Soit V le volume limité par cette surface; nous étendrons l'invariant J à ce volume tout entier.

La surface S étant sans contact, l'expression

$$\frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \frac{dF}{dx_3}X_3$$

ne pourra s'annuler et par conséquent changer de signe; nous la supposerons positive pour fixer les idées.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S; menons la normale à cet élément du côté des F croissants; prenons sur cette normale un segment infiniment petit dn. Soit $\frac{dF}{dn}dn$ la valeur de F à l'extrémité de ce segment. On aura

$$\frac{dF}{dn} > 0.$$

J étant un invariant, on devrait avoir

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Mais nous trouvons

$$\frac{dJ}{dt} = \int M \frac{\frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \frac{dF}{dx_3}X_3}{\frac{dF}{dn}} d\omega.$$

L'intégrale du second membre, étendue à toute la surface S, est positive, puisque la fonction sous le signe $\int$ est toujours positive.

Nous arrivons donc à deux résultats contradictoires et nous devons conclure qu'il ne peut exister de surface fermée sans contact.

Extension du théorème II. — Il est facile d'étendre ce théorème au cas de $n > 3$; il suffit pour cela, puisque la représentation géométrique n'est plus possible, de la traduire dans le langage analytique et de dire :

S'il y a un invariant intégral positif, il ne peut pas exister une fonction uniforme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *qui soit positive, qui devienne infinie toutes les fois que l'un des* x *cesse d'être fini et qui soit telle que*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}X_n$$

soit toujours de même signe quand F *est nul.*

Pour faire comprendre l'importance de ce théorème, je me bornerai à faire observer que c'est une généralisation de celui dont je me suis servi pour démontrer la légitimité de la belle méthode de M. Lindstedt.

Je préfère toutefois, au point de vue des applications ultérieures, lui donner une forme un peu différente en y introduisant une notion nouvelle, celle des courbes invariantes.

Nous avons à la fin du paragraphe précédent envisagé une portion de surface S, définie par l'équation

$$\Theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

et telle que l'on ait pour tous les points de S :

$$\frac{d\Theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\Theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\Theta}{dx_3} X_3 > 0,$$

de telle sorte que S soit une portion de surface sans contact.

Nous avons défini ensuite ce qu'on doit entendre par le $n^{\text{ième}}$ conséquent d'un point de S ou par la $n^{\text{ième}}$ conséquente d'une courbe ou d'une aire appartenant à S. J'entends maintenant et j'entendrai désormais le mot conséquent, dans le sens du paragraphe précédent, et non dans le sens employé plus haut dans la démonstration du théorème I.

Nous avons vu que s'il existe un invariant positif $\iiint M\, dx_1\, dx_2\, dx_3$, il existe également une autre intégrale $\int MH\, d\omega$ que l'on doit étendre à tous les éléments $d\omega$ d'une aire appartenant à S et qui jouit des propriétés suivantes :

1° La quantité sous le signe $\int$, MH est toujours posisive.

2° L'intégrale a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à S et pour toutes celles de ses conséquentes qui existent.

Cela posé, j'appellerai *courbe invariante* du $n^{\text{ième}}$ ordre, toute courbe tracée sur S et qui coïncidera avec sa $n^{\text{ième}}$ conséquente.

Dans la plupart des questions de Dynamique il entre certains paramètres très petits, de sorte qu'on est naturellement conduit à développer les solutions suivant les puissances croissantes de ces paramètres. Telles sont les masses en Mécanique céleste.

Nous imaginerons donc que nos équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

dépendent d'un paramètre μ. Nous supposerons que X_1, X_2, X_3 sont des fonctions données de x_1, x_2, x_3 et μ, susceptibles d'être développées selon les puissances croissantes de μ, et que μ est très petit.

Considérons alors une fonction quelconque de μ; je suppose que cette fonction tende vers zéro quand μ tend vers zéro, de telle façon que le rapport

de cette fonction à μ^n tende vers une limite finie. Je dirai que cette fonction de μ est une quantité très petite du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Il importe de remarquer qu'il n'est pas nécessaire que cette fonction de μ soit susceptible d'être développée suivant les puissances de μ.

Cela posé, soient A_0 et B_0 deux points d'une surface sans contact S, et soient A_1 et B_1 leurs conséquents. Si la position de A_0 et B_0 dépend de μ suivant une loi quelconque il en sera de même de la position de A_1 et B_1. Je me propose de démontrer les lemmes suivants :

Lemme I. — *Si l'on envisage une portion de surface sans contact* S, *passant par le point* a_0, b_0, c_0; *si* x_0, y_0, z_0 *sont les coordonnées d'un point de* S *et si* x_1, y_1, z_1 *sont les coordonnées de son conséquent, on pourra développer* x_1, y_1, z_1 *suivant les puissances de* $x_0 - a_0$, $y_0 - b_0$, $z_0 - c_0$ *et* μ *pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.*

Je puis toujours prendre pour origine le point a_0, b_0, c_0 de telle façon que

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0.$$

Si alors

$$z = \varphi(x, y)$$

est l'équation de la surface S, cette surface passera par l'origine O et l'on aura

$$\varphi(0, 0) = 0.$$

Je supposerai de plus qu'en tous les points de la portion de surface S envisagée la fonction $\varphi(x, y)$ est holomorphe. Par l'origine O passe une trajectoire; imaginons que quand $\mu = 0$ cette trajectoire vienne au temps $t = \tau$ recouper la surface S en un point P dont les coordonnées seront :

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

D'après la terminologie que nous avons adoptée, le point P sera *quand on suppose* $\mu = 0$ le conséquent du point O.

Soit maintenant x_0, y_0, z_0 un point A très voisin de O et appartenant à la surface S. Si l'on fait passer par ce point A une trajectoire, si l'on suppose que μ cesse d'être nul, mais reste très petit, on verra que cette trajectoire viendra, à une époque t très peu différente de τ, couper la surface S en un point B très voisin de P.

Ce point B dont j'appellerai les coordonnées x_1, y_1, z_1 sera d'après notre terminologie le conséquent du point A.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que x_1, y_1, z_1 peuvent se développer suivant les puissances croissantes de x_0, y_0, z_0 et μ.

En effet, d'après le théorème III (§ 2), si x, y, z sont les coordonnées au temps t du point mobile qui décrit la trajectoire issue du point A, si de plus x_0, y_0, z_0, μ et $t-\tau$ sont suffisamment petits, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \psi_1(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ y = \psi_2(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ z = \psi_3(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \end{cases}$$

ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t-\tau$, μ, x_0, y_0, z_0.

Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x-a$ et $y-b$, si $x-a$ et $y-b$ sont assez petits, nous aurons également

$$\varphi(x, y) = \psi_4(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$

ψ_4 étant une série de même forme que ψ_1, ψ_2 et ψ_3.

Écrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S, nous aurons

$$(5)\qquad \psi_3 = \psi_4.$$

La relation (5) peut être regardée comme une équation entre $t-\tau$, μ, x_0, y_0 et z_0 et l'on peut chercher à la résoudre par rapport à $t-\tau$.

Pour

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

cette relation est satisfaite, car on a

$$\psi_3 = \psi_4 = 0.$$

D'après un théorème de Cauchy, que nous avons démontré dans un des paragraphes qui précèdent, on pourra tirer de la relation (5) $t-\tau$ sous la forme suivante :

$$(6)\qquad t-\tau = \theta(\mu, x_0, y_0, z_0),$$

θ étant une série ordonnée suivant les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

Il n'y aurait d'exception que si pour

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

on avait

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \frac{d\psi_4}{dt}.$$

Or cette équation exprime que la trajectoire issue du point O pour $\mu = 0$ va *toucher* la surface S au point P.

Mais il n'en sera pas ainsi, parce que nous supposerons toujours que S est une surface ou une portion de surface sans contact.

Dans les équations (4) remplaçons $t - \tau$ par 0 et x, y, z par x_1, y_1, z_1; il viendra

$$x_1 = \Theta_1(\mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y_1 = \Theta_2(\mu, x_0, y_0, z_0), \qquad z_1 = \Theta_3(\mu, x_0, y_0, z_0),$$

Θ_1, Θ_2 et Θ_3 étant des séries développées selon les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Si la distance de deux points* A_0 *et* B_0 *appartenant à la portion de surface sans contact* S *est une quantité très petite d'ordre n, il en sera de même de la distance de leurs conséquents* A_1 *et* B_1.

Soient en effet a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point fixe P_0 de S très voisin de A_0 et de B_0; a'_1, a'_2, a'_3 les coordonnées de son conséquent P_1.

Soient x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; y_1, y_2, y_3; y'_1, y'_2, y'_3 les coordonnées de A_0, A_1, B_0 et B_1.

D'après le lemme I, $x'_1 - a'_1$, $x'_2 - a'_2$, $x'_3 - a'_3$ peuvent se développer selon les puissances croissantes de $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$ et μ.

L'expression de $y'_1 - a'_1$, $y'_2 - a'_2$, $y'_3 - a'_3$ en fonctions de $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2$, $y_3 - a_3$ et μ sera évidemment la même que celle de $x'_1 - a'_1$, $x'_2 - a'_2$, $x'_3 - a'_3$ en fonctions de $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$ et μ.

On déduit de là que l'on peut écrire

$$(7) \qquad \begin{cases} x'_1 - y'_1 = (x_1 - y_1)\,F_1 + (x_2 - y_2)\,F_2 + (x_3 - y_3)\,F_3, \\ x'_2 - y'_2 = (x_1 - y_1)\,F'_1 + (x_2 - y_2)\,F'_2 + (x_3 - y_3)\,F'_3, \\ x'_3 - y'_3 = (x_1 - y_1)\,F''_1 + (x_2 - y_2)\,F''_2 + (x_3 - y_3)\,F''_3, \end{cases}$$

les F étant des séries développées suivant les puissances de

$$\mu, \quad x_1 - a_1, \quad x_2 - a_2, \quad x_3 - a_3, \quad y_1 - a_1, \quad y_2 - a_2, \quad y_3 - a_3.$$

Les quantités F_1, F_2, etc. sont finies; si donc $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ et $x_3 - y_3$ sont des quantités très petites d'ordre n, il en sera de même de $x'_1 - y'_1$, $x'_2 - y'_2$, $x'_3 - y'_3$. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Soit* A_1AMB_1B *une courbe invariante, de telle façon que* A_1 *et* B_1 *soient les conséquents de* A *et* B.

Je suppose que les arcs AA_1 *et* BB_1 *soient très petits* (c'est-à-dire tendent vers zéro avec μ) *mais que leur courbure soit finie.*

Je suppose que cette courbe invariante et la position des points A *et* B *dépendent de* μ *suivant une loi quelconque. Je suppose qu'il existe un invariant intégral positif. Si la distance* AB *est très petite du* $n^{\text{ième}}$ *ordre et que la distance* AA_1 *ne soit pas très petite du* $n^{\text{ième}}$ *ordre, l'arc* AA_1 *coupe l'arc* BB_1.

Je puis toujours joindre les points A et B par un arc de courbe AB situé tout entier sur la portion de surface sans contact S et dont la longueur totale soit du même ordre de grandeur que la distance AB, c'est-à-dire une quantité très petite du $n^{\text{ième}}$ ordre. Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB, il sera aussi très petit du $n^{\text{ième}}$ ordre d'après le lemme II.

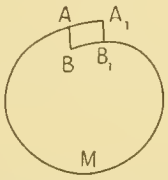

Fig. 1.

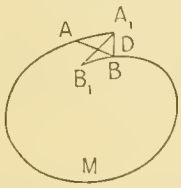

Fig. 2.

Voici maintenant les diverses hypothèses que l'on peut concevoir :

Première hypothèse. — Les deux arcs AA_1 et BB_1 se coupent. Je me propose d'établir que c'est cette hypothèse qui est réalisée.

Deuxième hypothèse. — Le quadrilatère curviligne AA_1B_1B est tel que les quatre arcs qui lui servent de côtés n'ont d'autre point commun que les quatre sommets A, A_1 B et B_1. C'est le cas de la figure 1.

Troisième hypothèse. — Les deux arcs AB et A_1B_1 se coupent en un point D. C'est le cas de la figure 2.

Quatrième hypothèse. — L'un des arcs AB ou A_1B_1 coupe l'un des arcs AA_1 ou BB_1; mais les arcs AA_1 et BB_1 ne se coupent pas, non plus que les deux arcs AB et A_1B_1.

S'il y a un invariant positif, il existera d'après le paragraphe précédent une certaine intégrale $\int MH\,d\omega$ dont tous les éléments seront positifs et qui devra avoir la même valeur pour l'aire ABB_1MA et pour sa conséquente AA_1B_1MA.

Cette intégrale étendue à l'aire

$$ABA_1B_1 = AA_1B_1MA - ABB_1MA$$

doit donc être nulle et comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, la disposition ne peut être celle de la figure 1 où l'aire ABA_1B_1 est convexe.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

La disposition ne peut non plus être celle de la figure 2.

En effet, dans le triangle ADA_1, les distances AD et A_1D sont très petites du $n^{\text{ième}}$ ordre car elles sont plus petites que les arcs AD et A_1D, lesquels sont plus petits que les arcs AB et A_1B_1 qui sont du $n^{\text{ième}}$ ordre. De plus on a

$$AA_1 < AD + A_1D.$$

La distance AA_1 devrait donc être une quantité très petite du $n^{\text{ième}}$ ordre, ce qui est contraire à l'énoncé du théorème.

La troisième hypothèse doit donc être rejetée.

Je dis que la quatrième hypothèse ne peut non plus être acceptée. Supposons en effet par exemple que l'arc AB coupe l'arc AA_1 en un point A'. Soit ANA_1 la portion de l'arc AB qui va de A en A'; soit APA' la portion de l'arc AA_1 qui va de A en A'.

Je dis qu'on pourra remplacer l'arc ANA'B par l'arc APA'B; et que le nouvel arc APA'B sera comme l'arc primitif ANA'B une quantité très petite du $n^{\text{ième}}$ ordre.

En effet l'arc ANA' est plus petit que AB, il est donc du $n^{\text{ième}}$ ordre; la distance AA' est donc elle-même du $n^{\text{ième}}$ ordre; l'arc APA' est plus petit que AA_1 qui est très petit, c'est-à-dire qui tend vers zéro avec μ; l'arc APA' est donc très petit et sa courbure est finie; on peut donc assigner une limite au rapport de l'arc APA' à sa corde AA'; ce rapport est fini et AA' est du $n^{\text{ième}}$ ordre; donc APA' est du $n^{\text{ième}}$ ordre. C. Q. F. D.

D'ailleurs le nouvel arc APA'B ne coupe plus l'arc AA_1, il a seulement avec lui une partie commune APA'.

On retombe donc sur la deuxième hypothèse qui a déjà été rejetée.

La première hypothèse est donc seule acceptable et le théorème est démontré.

Remarque. — Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème que les arcs AA_1 et BB_1 sont très petits et que leur courbure est finie. En réalité nous ne nous sommes servis de cette hypothèse que pour montrer que si la corde AA' est très petite du $n^{\text{ième}}$ ordre, il en est de même de l'arc APA'.

Le théorème sera donc encore vrai quand même l'arc AA_1 ne serait pas très petit et sa courbure finie, pourvu qu'on puisse assigner une limite supérieure au rapport d'un arc quelconque (faisant partie de AA_1 ou de BB_1) à sa corde.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES.

9. Existence des solutions périodiques.

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ. Les X pourront aussi dépendre de t, mais ce seront alors des fonctions périodiques de cette variable et la période sera 2π.

Supposons que pour la valeur zéro du paramètre μ, ces équations admettent une solution périodique, de telle sorte que

$$x_i = \varphi_i(t),$$

φ_i étant une fonction périodique du temps dont la période sera par exemple 2π.

Posons

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

et cherchons pour les valeurs très petites de μ à trouver les valeurs des ξ que nous supposerons également très petites, il viendra

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \mu \frac{dX_i}{d\mu} + \sum_k \xi_k \frac{dX_i}{dx_k}.$$

Dans les dérivées partielles des X les x_i sont remplacés par les fonctions périodiques φ_i. Les ξ sont ainsi déterminés par des équations linéaires à second membre dont les coefficients sont des fonctions périodiques.

Deux cas peuvent se présenter.

1° Les équations sans second membre :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Sigma \xi_k \frac{dX_i}{dx_k} \tag{2}$$

n'admettent pas de solution périodique de période 2π.

Dans ce cas les équations à second membre en admettent une que j'écrirai

$$\xi_i = \mu\psi_i(t),$$

ψ étant une fonction périodique de période 2π.

2° Les équations sans second membre admettent une solution de période 2π.

Alors les équations à second membre peuvent ne pas avoir de solution périodique, de telle façon qu'en général nous trouverons une solution de la forme suivante :

$$\xi_i = \mu t \psi_{1.i}(t) + \mu \psi_{0.i}(t),$$

les ψ tant toujours des fonctions périodiques, ou même dans certains cas

$$\xi_i = \mu[t^n \psi_{n.i}(t) + t^{n-1}\psi_{n-1.i}(t) + \ldots + \psi_{0.i}(t)].$$

Plaçons-nous dans le premier cas et voyons la chose de plus près.

Cherchons à former une solution périodique et à la développer suivant les puissances de μ; posons par conséquent :

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1.i} + \mu^2\varphi_{2.i} + \ldots.$$

Quand on substituera à la place des x_i ces valeurs dans les X_i, on trouvera

$$X_i = X_{0.i} + \mu X_{1.i} + \mu^2 X_{2.i} + \ldots.$$

Il est clair que les $X_{0.i}$ ne dépendent que des φ_i, les $X_{1.i}$ des φ_i et des $\varphi_{1.i}$, les $X_{2.i}$ des $\varphi_{1.i}$ et des $\varphi_{2.i}$, etc. De plus si les $\varphi_{n.i}$ sont des fonctions périodiques de t de période 2π, il en sera de même des $X_{n.i}$.

Nous avons de plus

$$X_{n.i} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n.k} + Y_{n.i}.$$

Dans le second membre, dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, on doit substituer les φ_i à la place des x_i ainsi que nous l'avons fait plus haut. De plus $Y_{n.i}$ ne dépendra que des φ_i, des $\varphi_{1.i}$, des $\varphi_{2.i}$, ..., des $\varphi_{n-1.i}$; mais ne dépendra plus des $\varphi_{n.i}$.

Cela posé on est conduit aux équations suivantes :

$$\frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n.k} + Y_{n.i}. \tag{3}$$

Supposons qu'on ait déterminé les quantités $\varphi_{1.i}, \varphi_{2.i}, \ldots, \varphi_{n-1.i}$ à l'aide des équations précédentes sous forme de fonctions périodiques de t; on pourra ensuite à l'aide des équations (3) déterminer les $\varphi_{n.i}$.

Ces équations (3) sont des équations linéaires à second membre et les coefficients sont périodiques.

Par hypothèse les équations sans second membre

$$\frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n.k},$$

qui ne sont autres que les équations (2), n'ont pas de solution périodique; donc les équations (3) en admettent une.

Il résulte de là qu'il existe des séries

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1,i} + \mu^2\varphi_{2,i} + \ldots$$

dont les coefficients sont périodiques et qui satisfont formellement aux équations (1).

Il resterait à démontrer la convergence de ces séries. Nul doute que cette démonstration ne puisse se faire directement; je ne le ferai pas toutefois, car je vais, en reprenant la question à un point de vue différent, démontrer rigoureusement l'existence des solutions périodiques, ce qui entraîne la convergence de nos séries. Nous n'aurons en effet qu'à nous appuyer sur les principes les plus connus du « calcul des limites ».

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$. Soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = 2\pi$. Les γ_i dépendront évidemment de μ et des valeurs initiales des variables et elles s'annuleront avec elles.

Cela me permet d'écrire

$$\gamma_i = \beta_i + a_i\mu + \Sigma b_{ik}\beta_k + \Sigma[m, p_1, p_2, \ldots, p_n]\mu^m \beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\ldots\beta_n^{p_n} = \beta_i + \psi_i,$$

les a, les b et les $[m, p_1, p_2, \ldots, p_n]$ étant des coefficients constants.

On obtiendra les solutions périodiques de période 2π en cherchant les cas où $\gamma_i = \beta_i$. On peut donc considérer μ comme une donnée de la question et chercher à résoudre par rapport aux n inconnues β les équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{4}$$

Nous savons que les ψ sont des fonctions holomorphes de μ et des β s'annulant avec les variables. (*Voir* théorème III, § 2.)

Si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β (c'est-à-dire le déterminant des b_{ik}) n'est pas nul, on peut résoudre ces n équations et l'on trouve comme solution

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant, d'après un théorème bien connu, des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ. (*Voir* théorème IV, § 2.)

C'est le cas que nous avons étudié plus haut et où les équations (2) n'ont pas de solution périodique.

On doit en conclure que pour les valeurs de μ suffisamment petites, les équations (1) admettent une solution périodique.

Supposons maintenant que le déterminant fonctionnel des ψ soit nul; nous pourrons alors, en vertu du théorème VI (§ 2), éliminer entre les équations (4) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$; nous arriverions ainsi à une équation unique $\Phi = 0$ dont le premier membre sera développé suivant les puissances de μ et de β_n.

Il n'y aurait d'exception que si les équations (4) n'étaient pas distinctes; mais dans ce cas nous leur adjoindrions une autre équation choisie arbitrairement.

Si l'on regarde μ et β_n comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation $\Phi = 0$ représente une courbe passant par l'origine. A chacun des points de cette courbe correspondra une solution périodique, de sorte que pour étudier les solutions périodiques qui correspondent aux petites valeurs de μ et des β, il nous suffira de construire la partie de cette courbe qui avoisine l'origine.

Si le déterminant fonctionnel des ψ est nul, on aura (pour $\mu = \beta_n = 0$) :

$$\frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes, la courbe $\Phi = 0$ sera tangente à l'origine à la droite $\mu = 0$, ou bien encore pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ sera une équation en β_n qui admettra zéro comme racine multiple; j'appelle m l'ordre de multiplicité de cette racine.

En vertu du théorème V (§ 2) on pourra trouver m séries développées suivant les puissances fractionnaires et positives de μ, s'annulant avec μ et qui substituées à la place de β_n satisfassent à l'équation $\Phi = 0$.

Considérons l'intersection de la courbe $\Phi = 0$ ou plutôt de la portion de cette courbe qui avoisine l'origine avec deux droites $\mu = \varepsilon$, $\mu = -\varepsilon$ très voisines de la droite $\mu = 0$. On obtiendra les points d'intersection en faisant $\mu = \varepsilon$, puis $\mu = -\varepsilon$ dans les m séries dont je viens de parler.

Soit m_1 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = +\varepsilon$ réels et voisins de l'origine. Soit m_2 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = -\varepsilon$ réels et voisins de l'origine.

Les trois nombres m, m_1 et m_2 seront de même parité.

Si donc m est impair, m_1 et m_2 seront au moins égaux à 1. Donc il existera des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ, tant positives que négatives.

Comment une solution périodique peut-elle disparaître quand on fait varier μ

d'une manière continue? Comment peut-il se faire que le nombre des solutions pour $\mu = +\varepsilon$ soit plus petit que pour $\mu = -\varepsilon$, que $m_1 < m_2$?

J'observe d'abord qu'une solution périodique ne peut disparaître quand μ passe de la valeur $-\varepsilon$ à la valeur $+\varepsilon$ que si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ admet une racine multiple; en d'autres termes *une solution périodique ne peut disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique*. De plus m_1 et m_2 étant de même parité, la différence $m_2 - m_1$ est toujours paire.

Donc les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.

Un cas particulier intéressant est celui où pour $\mu = 0$, les équations différentielles (1) admettent une infinité de solutions périodiques que j'écrirai

$$x_1 = \varphi_1(t, h), \qquad x_2 = \varphi_2(t, h), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t, h),$$

h étant une constante arbitraire.

Dans ce cas les équations (4) ne sont plus distinctes pour $\mu = 0$ et Φ contient μ en facteur, de sorte que nous pouvons poser

$$\Phi = \mu\Phi_1,$$

Φ_1 étant holomorphe en β_n et μ; d'ailleurs Φ_1 dépendra aussi de h. La courbe $\Phi = 0$ se décompose alors en deux autres, à savoir la droite $\mu = 0$ et la courbe $\Phi_1 = 0$; c'est cette dernière courbe qu'il convient d'étudier.

La courbe $\Phi = 0$ passe forcément par l'origine; il n'en est pas toujours de même de $\Phi_1 = 0$; il faudra d'abord s'arranger pour l'y faire passer, en disposant convenablement de h. Une fois qu'on l'y aura fait passer, on l'étudiera comme on a fait de la courbe $\Phi = 0$.

Si pour $\mu = \beta_n = 0$, $\frac{d\Phi_1}{d\beta_n}$ n'est pas nul (ou plus généralement si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi_1 = 0$ admet $\beta_n = 0$ comme racine multiple d'ordre *impair*), il y aura encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

Il arrivera souvent que, même avant l'élimination, quelques-unes des fonctions ψ_i contiennent μ en facteur. Dans ce cas on commencerait par diviser par μ les équations correspondantes.

Si les équations (1) admettent une intégrale uniforme

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

les équations (4) ne seront pas distinctes à moins que l'on n'ait à la fois

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

pour

$$x_1 = \varphi_1(0), \qquad x_2 = \varphi_2(0), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(0).$$

En effet il viendra identiquement

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i] = F[\varphi_i(0) + \beta_i].$$

Si par exemple pour $x_i = \varphi_i(0)$, $\frac{dF}{dx_1}$ n'est pas nul; on pourra tirer de cette équation :

$$\psi_1 = \psi_2\Theta_2 + \psi_3\Theta_3 + \ldots + \psi_n\Theta_n,$$

$\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_n$ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$.

La première des équations (4) est donc alors une conséquence des $n-1$ dernières. On la supprimera alors pour la remplacer par une autre équation choisie arbitrairement.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui entrent dans les équations différentielles (1) dépendent du temps t. Les résultats seraient modifiés si le temps t n'entre pas dans ces équations.

Il y a d'abord entre les deux cas une différence qu'il est impossible de ne pas apercevoir. Nous avions supposé dans ce qui précède que les X_i étaient des fonctions périodiques du temps et que la période était 2π; il en résultait que, si les équations admettaient une solution périodique, la période de cette solution devait être égale à 2π ou à un multiple de 2π. Si au contraire les X_i sont indépendants de t, la période d'une solution périodique peut être quelconque.

En second lieu, si les équations (1) admettent une solution périodique (et si les X ne dépendent pas de t), elles en admettent une infinité.

Si en effet

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t)$$

est une solution périodique des équations (1), il en sera de même (quelle que soit la constante h) de

$$x_1 = \varphi_1(t+h), \qquad x_2 = \varphi_2(t+h), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t+h).$$

Ainsi le cas sur lequel nous nous sommes étendus d'abord et dans lequel pour $\mu = 0$, les équations (1) admettent une solution périodique et une seule, ne peut se présenter si les X ne dépendent pas de t.

Plaçons-nous donc dans le cas où le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) et supposons que pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période T :

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots \qquad x_n = \varphi_n(t).$$

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$; soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. Posons ensuite, comme nous l'avons fait plus haut,

$$\gamma_i - \beta_i = \psi_i.$$

Les ψ_i seront des fonctions holomorphes de μ, de $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ et de τ s'annulant avec ces variables.

Nous avons donc à résoudre par rapport aux $n+1$ inconnues $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau$ les n équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{5}$$

Nous avons une inconnue de trop, nous pouvons donc poser arbitrairement par exemple

$$\beta_n = 0.$$

Nous tirerons ensuite des équations (5), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ et τ en fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ. Cela est possible à moins que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_1}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_2}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_n}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne soit nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Si ce déterminant était nul, au lieu de poser arbitrairement $\beta_n = 0$, on poserait par exemple $\beta_i = 0$, et la méthode ne serait en défaut que si tous les déterminants dans la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{matrix} \right\|$$

étaient nuls à la fois. (Il est à remarquer que le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de cette matrice est toujours nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$).

Comme en général tous ces déterminants ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) admettront, pour les petites valeurs de μ, une solution périodique de période $T + \tau$.

10. — Exposants caractéristiques.

Reprenons les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \tag{1}$$

et imaginons qu'elles admettent une solution périodique

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Formons les équations aux variations (*voir* Chap. I) des équations (1) en posant

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

et négligeant les carrés des ξ.

Ces équations aux variations s'écriront

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux ξ, et leurs coefficients $\frac{dX_i}{dx_k}$ [quand on y a remplacé x_i par $\varphi_i(t)$] sont des fonctions périodiques de t. Nous avons donc à intégrer des équations linéaires à coefficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des solutions de ces équations; on obtient n solutions particulières de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{llll} \xi_1 = e^{\alpha_1 t} S_{11}, & \xi_2 = e^{\alpha_1 t} S_{21}, & \ldots & \xi_n = e^{\alpha_1 t} S_{n1}, \\ \xi_1 = e^{\alpha_2 t} S_{12}, & \xi_2 = e^{\alpha_2 t} S_{22}, & \ldots & \xi_n = e^{\alpha_2 t} S_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \xi_1 = e^{\alpha_n t} S_{1n}, & \xi_2 = e^{\alpha_n t} S_{2n}, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_n t} S_{nn}, \end{array}\right. \tag{3}$$

les α étant des constantes et les S_{ik} des fonctions périodiques de t de même période que les $\varphi_i(t)$.

Les constantes α s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique.

Si α est purement imaginaire de façon que son carré soit négatif, le module de $e^{\alpha t}$ est constant et égal à 1. Si au contraire α est réel, ou si α est complexe de telle façon que son carré ne soit pas réel, le module $e^{\alpha t}$ tend vers l'infini

pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$. Si donc tous les α ont leurs carrés réels et négatifs, les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ resteront finies; je dirai alors que la solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ est stable; dans le cas contraire, je dirai que cette solution est instable.

Un cas particulier intéressant est celui où deux ou plusieurs des exposants caractéristiques α sont égaux entre eux. Dans ce cas les solutions des équations (2) ne peuvent plus se mettre sous la forme (3). Si par exemple $\alpha_1 = \alpha_2$, les équations (2) admettraient deux solutions particulières qui s'écriraient

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i,1} \qquad \text{et} \qquad \xi_i = t\, e^{\alpha_1 t} S_{i,1} + e^{\alpha_1 t} S_{i,2},$$

les $S_{i,1}$ et les $S_{i,2}$ étant des fonctions périodiques de t.

Si trois des exposants caractéristiques étaient égaux entre eux, on verrait apparaître, non seulement t, mais encore t^2 en dehors des signes trigonométriques et exponentiels.

Supposons que le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) de telle sorte que les fonctions X_i ne dépendent pas de cette variable; supposons de plus que ces équations (1) admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C. \tag{4}$$

Il est aisé de voir que dans ce cas deux des exposants caractéristiques sont nuls.

On se trouve donc alors dans le cas d'exception que nous venons de signaler; mais il n'en résulte pas de difficulté; il est aisé en effet à l'aide de l'intégrale (4), d'abaisser d'une unité l'ordre des équations (1). Il n'y a plus alors que $n-1$ exposants caractéristiques et il n'y en a plus qu'un qui soit nul.

Nous allons maintenant envisager un cas particulier qui est celui où les équations (1) ont la forme des équations de la Dynamique. Écrivons-les donc sous la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1'}$$

F étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$; nous pourrons supposer, soit que F est indépendant de t; soit que F dépend non seulement des x et des y, mais encore de t, et que par rapport à cette dernière variable, c'est une fonction périodique de période 2π.

Supposons que les équations (1') admettent une solution périodique de période 2π :

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t),$$

et formons les équations aux variations en posant

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i.$$

Nous avons vu dans le Chapitre II que l'intégrale double

$$\iint (dx_1\,dy_1 + dx_2\,dy_2 + \ldots + dx_n\,dy_n)$$

est un invariant intégral, ou (ce qui revient au même) que si ξ_i, η_i et ξ'_i, η'_i sont deux solutions particulières quelconques des équations aux variations, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i) = \text{const.}$$

Je dis qu'il en résulte que les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Soient en effet ξ_i^0 et η_i^0 les valeurs initiales de ξ_i et de η_i pour $t = 0$ dans une des équations aux variations; soient ξ_i^1 et η_i^1 les valeurs correspondantes de ξ_i et de η_i pour $t = 2\pi$. Il est clair que les ξ_i^1 et les η_i^1 seront des fonctions linéaires des ξ_i^0 et des η_i^0 de telle sorte que la substitution

$$T = (\xi_i^0, \eta_i^0; \xi_i^1, \eta_i^1)$$

sera une substitution linéaire.

Soit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \ldots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

le tableau des coefficients de cette substitution linéaire.

Formons l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \ldots & a_{2n,2n} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les $2n$ racines de cette équation seront ce qu'on appelle les $2n$ multiplicateurs de la substitution linéaire T. Mais cette substitution linéaire T ne peut pas être quelconque. Il faut qu'elle n'altère pas la forme bilinéaire $\Sigma(\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i)$. Pour cela, l'équation en λ doit être réciproque. Si donc on pose $\lambda = e^{2\alpha\pi}$, les quantités α devront être deux à deux égales et de signe contraire.

C. Q. F. D.

Il y aura donc en général n quantités α^2 distinctes. Nous les appellerons les *coefficients de stabilité* de la solution périodique considérée.

Si ces n coefficients sont tous réels et négatifs, la solution périodique sera stable, car les quantités ξ_i et η_i resteront inférieures à une limite donnée.

Il ne faut pas toutefois entendre ce mot de stabilité au sens absolu. En effet, nous avons négligé les carrés des ξ et des η et rien ne prouve qu'en tenant compte de ces carrés, le résultat ne serait pas changé. Mais nous pouvons dire au moins que les ξ et η, s'ils sont originairement très petits, resteront très petits pendant très longtemps. Nous pouvons exprimer ce fait en disant que la solution périodique jouit, sinon de la stabilité *séculaire*, du moins de la stabilité *temporaire*.

On peut se rendre compte de cette stabilité en se reportant aux valeurs des ξ_i; on trouve en effet, pour la solution générale des équations aux variations,

$$\xi_i = \Sigma A_k e^{\alpha_k t} S_{ik},$$

les A_k étant des coefficients constants et les S_{ik} des séries trigonométriques.

Or si α_k^2 est réel négatif, on trouve

$$e^{\alpha_k t} = \cos t \sqrt{-\alpha_k^2} + i \sin t \sqrt{-\alpha_k^2},$$

de sorte que ξ_i s'exprime trigonométriquement.

Au contraire si un ou plusieurs des coefficients de stabilité devient réel positif ou imaginaire, la solution périodique considérée ne jouit plus de la stabilité temporaire.

On voit aisément en effet que ξ_i est alors représenté par une série dont le terme général est de la forme $A e^{ht} \cos(kt + mt + l)$, où $(h + ik)^2$ est un des coefficients de stabilité, où m est un entier et l et A des constantes quelconques. Le défaut de stabilité se trouve ainsi mis en évidence.

Si deux des coefficients de stabilité deviennent égaux entre eux, ou si l'un d'eux devient nul, on trouvera en général dans la série qui représente ξ_i des termes de la forme

$$A t e^{ht} \cos(kt + mt + l) \quad \text{ou} \quad A t \cos(mt + l).$$

En résumé, ξ_i peut dans tous les cas être représenté par une série toujours convergente. Dans cette série le temps peut entrer sous le signe sinus ou cosinus, ou par l'exponentielle e^{ht}, ou enfin en dehors des signes trigonométriques ou exponentiels.

Si tous les coefficients de stabilité sont réels, négatifs et distincts, le temps

n'apparaîtra que sous les signes sinus et cosinus et il y aura stabilité temporaire.

Si l'un des coefficients est positif ou imaginaire, le temps apparaîtra sous un signe exponentiel; si deux des coefficients sont égaux ou que l'un d'eux soit nul, le temps apparaît en dehors de tout signe trigonométrique ou exponentiel.

Si donc tous les coefficients ne sont pas réels, négatifs et distincts, il n'y a pas en général de stabilité temporaire.

Toutes les fois que F ne dépend pas du temps t, l'un des n coefficients de stabilité est nul; car d'une part le temps n'entre pas explicitement dans les équations différentielles; d'autre part ces équations admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{const.}$$

Nous nous trouvons donc dans le cas dont nous avons parlé plus haut et où deux des exposants caractéristiques sont nuls. Mais, comme nous l'avons dit, cela ne peut créer une difficulté parce que l'on peut, à l'aide de l'intégrale connue, abaisser à $2n-1$ l'ordre des équations (1'). Il n'y a plus alors que $2n-1$ exposants caractéristiques; l'un d'eux est nul et les $2n-2$ autres, aux carrés desquels on peut conserver le nom de coefficients de stabilité, sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Reprenons le déterminant que nous avons eu à envisager dans le paragraphe précédent.

Nous avons dans ce paragraphe envisagé d'abord le cas où les équations (1) dépendent du temps t et d'un paramètre μ, et admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique et une seule. Nous avons vu que si le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \neq 0,$$

les équations admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ.

Ce déterminant peut s'écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - 1 & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - 1 & \ldots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - 1 \end{vmatrix}.$$

Or les exposants caractéristiques α sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{2\alpha\pi} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{2\alpha\pi} & \dots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{2\alpha\pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Dire que Δ est nul, c'est donc dire que l'un des exposants caractéristiques est nul, de sorte que nous pouvons énoncer de la façon suivante le premier des théorèmes démontrés au paragraphe précédent.

Si les équations (1) *qui dépendent d'un paramètre* μ *admettent pour* $\mu = 0$ *une solution périodique dont aucun des exposants caractéristiques ne soit nul, elles admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de* μ.

11. — Solutions périodiques des équations de la Dynamique.

Je prendrai, pour fixer les idées, les équations de la Dynamique avec trois degrés de liberté, mais ce que je vais dire s'appliquerait évidemment au cas général. J'écrirai donc mes équations sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, & \frac{dx_3}{dt} = \frac{dF}{dy_3}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}, & \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF}{dx_3}, \end{cases}$$

F étant une fonction uniforme quelconque des x et des y, indépendante de t.

Je supposerai ensuite que x_1, x_2 et x_3 sont des variables linéaires, mais que y_1, y_2 et y_3 sont des variables angulaires, c'est-à-dire que F est une fonction périodique de y_1, y_2 et y_3 avec la période 2π, de telle façon que la situation du système ne change pas quand une ou plusieurs des trois quantités y augmente d'un multiple de 2π. (*Cf.* Chap. I.)

Je supposerai de plus que F dépend d'un paramètre arbitraire μ et peut se développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre de telle sorte que l'on ait

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3 + \dots$$

Je supposerai enfin que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y de telle sorte que

$$\frac{dF_0}{dy_1} = \frac{dF_0}{dy_2} = \frac{dF_0}{dy_3} = 0.$$

Rien n'est plus simple alors que d'intégrer les équations (1) quand $\mu = 0$; elles s'écrivent en effet

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_2}, \qquad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_3}.$$

Ces équations montrent d'abord que x_1, x_2 et x_3 sont des constantes. On en conclut que $-\frac{dF_0}{dx_1}$, $-\frac{dF_0}{dx_2}$, $-\frac{dF_0}{dx_3}$ qui ne dépendent que de x_1, x_2 et x_3 sont aussi des constantes que nous appellerons pour abréger n_1, n_2 et n_3 et qui sont complètement définies quand on se donne les valeurs constantes de x_1, x_2 et x_3. Il vient alors

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

ϖ_1, ϖ_2 et ϖ_3 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Quelle est la condition pour que la solution ainsi trouvée soit périodique et de période T? Il faut que si l'on change t en $t + T$, y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π, c'est-à-dire que $n_1 T$, $n_2 T$ et $n_3 T$ soient des multiples de 2π.

Ainsi pour que la solution que nous venons de trouver soit périodique, il faut et il suffit que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 soient commensurables entre eux, du moins à un même facteur près.

Nous exclurons, au moins provisoirement de nos recherches, le cas où les trois fonctions $\frac{dF_0}{dx_1}$, $\frac{dF_0}{dx_2}$ et $\frac{dF_0}{dx_3}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si on laisse ce cas de côté, on peut toujours choisir x_1, x_2 et x_3 de telle façon que n_1, n_2 et n_3 aient telles valeurs que l'on veut, au moins dans un certain domaine. Il y aura donc une infinité de choix possibles pour les trois constantes x_1, x_2 et x_3 qui conduiront à des solutions périodiques.

Je me propose de rechercher s'il existe encore des solutions périodiques de période T lorsque μ n'est plus égal à zéro.

Pour le prouver je vais employer un raisonnement analogue à celui du paragraphe 9.

Supposons que μ cesse d'être nul, et imaginons que, dans une certaine solution, les valeurs des x et des y pour $t = 0$ soient respectivement :

$$x_1 = a_1 + \delta a_1, \qquad x_2 = a_2 + \delta a_2, \qquad x_3 = a_3 + \delta a_3,$$
$$y_1 = \varpi_1 + \delta\varpi_1, \qquad y_2 = \varpi_2 + \delta\varpi_2, \qquad y_3 = \varpi_3 + \delta\varpi_3.$$

Supposons que, dans cette même solution, les valeurs des x et des y pour $t = T$ soient

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + \delta a_1 + \Delta a_1,\\
x_2 &= a_2 + \delta a_2 + \Delta a_2,\\
x_3 &= a_3 + \delta a_3 + \Delta a_3,\\
y_1 &= \varpi_1 + n_1 T + \delta\varpi_1 + \Delta\varpi_1,\\
y_2 &= \varpi_2 + n_2 T + \delta\varpi_2 + \Delta\varpi_2,\\
y_3 &= \varpi_3 + n_3 T + \delta\varpi_3 + \Delta\varpi_3.
\end{aligned}$$

La condition pour que cette solution soit périodique de période T est que l'on ait

$$(2) \qquad \Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0.$$

Les six équations (2) ne sont pas distinctes. En effet, comme $F = \text{const.}$ est une intégrale des équations (1), et que d'ailleurs F est périodique par rapport aux y, on a

$$\begin{aligned}
F(a_i + \delta a_i, \varpi_i + \delta\varpi_i) &= F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \varpi_i + n_i T + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i)\\
&= F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \varpi_i + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i).
\end{aligned}$$

Il nous suffira donc de satisfaire à cinq des équations (2). Je supposerai de plus

$$\varpi_1 = \delta\varpi_1 = 0.$$

ce qui revient à prendre pour origine du temps l'époque où y_1 est nul. Il est aisé de voir que les Δa_i et les $\Delta\varpi_i$ sont des fonctions holomorphes des μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$ s'annulant quand toutes ces variables s'annulent.

Il s'agit donc de démontrer que l'on peut tirer des cinq dernières équations (2) δa_1, δa_2, δa_3, $\delta\varpi_2$ et $\delta\varpi_3$ en fonctions de μ.

Remarquons que quand μ est nul, on a

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = 0.$$

Par conséquent Δa_1, Δa_2 et Δa_3, développés suivant les puissances de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$, contiennent μ en facteur. Nous supprimerons ce facteur μ, et nous écrirons par conséquent les cinq équations (2) que nous avons à résoudre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{\Delta a_3}{\mu} = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0.$$

Il nous faut déterminer ϖ_2 et ϖ_3 de telle façon que ces équations soient satisfaites pour

$$(4) \qquad \mu = \delta\varpi_2 = \delta\varpi_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.$$

Voyons ce que deviennent les premiers membres des équations (3) quand on y fait $\mu = 0$.

Il vient

$$n_1 T + \Delta\varpi_1 = + \int_0^T \frac{dy_1}{dt}\, dt = - \int_0^T \frac{dF}{dx_1}\, dt = - \int_0^T \frac{dF_0}{d(a_1 + \delta a_1)}\, dt,$$

d'où

$$\Delta\varpi_1 = - T\left(\frac{dF_0}{dx_1} + n_1\right),$$

et de même

$$\Delta\varpi_2 = - T\left(\frac{dF_0}{dx_2} + n_2\right), \qquad \Delta\varpi_3 = - T\left(\frac{dF_0}{dx_3} + n_3\right).$$

Il importe d'observer que dans F_0 il faut remplacer x_1, x_2 et x_3 par $a_1 + \delta a_1$, $a_2 + \delta a_2$, $a_3 + \delta a_3$; en effet pour $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et x_1, x_2, x_3 à des constantes qui restent constamment égales à leurs valeurs initiales $a_1 + \delta a_1$, $a_2 + \delta a_2$, $a_3 + \delta a_3$.

Il vient d'autre part

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{dx_2}{dt}\, dt = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{dF}{dy_2}\, dt$$

ou puisque F_0 ne dépend pas de y_2

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{d}{dy_2}\left(\frac{F - F_0}{\mu}\right) dt$$

ou, pour $\mu = 0$:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_2}\, dt.$$

Supposons que μ, les $\delta\varpi$ et les δa soient nuls à la fois; il faudra alors faire dans F_1 :

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3, \qquad y_1 = n_1 t, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3.$$

F_1 deviendra alors une fonction périodique de t de période T, et une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 de période 2π.

Soit ψ la valeur moyenne de F_1 considérée comme fonction périodique de t. Il viendra

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{d\varpi_2}\, dt = T \frac{d\psi}{d\varpi_2},$$

et de même

$$\frac{\Delta a_3}{\mu} = \mathrm{T}\frac{d\psi}{d\varpi_3}.$$

Nous devons donc choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux équations

$$(5) \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Cela est toujours possible; en effet la fonction ψ est périodique en ϖ_2 et en ϖ_3 et elle est finie; donc elle a au moins un maximum et un minimum, pour lesquels ses deux dérivées doivent s'annuler. Quand on aura choisi de la sorte ϖ_2 et ϖ_3, on verra que les équations (3) sont satisfaites quand on y fait à la fois

$$\mu = \delta\varpi_2 = \delta\varpi_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.$$

Nous pourrons donc tirer des équations (3) les cinq inconnues δa_i et $\delta\varpi_i$ sous la forme de fonctions holomorphes de μ, s'annulant avec μ. Il n'y aurait d'exception que si le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu}, \Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3\right)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta\varpi_2, \delta\varpi_3)}$$

était nul. Mais pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_1$, $\Delta\varpi_2$ et $\Delta\varpi_3$ sont indépendants de $\delta\varpi_2$ et de $\delta\varpi_3$, de sorte que ce déterminant fonctionnel est le produit de deux autres

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu}\right)}{\partial(\delta\varpi_2, \delta\varpi_3)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)}.$$

Si l'on supprime les facteurs T^2 et $-\mathrm{T}^3$, le premier de ces déterminants est égal au hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 et le second au hessien de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Si donc aucun de ces deux hessiens n'est nul, il sera possible de satisfaire aux cinq équations (3) et par conséquent pour des valeurs suffisamment petites de μ, il existera une solution périodique de T. C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher à déterminer, non plus seulement les solutions périodiques de période T, mais les solutions de période peu différente de T. Nous avons pris pour point de départ les trois nombres n_1, n_2, n_3: nous aurions pu tout aussi bien choisir trois autres nombres n'_1, n'_2, n'_3, pourvu qu'ils soient commensurables entre eux, et nous serions arrivés à une autre solution périodique dont la période T aurait été le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n'_1}$, $\frac{2\pi}{n'_2}$, $\frac{2\pi}{n'_3}$.

Si nous prenons en particulier

$$n'_1 = n_1(1+\varepsilon), \qquad n'_2 = n_2(1+\varepsilon), \qquad n'_3 = n_3(1+\varepsilon),$$

les trois nombres n'_1, n'_2, n'_3 seront commensurables entre eux, puisqu'ils sont proportionnels aux trois nombres n_1, n_2 et n_3.

Il nous conduiront donc à une solution périodique de période

$$T' = \frac{1+\varepsilon}{T},$$

de telle façon que nous aurons

$$x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \varphi'_i(t, \mu, \varepsilon), \tag{6}$$

les φ_i et les φ'_i étant des fonctions développables suivant les puissances de μ et de ε, et périodiques en t, mais de façon que la période dépende de ε.

Si dans F nous remplaçons les x_i et les y_i par leurs valeurs (4), F doit devenir une constante indépendante du temps [puisque F = const. est une des intégrales des équation (1)]. Mais cette constante qui est dite constante des forces vives, dépendra de μ et de ε et pourra être développée suivant les puissances croissantes de ces variables,

Si la constante des forces vives B est une donnée de la question, l'équation $F(\mu, \varepsilon) = B$ peut être regardée comme une relation qui lie ε à μ. Si donc nous nous donnons arbitrairement B, il existera toujours une solution périodique quelle que soit la valeur choisie pour cette constante, mais la période dépendra de ε et par conséquent de μ.

Un cas plus particulier que celui que nous venons de traiter en détail est celui où il n'y a que deux degrés de liberté. F ne dépend alors que de quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2 et la fonction ψ ne dépend plus que d'une seule variable ϖ_2. Les relations (5) se réduisent alors à

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0 \tag{7}$$

et le hessien de ψ se réduit à $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$. D'où cette conclusion :

A chacune des racines simples de l'équation (7) correspond une solution périodique des équations (1), qui existe pour toutes les valeurs de μ suffisamment petites.

Je pourrais même ajouter qu'il en est encore de même pour chacune des racines d'ordre impair ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 9, et que cette équation admet toujours de pareilles racines, puisque la fonction ψ a au

moins un maximum qui ne peut correspondre qu'aux racines impaires de l'équation (7).

Revenons au cas où l'on a trois degrés de liberté, et où la période est constante et égale à T.

Je dis que x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 peuvent se développer suivant les puissances croissantes de μ. En effet, en vertu du théorème III (§ 2), les x et les y peuvent être développés suivant les puissances de μ, et de δa_1, δa_2, δa_3, $\delta\varpi_2$ et $\delta\varpi_3$. Mais imaginons que l'on ait déterminé les δa et les $\delta\varpi$ de façon que la solution soit périodique de période T. On tirera alors les δa et les $\delta\varpi$ des équations (3) sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de μ, de sorte que les x et les y seront finalement ordonnées suivant les puissances de μ.

La solution devant être périodique de période T quel que soit μ, les coefficients des diverses puissances de μ seront des fonctions périodiques de t.

Remarquons de plus que l'on peut toujours supposer que l'origine du temps ait été choisie de telle sorte que y_1 s'annule avec t, et que cela ait lieu quel que soit μ. Alors pour $t = 0$ on aura

$$0 = y_1^0 = y_1^1 = y_1^2 = \ldots.$$

L'existence et la convergence de ces séries étant ainsi établie, je vais déterminer les coefficients.

Pour cela, je vais chercher à satisfaire aux équations (1) en faisant [1]

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \ldots,\\ x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \ldots,\\ x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \ldots,\\ y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots,\\ y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots,\\ y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules x_1^0, x_2^0, x_3^0 désignent les valeurs constantes que j'avais été conduit plus haut à attribuer à x_1, x_2 et x_3 quand je supposais $\mu = 0$ et qui sont telles que

$$\frac{d}{dx_1^0} F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_1, \qquad \frac{d}{dx_2^0} F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_2,$$

$$\frac{d}{dx_3^0} F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_3.$$

---

[1] Les chiffres placés en haut des lettres x et y dans les équations (8) sont des indices et non des exposants.

On a de plus [1]

$$y_i^0 = n_i t + \varpi_i.$$

Enfin les x_i^1, les y_i^1, les x_i^2, les y_i^2, etc. sont des fonctions du temps qu'il s'agira de déterminer et qui devront être périodiques de période T.

Dans F, à la place des x et des y, substituons leurs valeurs (8), puis développons F suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que l'on ait

$$F = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots.$$

Il est clair que

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

ne dépend que des x_i^0 ; que

$$(9) \qquad \Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) + x_1^1 \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1 \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^1 \frac{dF_0}{dx_3^0}$$

ne dépend que des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1 ; que Φ_2 ne dépend que des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1 et des x_i^2, etc.

Plus généralement, je puis écrire

$$\Phi_k = \Theta_k + x_1^k \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k \frac{dF_0}{dx_3^0} = \Theta_k - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k - n_3 x_3^k,$$

où Θ_k dépend seulement des x_i^0, des x_i^1, ... et des x_i^{k-1}, des y_i^0, des y_i^1, ... et des y_i^{k-1}.

Je puis ajouter que par rapport à y_1^0, y_2^0, y_3^0 la fonction Θ_k est une fonction périodique de période 2π. L'équation (9) montre que $\Theta_1 = F_1$.

Cela posé les équations différentielles peuvent s'écrire, en égalant les puissances de même nom de μ :

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

On trouve ensuite

$$(10) \qquad \frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \qquad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \qquad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0}$$

et

$$(11) \qquad \frac{dy_1^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_1^0}, \qquad \frac{dy_2^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_2^0}, \qquad \frac{dy_3^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_3^0},$$

---

[1] Un changement convenable de variables permet (*Méthodes nouvelles*, t. I, § 44) de rendre nuls n_2 et n_3 et de simplifier ainsi la détermination effective des coefficients des série [J. L.].

et plus généralement

$$(10') \qquad \frac{dx_i^k}{dt} = \frac{d\Phi_k}{dy_i^0}$$

et

$$(11') \qquad \frac{dy_i^k}{dt} = -\frac{d\Phi_k}{dx_i^0} = -\frac{d\Theta_k}{dx_i^0} - x_1^k \frac{d^2 F_0}{dx_1^0\, dx_i^0} - x_2^k \frac{d^2 F_0}{dx_2^0\, dx_i^0} - x_3^k \frac{d^2 F_0}{dx_3^0\, dx_i^0}.$$

Intégrons d'abord les équations (10). Dans F_1 nous remplacerons y_1^0, y_2^0, y_3^0 par leurs valeurs

$$n_1 t + \varpi_1, \quad n_2 t + \varpi_2, \quad n_3 t + \varpi_3.$$

Puisque y_1^0 doit s'annuler avec t, ϖ_1 sera nul. Alors les seconds membres des équations (10) sont des fonctions périodiques de t de période T; ces seconds membres peuvent donc être développés en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Pour que les valeurs de x_1^1, x_2^1 et x_3^1 tirées des équations (10) soient des fonctions périodiques de t, il faut et il suffit que ces séries ne contiennent pas de termes tous connus.

Je puis écrire en effet :

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h),$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers positifs ou négatifs et où A et h sont des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0. J'écrirai pour abréger :

$$F_1 = \Sigma A \sin\omega$$

en posant

$$\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h.$$

Je trouverai alors

$$\frac{dF_1}{dy_1^0} = \Sigma A m_1 \cos\omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_2^0} = \Sigma A m_2 \cos\omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_3^0} = \Sigma A m_3 \cos\omega$$

et

$$\omega = t(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3.$$

Parmi les termes de ces séries, je distinguerai ceux pour lesquels

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

et qui sont indépendants de t. Ces termes existent puisque nous avons supposé que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 sont commensurables entre eux.

Je poserai alors

$$\psi = \mathbf{S} A \sin\omega \qquad (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,\ \omega = h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3),$$

la sommation représentée par le signe $\mathbf{S}$ s'étendant à tous les termes de F_1 pour lesquels le coefficient de t est nul. Nous aurons alors

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \mathbf{S}\, A\, m_2 \cos\omega, \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_3} = \mathbf{S}\, A\, m_3 \cos\omega.$$

Si donc on a

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0, \tag{12}$$

il viendra

$$\mathbf{S}\, A\, m_1 \cos\omega = 0, \qquad \mathbf{S}\, A\, m_2 \cos\omega = 0, \qquad \mathbf{S}\, A\, m_3 \cos\omega = 0. \tag{13}$$

La première des équations (11) est en effet une conséquence des deux autres, puisque en vertu de la relation $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$, on a identiquement

$$n_1 \mathbf{S}\, A\, m_1 \cos\omega + n_2 \mathbf{S}\, A\, m_2 \cos\omega + n_3 \mathbf{S}\, A\, m_3 \cos\omega = 0.$$

Si donc les relations (12) sont satisfaites, les séries $\Sigma A\, m_i \cos\omega$ ne contiendront pas de terme tout connu, et les équations (10) nous donneront

$$x_1^1 = \sum \frac{A\, m_1 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_1^1, \qquad x_2^1 = \sum \frac{A\, m_2 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_2^1,$$
$$x_3^1 = \sum \frac{A\, m_3 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_3^1,$$

C_1^1, C_2^1, C_3^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Il me reste à démontrer que l'on peut choisir les constantes ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (10). La fonction ψ est une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 qui ne change pas quand l'une de ces deux variables augmente de 2π. De plus, elle est finie, elle aura donc au moins un maximum et un minimum. Il y a donc au moins deux manières de choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (12).

Je pourrais même ajouter qu'il y en a au moins quatre, sans pouvoir toutefois affirmer qu'il en est encore de même quand le nombre de degrés de liberté est supérieur à trois.

Je vais maintenant chercher à déterminer à l'aide des équations (11) les trois fonctions y_i^1 et les trois constantes C_i^1.

Nous pouvons regarder comme connus les x_i^0 et les y_i^0; les x_i^1 sont connus également aux constantes près C_i^1. Je puis donc écrire les équations (11) sous la forme suivante :

$$\frac{dy_i^1}{dt} = H_i - C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0\, dx_i^0} - C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0\, dx_i^0} - C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0\, dx_i^0}, \tag{14}$$

où les H_i représentent des fonctions entièrement connues développées en séries suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients de C_1^1, C_2^1 et C_3^1 sont des constantes que l'on peut regarder comme connues.

Pour que la valeur de y_i^1 tirée de cette équation soit une fonction périodique de t, il faut et il suffit que dans le second membre le terme tout connu soit nul. Si donc H_i^0 désigne le terme tout connu de la série trigonométrique H_i, je devrai avoir

$$(15)\qquad C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0\, dx_i^0} + C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0\, dx_i^0} + C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0\, dx_i^0} = H_i^0.$$

Les trois équations linéaires (15) déterminent les trois constantes C_1^1, C_2^1 et C_3^1.

Il n'y aurait d'exception que si le déterminant de ces trois équations était nul; c'est-à-dire si le *hessien* de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0 était nul; nous exclurons ce cas.

Les équations (14) me donneront donc

$$y_1^1 = \eta_1^1 + k_1^1, \qquad y_2^1 = \eta_2^1 + k_2^1, \qquad y_3^1 = \eta_3^1 + k_3^1,$$

les η_i^1 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues s'annulant avec t, et les k_i^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Venons maintenant aux équations (10′) en y faisant $k = 2$ et $i = 1, 2, 3$ et cherchons à déterminer à l'aide des trois équations ainsi obtenues, les trois fonctions x_i^2 et les trois constantes k_i^1.

Il est aisé de voir que nous avons

$$\Theta_2 = \Omega_2 + y_1^1 \frac{dF_1}{dy_1^0} + y_2^1 \frac{dF_1}{dy_2^0} + y_3^1 \frac{dF_1}{dy_3^0},$$

où Ω_2 dépend seulement des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1 et où l'on a, comme plus haut

$$\frac{dF_1}{dy_i^0} = \Sigma A\, m_i \cos\omega.$$

Les équations (10′) s'écrivent alors

$$\frac{dx_i^2}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dy_i^0} + \sum_k y_k^1 \frac{d^2 F_1}{dy_k^0\, dy_i^0}$$

ou

$$(16)\qquad \frac{dx_i^2}{dt} = H_i' - k_1^1\, \Sigma A\, m_1 m_i \sin\omega - k_2^1\, \Sigma A\, m_2 m_i \sin\omega - k_3^1\, \Sigma A\, m_3 m_i \sin\omega,$$

H_i' étant une fonction périodique de t, que l'on peut regarder comme entière-

ment connue. Pour que l'on puisse tirer de cette équation x_i^2 sous la forme d'une fonction périodique, il faut et il suffit que les seconds membres des équations (16), développés en séries trigonométriques, ne possèdent pas de termes tout connus. Nous devons donc disposer des quantités k_i^1 de manière à annuler ces termes tout connus. Nous serions ainsi conduits à trois équations linéaires entre les trois quantités k_i^1; mais comme le déterminant de ces trois équations est nul, il y a une petite difficulté et je suis forcé d'entrer dans quelques détails.

Comme y_1^1 s'annule avec t, on doit avoir $k_1^1 = 0$; nous n'aurons plus alors que deux inconnues k_2^1 et k_3^1 et trois équations à satisfaire; mais ces trois équations ne sont pas distinctes comme nous allons le voir.

Appelons en effet E_i le terme tout connu de H_i', ces trois équations s'écriront

$$(17)\quad \begin{cases} E_1 = k_2^1 \mathcal{S} A m_2 m_1 \sin\omega + k_3^1 \mathcal{S} A m_3 m_1 \sin\omega, \\ E_2 = k_2^1 \mathcal{S} A m_2^2 \sin\omega \quad + k_3^1 \mathcal{S} A m_3 m_2 \sin\omega, \\ E_3 = k_2^1 \mathcal{S} A m_2 m_3 \sin\omega + k_3^1 \mathcal{S} A m_3^2 \sin\omega, \end{cases}$$

en conservant au signe de sommation $\mathcal{S}$ le même sens que plus haut. Je ne considérerai d'abord que les deux dernières des équations (17) que j'écrirai

$$-E_2 = k_2^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2\, d\varpi_3}, \qquad -E_3 = k_2^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2\, d\varpi_3} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2}.$$

De ces deux équations on peut tirer k_2^1 et k_3^1, à moins que le hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 ne soit nul. Si l'on donne aux k_i^1 les valeurs ainsi obtenues, les deux dernières équations (16) nous donneront x_2^2 et x_3^2 sous la forme suivante :

$$x_2^2 = \xi_2^2 + C_2^2, \qquad x_3^2 = \xi_3^2 + C_3^2,$$

les ξ_i^2 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les C_i^2 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Pour trouver x_1^2 nous pouvons, au lieu d'employer la première des équations (16), nous servir des considérations suivantes :

Les équations (1) admettent une intégrale $F = B$, B étant une constante d'intégration que je supposerai développée suivant les puissances de μ en écrivant

$$B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots,$$

de sorte que l'on a

$$\Phi_0 = B_0, \qquad \Phi_1 = B_1, \qquad \Phi_2 = B_2, \qquad \ldots,$$

B_0, B_1, B_2, etc., étant autant de constantes différentes.

Le premier membre de l'équation $\Phi_2 = B_2$ dépend des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1, de x_2^2 et de x_3^2 qui sont des fonctions connues de t et de x_1^2, lequel nous n'avons pas encore calculé. De cette équation, nous pourrons donc tirer x_1^2 sous la forme suivante :

$$x_1^2 = \xi_1^2 + C_1^2.$$

ξ_1^2 sera une fonction périodique de t entièrement déterminée et C_1^2 est une constante qui dépend de B_2, de C_2^2 et de C_2^3.

Nous pouvons conclure de là que la première des équations (17) doit être satisfaite et par conséquent que ces trois équations (17) ne sont pas distinctes.

Prenons maintenant les équations (11') et faisons-y $k = 2$; nous obtiendrons trois équations qui nous permettront de déterminer les constantes C_1^1, C_1^2 et C_1^3 et d'où l'on tirera en outre les y_i^2 sous la forme

$$y_1^2 = \eta_1^2 + k_1^2, \qquad y_2^2 = \eta_2^2 + k_2^2, \qquad y_3^2 = \eta_3^2 + k_3^2,$$

les η étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k_i^2 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Reprenons ensuite les équations (10') en y faisant $k = 3$; si nous supposons $k_1^2 = 0$, nous pourrons tirer des trois équations ainsi obtenues, d'abord les deux constantes k_2^2 et k_3^2, puis les x_i^3 sous la forme

$$x_i^3 = \xi_i^3 + C_i^3,$$

les ξ étant des fonctions périodiques connues de t et les C_i^3 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Et ainsi de suite.

Voilà un procédé pour trouver des séries ordonnées suivant les puissances de μ, périodiques de période T par rapport au temps et satisfaisant aux équations (1). *Ce procédé ne serait en défaut que si le hessien de* F_0 *par rapport aux* x_i^0 *était nul ou si le hessien de* ψ *par rapport à* ϖ_2 *et* ϖ_3 *était nul.*

Ce que nous venons de dire s'applique en particulier à une équation que l'on rencontre quelquefois en Mécanique céleste et dont plusieurs géomètres se sont déjà occupés. Cette équation est la suivante :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R(\rho, t). \tag{18}$$

n et m sont des constantes, μ est un paramètre très petit et R est une fonction de ρ et de t, développée suivant les puissances croissantes de ρ et périodique par rapport à t.

Pour bien nous en rendre compte, il faut d'abord ramener l'équation (18) à la forme canonique des équations de la Dynamique. Cela se fera en posant

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{2} - \mu\int R(\rho, \xi)\,d\rho + \eta,$$

ξ et η étant deux nouvelles variables auxiliaires et l'intégrale $\int R(\rho, \xi)\,d\rho$ étant calculée en regardant ξ comme une constante. On trouve alors

$$(19) \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta},$$

auxquelles nous pourrons adjoindre (η étant restée jusqu'ici complètement arbitraire) l'équation suivante :

$$(19') \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi},$$

qui complète un système canonique.

Quand $\mu = 0$ l'intégrale générale de l'équation (18) s'écrit

$$(20) \qquad \rho = h\,\mathrm{sn}(gt + \varpi), \qquad \sigma = hg\,\mathrm{cn}(gt + \varpi)\,\mathrm{dn}(gt + \varpi),$$

où g et ϖ sont deux constantes d'intégration et où h, ainsi que le module du sinus amplitude, sont deux fonctions de g faciles à déterminer.

Nous allons changer de variables; nous prendrons au lieu de ξ, η, ρ et σ, quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2, définies comme il suit. Nous aurons d'abord

$$x_2 = \eta, \qquad y_2 = \xi.$$

Des équations (20) qui donnent ρ et σ en fonction de g et de $gt + \varpi$ pour $\mu = 0$, on peut tirer g et $gt + \varpi$ en fonctions de ρ et de σ. Il vient

$$g = \chi_1(\rho, \sigma), \qquad gt + \varpi = \chi_2(\rho, \sigma).$$

Nous prendrons alors pour x_1 une certaine fonction de $\chi_1(\rho, \sigma)$ et pour y_1 :

$$y_1 = \frac{k}{2\pi}\chi_2(\rho, \sigma),$$

k désignant la période réelle de $\mathrm{sn}(x)$.

Si alors x_1 a été convenablement choisi en fonction de χ_1, les équations conserveront leur forme canonique

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dF}{dx_2}, \qquad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{dF}{dy_2}.$$

Il est clair d'ailleurs que pour $\mu = 0$, F ne dépend que de x_1 et de x_2 et non de y_1 et de y_2.

Nous nous trouvons donc bien dans les conditions énoncées au début de ce paragraphe.

L'équation (18) a surtout été étudiée par les géomètres dans le cas où $m = 0$; il semble au premier abord qu'elle est alors beaucoup plus simple. Ce n'est qu'une illusion; en effet, si l'on suppose $m = 0$, on se trouve dans le cas où le hessien de F_0 est nul et ce que nous avons dit dans ce paragraphe n'est plus applicable sans modification.

Ce n'est pas que les particularités que présente l'équation (18) dans le cas général ne soient encore vraies pour $m = 0$, toutes les fois du moins que μ n'est pas nul. La seule différence, c'est qu'on ne peut les mettre en évidence par un développement suivant les puissances de μ. L'apparente simplification qu'a reçue ainsi l'équation (18) n'a fait qu'augmenter les difficultés. Il est vrai qu'on est conduit quand $m = 0$, à des séries beaucoup plus simples que dans le cas général, mais ces séries ne convergent pas comme nous le verrons dans la suite.

La méthode exposée dans ce paragraphe s'applique également à un cas particulier du problème des trois corps.

Supposons une masse nulle C attirée par deux masses mobiles A et B égales l'une à $1 - \mu$ et l'autre à μ et décrivant d'un mouvement uniforme deux circonférences concentriques autour de leur centre de gravité commun supposé fixe. Imaginons de plus que la masse C se meuve dans le plan de ces deux circonférences.

Nous verrons plus loin que dans ce cas les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dF}{dy_1}, & \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{dF}{dy_2}; \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_1}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_2}. \end{cases}$$

On désigne par x_1 la vitesse aréolaire du point C, par x_2 la racine carrée du grand axe de l'orbite de C, par y_1 la différence de la longitude du périhélie de C et de la longitude de B, par y_2 l'anomalie moyenne.

D'ailleurs F peut être développée suivant les puissances de μ et l'on a

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

Il est aisé de voir que le hessien de F_0 par rapport à x_1 et à x_2 est nul. Il semble donc d'abord que les méthodes du présent paragraphe sont en défaut. Il n'en est rien et un artifice très simple permet de tourner la difficulté. Les équations (1) admettent comme intégrale $F = C$. Considérons la constante C comme une donnée de la question.

Si alors $\varphi(F)$ est une fonction quelconque de F et $\varphi'(F)$ sa dérivée, on aura

$$\varphi'(F) = \varphi'(C)$$

et les équations (1) pourront s'écrire

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(F)\,dF}{\varphi'(C)\,dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\varphi'(F)\,dF}{\varphi'(C)\,dx_i}$$

ou

$$(1') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dy_i}\left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)}\right], \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d}{dx_i}\left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)}\right].$$

En général, le hessien de $\frac{\varphi(F_0)}{\varphi'(C)}$ ne sera pas nul. C'est ce qui arrive en particulier quand

$$\varphi(F_0) = F_0^2 = x_1^2 + \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{1}{4x_2^4}.$$

Les solutions des équations (1) qui correspondent à la valeur particulière C de l'intégrale F appartiennent aussi aux équations (1').

Considérons maintenant une solution des équations (1) qui soit telle que l'intégrale F soit égale à une constante C_1 différente de C.

Je dis que cette solution appartiendra encore aux équations (1') pourvu qu'on y change t en $t\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}$. On a en effet

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i};$$

si l'on change t en $t\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}$, il viendra

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(C_1)\,dF}{\varphi'(C)\,dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\varphi'(C_1)\,dF}{\varphi'(C)\,dx_i}$$

ou puisque $F = C_1$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(F)\,dF}{\varphi'(C)\,dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\varphi'(F)\,dF}{\varphi'(C)\,dx_i}.$$

C. Q. F. D.

Des solutions de (1) il est donc aisé de déduire celles de (1') et inversement.

Les méthodes du présent paragraphe sont donc, grâce à cet artifice, applicables à ce cas particulier du problème des trois corps.

Elles ne le seraient pas aussi aisément au cas général. Dans le cas général en effet, non seulement le hessien de F_0 est nul, mais celui de $\varphi(F_0)$ est encore nul, quelle que soit la fonction φ.

De là certaines difficultés dont je ne parlerai pas ici; j'y reviendrai plus loin et je me bornerai pour le moment à renvoyer le lecteur à un travail que j'ai inséré dans le *Bulletin Astronomique* (t. 1, p. 65) [1].

12. — Calcul des exposants caractéristiques.

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution périodique de ces équations

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

et proposons-nous de déterminer les exposants caractéristiques de cette solution.

Pour cela nous poserons

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i,$$

puis nous formerons les équations aux variations des équations (1) que nous écrirons

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \displaystyle\sum_k \frac{d^2F}{dy_i\,dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i\,dy_k}\eta_k \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\displaystyle\sum_k \frac{d^2F}{dx_i\,dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i\,dx_k}\eta_k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

et nous chercherons à intégrer ces équations en faisant

$$(3)\qquad \xi_i = e^{\alpha t}S_i, \qquad \eta_i = e^{\alpha t}T_i,$$

S_i et T_i étant des fonctions périodiques de t. Nous savons qu'il existe en général six solutions particulières de cette forme [les équations linéaires (2) étant du sixième ordre]. Mais il importe d'observer que, dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a plus que quatre solutions particulières qui conservent

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome p. 253.

cette forme, parce que deux des exposants caractéristiques sont nuls, et qu'il y a par conséquent deux solutions particulières d'une forme dégénérescente.

Cela posé, supposons d'abord $\mu = 0$, alors F se réduit à F_0 comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent et ne dépend plus que de x_1^0, x_2^0, et x_3^0.

Alors les équations (2) se réduisent à

$$(2') \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0}\, \xi_k.$$

Les coefficients de ξ_k dans la seconde équation (2') sont des constantes.

Nous prendrons comme solutions des équations (2')

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \qquad \eta_1 = \eta_1^0, \qquad \eta_2 = \eta_2^0, \qquad \eta_3 = \eta_3^0,$$

η_1^0, η_2^0 et η_3^0 étant trois constantes d'intégration.

Cette solution n'est pas la plus générale, puisqu'elle ne contient que trois constantes arbitraires, mais c'est la plus générale parmi celles que l'on peut ramener à la forme (3). Nous voyons ainsi que pour $\mu = 0$, les six exposants caractéristiques sont nuls.

Ne supposons plus maintenant que μ soit nul. Nous allons maintenant chercher à développer α, S_i et T_i, non pas suivant les puissances croissantes de μ, mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ en écrivant

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 \sqrt{\mu} + \alpha_2 \mu + \alpha_3 \mu \sqrt{\mu} + \ldots, \\
S_i &= S_i^0 + S_i^1 \sqrt{\mu} + S_i^2 \mu + S_i^3 \mu \sqrt{\mu} + \ldots, \\
T_i &= T_i^0 + T_i^1 \sqrt{\mu} + T_i^2 \mu + T_i^3 \mu \sqrt{\mu} + \ldots.
\end{aligned}$$

Je me propose d'abord d'établir que ce développement est possible.

Montrons d'abord que les exposants caractéristiques α peuvent se développer suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 10, les exposants caractéristiques nous seront donnés par l'équation suivante, en reprenant les notations des paragraphes 9 et 10 :

$$\begin{vmatrix}
\frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{\alpha T} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\
\frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{\alpha T} & \ldots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{\alpha T}
\end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est holomorphe en α ; de plus, d'après le

théorème III (§ 2), les γ peuvent être développés suivant les puissances de μ et des β (*cf.* § 9), d'ailleurs d'après le paragraphe 9 les β peuvent se développer eux-mêmes suivant les puissances de μ. D'après cela les γ et le déterminant que je viens d'écrire peuvent eux-mêmes être développés suivant les puissances de μ. Il résulte de là que les exposants α nous sont donnés en fonction de μ par une équation $G(\alpha, \mu) = 0$ dont le premier membre est holomorphe en α et en μ.

Si pour $\mu = 0$, tous les exposants α étaient différents les uns des autres, l'équation $G = 0$ n'aurait pour $\beta = 0$ que des racines simples, et l'on en conclurait que les α seraient développables suivant les puissances de μ (théorème IV, § 2).

Mais il n'en est pas ainsi; nous venons de voir en effet que pour $\mu = 0$, tous les α sont nuls.

Reprenons les notations du paragraphe 11, notre équation pourra s'écrire, en supposant trois degrés de liberté seulement :

$$= G(\alpha, \mu) = \begin{vmatrix} \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta \varpi_3} \\ \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_2} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta \varpi_3} \\ \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_3} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta \varpi_3} \\ \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta \varpi_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta \varpi_3} \\ \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta \varpi_2} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta \varpi_3} \\ \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta \varpi_3} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix}.$$

Cela fait, je pose

$$\alpha = \lambda \sqrt{\mu}.$$

Je divise les trois premières lignes du déterminant par $\sqrt{\mu}$; je divise ensuite les trois dernières colonnes par $\sqrt{\mu}$ (de sorte que le déterminant lui-même se trouve finalement divisé par μ^3).

Je fais ensuite $\mu = 0$.

J'observe que d'après ce que nous avons vu au paragraphe 11, Δa_1, Δa_2,

Δa_3 sont divisibles par μ. Si donc j'envisage le premier élément de la première ligne, cet élément après la division par $\sqrt{\mu}$ s'écrira

$$\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu}\, d\delta a_1} + \frac{1 - e^{\lambda T\sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}}$$

et quand on y fera $\mu = 0$ il deviendra $-\lambda T$.

De même le second élément de la première ligne s'écrit $\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu}\, d\delta a_2}$ et il tend vers zéro avec μ.

Ainsi quand on aura fait $\mu = 0$, les trois premiers éléments des trois premières lignes s'annuleront à l'exception des éléments de la diagonale principale qui deviendront égaux à $-\lambda T$.

Considérons maintenant les trois derniers éléments des trois dernières lignes; ils s'écriront

$$\frac{d\Delta\varpi_i}{\sqrt{\mu}\, d\delta\varpi_i} + \frac{1 - e^{\lambda T\sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta\varpi_k}{\sqrt{\mu}\, d\delta\varpi_i}$$

selon qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 11, $\Delta\varpi_k$ est dévoloppable suivant les puissances de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$; de plus pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_i$ ne dépend pas des $\delta\varpi_i$. On en conclura que $\frac{d\Delta\varpi_k}{d\delta\varpi_i}$ est divisible par μ.

Donc quand on fera $\mu = 0$, les trois derniers éléments des trois dernières lignes deviendront égaux à $-\lambda T$ ou à zéro, selon qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale.

Considérons maintenant les trois premiers éléments des trois dernières lignes $\frac{d\Delta\varpi_i}{d\delta a_k}$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 11, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{d\Delta\varpi_i}{d\delta a_k} = -T\frac{d^2 F_0}{dx_i\, dx_k}.$$

Passons enfin aux trois derniers éléments des trois premières lignes qui s'écrivent $\frac{d\Delta a_i}{\mu\, d\delta\varpi_k}$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 11, si dans F_1 on substitue a_1, a_2, a_3, $n_1 t + \varpi_1$, $n_2 t + \varpi_2$, $n_3 t + \varpi_3$ à la place de x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, on voit que F_1 devient une fonction périodique de t de période T et si l'on appelle ψ la valeur moyenne de cette fonction périodique, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{\Delta a_i}{\mu} = T\frac{d\psi}{d\varpi_i}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\Delta a_i}{\mu\, d\delta\varpi_k} = T\frac{d^2\psi}{d\varpi_i\, d\varpi_k}.$$

Il importe de remarquer que l'on a identiquement

$$n_1 \frac{d\psi}{d\varpi_1} + n_2 \frac{d\psi}{d\varpi_2} + n_3 \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Nous voyons donc que pour $\mu = 0$ on a

$$\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3 T^6} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1^2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1\, d\varpi_2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1\, d\varpi_3} \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1\, d\varpi_2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2\, d\varpi_3} \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1\, d\varpi_3} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2\, d\varpi_3} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2} \\ -\frac{d^2 F_0}{dx_1^2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_1\, dx_2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_1\, dx_3} & -\lambda & 0 & 0 \\ -\frac{d^2 F_0}{dx_1\, dx_2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_2^2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_2\, dx_3} & 0 & -\lambda & 0 \\ -\frac{d^2 F_0}{dx_1\, dx_3} & -\frac{d^2 F_0}{dx_2\, dx_3} & -\frac{d^2 F_0}{dx_3^2} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En égalant à zéro ce déterminant, on a une équation du sixième degré en λ; deux de ses racines sont nulles; nous n'en parlerons pas, car elles se rapportent aux deux solutions particulières de forme dégénérescente dont j'ai parlé plus haut. Les quatre autres solutions sont distinctes en général.

Il résulte alors du théorème IV (§ 2), que nous pourrons tirer de l'équation $\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3 T^6} = 0$, λ (et par conséquent α) sous la forme d'une série développée suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$. J'ajouterai que λ peut se développer suivant les puissances de μ et que le développement de α ne contient que des puissances impaires de $\sqrt{\mu}$. En effet les racines de l'équation $G(\alpha, \mu) = 0$ doivent être deux à deux égales et de signe contraire (*cf.* § 10). Donc α doit changer de signe quand je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Démontrons maintenant que S_i et T_i peuvent aussi se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

S_i et T_i nous sont donnés en effet par les équations suivantes :

$$(2'') \quad \begin{cases} \frac{dS_i}{dt} - \alpha S_i = \sum \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k} S_k + \sum \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k} T_k, \\ \frac{dT_i}{dt} + \alpha T_i = -\sum \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k} S_k - \sum \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k} T_k. \end{cases}$$

Soit β_i la valeur initiale de S_i et β'_i celle de T_i; les valeurs de S_i et de T_i pour une valeur quelconque de t pourront d'après le théorème III, (§ 2), se déve-

lopper suivant les puissances de μ, de α, des β_i et des β'_i. De plus, à cause de la forme linéaire des équations, ces valeurs seront des fonctions linéaires et homogènes des β_i et des β'_i.

Soit, pour employer des notations analogues à celle du paragraphe 9, $\beta_i + \psi_i$ la valeur de S_i et $\beta'_i + \psi'_i$ celle de T_i pour $t = T$. La condition pour que la solution soit périodique, c'est que l'on ait

$$\psi_i = \psi'_i = 0.$$

Les ψ_i et les ψ'_i sont des fonctions linéaires des β_i et des β'_i ; ces équations sont donc linéaires par rapport à ces quantités. En général ces équations n'admettent d'autre solution que

$$\beta_i = \beta'_i = 0,$$

de sorte que les équations (2″) n'ont d'autre solution périodique que

$$S_i = T_i = 0.$$

Mais nous savons que si l'on choisit α de façon à satisfaire à $G(\alpha, \mu) = 0$, les équations (2″) admettent des solutions périodiques autres que $S_i = T_i = 0$. Par conséquent le déterminant des équations linéaires $\psi_i = \psi'_i = 0$ est nul. Nous pourrons donc tirer de ces équations les rapports $\frac{\beta_i}{\beta'_1}$ et $\frac{\beta'_i}{\beta'_1}$ sous la forme de séries développées suivant les puissances de α et de μ.

Comme β'_1 reste arbitraire, nous conviendrons de prendre $\beta'_1 = 1$ de telle sorte que la valeur initiale de T_1 soit égale à 1. Les β_i et et les β'_i sont alors développés suivant les puissances de α et de μ; mais les S_i et T_i sont comme nous l'avons vu développables suivant les puissances de α. de μ, des β_i et des β'_i et d'autre part α est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Donc les S_i et les T_i seront développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

C. Q. F. D.

On aura en particulier :

$$T_1 = T_1^0 + T_1^1 \sqrt{\mu} + T_1^2 \mu + \ldots.$$

Comme, d'après notre hypothèse, β'_1 qui est la valeur initiale de T_1 doit être égale à 1, quel que soit μ, on aura pour $t = 0$:

$$T_1^0 = 1, \qquad 0 = T_1^1 = T_1^2 = \ldots = T_1^m = \ldots.$$

Ayant ainsi démontré l'existence de nos séries, nous allons chercher à en déterminer les coefficients.

Nous avons

$$S_i^0 = 0, \qquad T_i^0 = \eta_i^0$$

et

$$\xi_i = e^{\alpha t}(S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + \ldots), \qquad \eta_i = e^{\alpha t}(T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + \ldots),$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\dfrac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dS_i^1}{dt} + \ldots + \alpha S_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}S_i^1 + \ldots\right|, \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\dfrac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dT_i^1}{dt} + \ldots + \alpha T_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}T_i^1 + \ldots\right|. \end{cases}$$

Nous développerons d'autre part les dérivées secondes de F qui entrent comme coefficients dans les équations (2) en écrivant

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2F}{dy_i\,dx_k} = A_{ik}^0 + \mu A_{ik}^2 + \mu^2 A_{ik}^4 + \ldots, \\ \dfrac{d^2F}{dy_i\,dy_k} = B_{ik}^0 + \mu B_{ik}^2 + \mu^2 B_{ik}^4 + \ldots, \\ -\dfrac{d^2F}{dx_i\,dx_k} = C_{ik}^0 + \mu C_{ik}^2 + \mu^2 C_{ik}^4 + \ldots, \\ -\dfrac{d^2F}{dx_i\,dy_k} = D_{ik}^0 + \mu D_{ik}^2 + \mu^2 D_{ik}^4 + \ldots. \end{cases}$$

Ces développements ne contiennent que des puissances entières de μ et ne possèdent pas comme les développements (4) des termes dépendants de $\sqrt{\mu}$.

On observera que

$$(6)\qquad A_{ik}^0 = B_{ik}^0 = D_{ik}^0 = 0, \qquad C_{ik}^m = C_{ki}^m, \qquad B_{ik}^m = B_{ki}^m, \qquad A_{ik}^m = -D_{ki}^m.$$

Nous substituons dans les équations (2) les valeurs (4) et (5) à la place des ξ, des η, de leurs dérivées et des dérivées secondes de F. Dans les expressions (4) je suppose que α soit développé suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, sauf lorsque cette quantité α entre dans un facteur exponentiel $e^{\alpha t}$.

Nous identifions ensuite en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$ et nous obtiendrons ainsi une série d'équations qui permettent de déterminer successivement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, S_i^0, S_i^1, \ldots, T_i^0, T_i^1, \ldots$.

Je n'écrirai que les premières de ces équations obtenues en égalant successivement les termes tout connus, les termes en $\sqrt{\mu}$, les termes en μ, etc. Je fais d'ailleurs disparaître le facteur $e^{\alpha t}$ qui se trouve partout.

Égalons d'abord les termes en $\sqrt{\mu}$; il vient

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dS_i^1}{dt} + \alpha_1 S_i^0 = \sum\limits_k A_{ik}^0 S_k^1 + \sum\limits_k B_{ik}^0 T_k^1, \\ \dfrac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 T_i^0 = \sum\limits_k C_{ik}^0 S_k^1 + \sum\limits_k D_{ik}^0 T_k^1. \end{cases}$$

Égalons les termes en μ, il vient

$$(8)\qquad \frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 + \alpha_2 S_i^0 = \sum_k (A_{ik}^0 S_k^2 + A_{ik}^2 S_k^0 + B_{ik}^0 T_k^2 + B_{ik}^2 T_k^0) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

outre trois équations analogues donnant les $\frac{dT_i^2}{dt}$.

Si l'on tient compte maintenant des relations (6), les équations (7) deviennent

$$\frac{dS_i^1}{dt} = 0, \qquad \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_i \eta_i^0 = \sum_k C_{ik}^0 S_k^1.$$

La première de ces équations montre que S_1^1, S_2^1 et S_3^1 sont des constantes. Quant à la seconde, elle montre que $\frac{dT_i^1}{dt}$ est une constante; mais comme T_i^1 doit être une fonction périodique, cette constante doit être nulle, de sorte qu'on a

$$(9)\qquad \alpha_1 \eta_i^0 = C_{i1}^0 S_1^1 + C_{i2}^0 S_2^1 + C_{i3}^0 S_3^1,$$

ce qui établit trois relations entre les trois constantes η_i^0, les trois constantes S_i^1 et la quantité inconnue α_1.

De son côté l'équation (8) s'écrira

$$\frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 = \sum_k B_{ik}^2 \eta_k^0.$$

Les B_{ik}^2 sont des fonctions périodiques de t; développons-les d'après la formule de Fourier et soit b_{ik} le terme tout connu de B_{ik}^2. Il viendra

$$\alpha_1 S_i^1 = \sum_k b_{ik} \eta_k^0$$

ou en tenant compte des équations (9), il viendra

$$(10)\qquad \alpha_1^2 S_i^1 = \sum_{k=1}^{k=3} b_{ik} (C_{k1}^0 S_1^1 + C_{k2}^0 S_2^1 + C_{k3}^0 S_3^1).$$

En faisant dans cette équation (10) $i = 1$, 2 et 3, nous aurons trois relations linéaires et homogènes entre les trois constantes S_i^1. En éliminant ces trois constantes, nous aurons alors une équation du troisième degré qui déterminera λ_1^2.

Si nous posons pour abréger

$$e_{ik} = b_{i1} C_{1k}^0 + b_{i2} C_{2k}^0 + b_{i3} C_{3k}^0,$$

l'équation due à cette élimination s'écrira

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} e_{11}-\alpha_1^2 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22}-\alpha_1^2 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}-\alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{13}^0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & C_{21}^0 & C_{22}^0 & C_{23}^0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & C_{31}^0 & C_{32}^0 & C_{33}^0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La détermination de α_1 est la seule partie du calcul qui présente quelque difficulté.

Les équations analogues à (7) et à (8) formées en égalant dans les équations (2) les coefficients des puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, permettent ensuite de déterminer sans peine les α_k, les S_i^m et les T_i^m. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Les exposants caractéristiques α sont développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.

Concentrant donc toute notre attention sur la détermination de α_1, nous allons étudier spécialement l'équation (11). Nous devons chercher d'abord à déterminer les quantités C_{ik}^0 et b_{ik}.

On a évidemment

$$C_{ik}^0 = -\frac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} \qquad \text{et} \qquad B_{ik}^2 = \frac{d^2 F_1}{dy_i^0\, dy_k^0}$$

ou

$$B_{ik}^2 = -\Sigma A\, m_i m_k \sin\omega \qquad (\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h)$$

et

$$b_{ik} = -\mathcal{S} A\, m_i m_k \sin\omega.$$

D'après les conventions faites dans le paragraphe précédent, la sommation représentée par le signe Σ s'étend à tous les termes, quelles que soient les valeurs entières attribuées à m_1, m_2 et m_3. La sommation représentée par le signe $\mathcal{S}$ s'étend seulement aux termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0.$$

Sous le signe $\mathfrak{S}$ nous avons par conséquent

$$\omega = m_2\varpi_2 + m_3\varpi_3 + h.$$

Cela nous permet d'écrire

$$b_{ik} = \frac{d^2\psi}{d\varpi_i\, d\varpi_k} \qquad (\text{pour } i \text{ et } k = 2 \text{ ou } 3).$$

Si un ou deux des indices i et k sont égaux à 1, b_{ik} sera défini par la relation

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} + n_3 b_{i3} = 0.$$

Nous allons à l'aide de cette dernière relation transformer l'équation (11) de façon à mettre en évidence l'existence de deux racines nulles et à réduire l'équation au quatrième degré.

Je trouve en effet par une simple transformation de déterminant et en divisant par α_1^2 :

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & b_{23} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & b_{33} & b_{32} & 0 \\ C_{13}^0 & C_{23}^0 & C_{33}^0 & -\alpha_1 & 0 & n_3 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{32}^0 & 0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & C_{31}^0 & 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas particulier où l'on n'a plus que deux degrés de liberté, cette équation s'écrit

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & \dfrac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$n_1^2\alpha_1^2 = \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}\left(n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0\right).$$

L'expression $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ ne dépend que de x_1^0 et x_2^0 ou si l'on veut de n_1 et de n_2. Quand nous nous serons donné les deux nombres n_1 et n_2 dont le rapport doit être commensurable, nous pourrons regarder $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ comme une constante donnée. Alors le signe de α_1^2 dépend seulement de celui de $\dfrac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$.

Quand on s'est donné n_1 et n_2, on forme l'équation

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0, \tag{12}$$

qui est l'équation (7) du paragraphe précédent. Nous avons vu dans ce paragraphe qu'à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique.

Considérons le cas général où l'équation (12) n'a que des racines simples; chacune de ces racines correspond alors à un maximum ou à un minimum de ψ. Mais la fonction ψ étant périodique présente dans chaque période au moins un maximum et un minimum et précisément autant de maxima que de minima.

Or pour les valeurs de ϖ_2 correspondant à un minimum, $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$ est positif; pour les valeurs correspondant à un maximum, cette dérivée est négative.

Donc l'équation (12) aura précisément autant de racines pour lesquelles cette dérivée sera positive, que de racines pour lesquelles cette dérivée sera négative, et par conséquent autant de racines pour lesquelles α_1^2 sera positif que de racines pour lesquelles α_1^2 sera négatif.

Cela revient à dire qu'il y aura précisément autant de solutions périodiques stables que de solutions instables, en donnant à ce mot le même sens que dans le paragraphe 10.

Ainsi, à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, correspondront au moins une solution périodique stable et une solution périodique instable et précisément autant de solutions stables que de solutions instables pourvu que μ soit suffisamment petit.

Je n'examinerai pas ici comment ces résultats s'étendraient au cas où l'équation (12) aurait des racines multiples.

Voici comment il faudrait continuer le calcul.

Imaginons que l'on ait déterminé complètement les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et les fonctions $S_i^0, S_i^1, \ldots, S_i^m, T_i^0, T_i^1, \ldots, T_i^{m-1}$, et que l'on connaisse les fonctions S_i^{m+1} et T_i^m *à une constante près*. Supposons qu'on se propose ensuite de calculer α_{m+1}, d'achever la détermination des fonctions S_i^{m+1} et T_i^m et de déterminer ensuite les fonctions S_i^{m+2} et T_i^{m+1} *à une constante près*.

En égalant les puissances semblables de μ dans les équations (4), on obtient des équations de la forme suivante, analogues aux équations (7) et (8).

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{dT_i^{m+1}}{dt}+\sum_k C_{ik}^0 S_k^{m+1}-\alpha_1 T_i^m-\alpha_{m+1}T_i^0=\text{quantité connue}\\ &-\frac{dS_i^{m+2}}{dt}+\sum_k B_{ik}^0 T_k^m-\alpha_1 S_i^{m+1}-\alpha_{m+1}S_i^1=\text{quantité connue}\end{aligned}\right. \qquad (i=1,2,3).$$

Les deux membres de ces équations (12) sont des fonctions périodiques de t. Égalons la valeur moyenne de ces deux membres. Si nous désignons par $[U]$ la valeur moyenne d'une fonction périodique quelconque U, si nous observons que si U est périodique on a

$$\left[\frac{dU}{dt}\right] = 0,$$

si nous rappelons que, T_k^m étant connu à une constante près, $T_k^m - [T_k^m]$ et $[B_k^2(T_k^m - [T_k^m])]$ sont des quantités connues, nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} \sum_k C_{ik}^0 [S_k^{m+1}] - \alpha_1 [T_i^m] - \alpha_{m+1} T_i^0 = \text{quantité connue} \\ \sum_k b_{ik} [T_k^m] - \alpha_1 [S_i^{m+1}] - \alpha_{m+1} S_i^1 = \text{quantité connue} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ces équations (14) vont nous servir à calculer α_{m+1}, $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ et par conséquent à achever la détermination des fonctions T_i^m et S_i^{m+1} qui ne sont encore connues qu'à une constante près.

Si l'on additionne les équations (14) après les avoir respectivement multipliées par S_1^1, S_2^1, S_3^1, T_1^0, T_2^0, T_3^0 on trouve

$$2\sum_i S_i^1 T_i^0 \alpha_{m+1} = \text{quantité connue},$$

ce qui détermine α_{m+1}.

Si dans les équations (14) on remplace α_{m+1} par la valeur ainsi trouvée, on a pour déterminer les six inconnues $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ six équations linéaires dont cinq seulement sont indépendantes.

Cela posé, on déterminera $[T_1^m]$ par la condition que $[T_1^m]$ soit nul pour $t = 0$, conformément à l'hypothèse faite plus haut, et les cinq équations (14) restées indépendantes permettront de calculer les cinq autres inconnues.

Les équations (13) nous permettront ensuite de calculer $\frac{dT_i^{m+1}}{dt}$ et $\frac{dS_i^{m+2}}{dt}$ et par conséquent de déterminer les fonctions T_i^{m+1} et S_i^{m+2} à une constante près ; et ainsi de suite.

13. — Solutions asymptotiques.

Soient

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n équations différentielles simultanées. Les X sont des fonctions des x et de t.

Par rapport aux x elles peuvent être développées en séries de puissances.

Par rapport à t, elles sont périodiques de période 2π.

Soit

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad \ldots \qquad x_n = x_n^0$$

une solution particulière périodique de ces équations. Les x_i^0 seront des fonctions de t périodiques de période 2π. Posons

$$x_i = x_i^0 + \xi_i.$$

Il viendra

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i. \tag{2}$$

Les Ξ seront des fonctions des ξ et de t, périodiques par rapport à t et développées suivant les puissances des ξ; mais il n'y aura plus de termes indépendants des ξ.

Si les ξ sont très petits et qu'on néglige leurs carrés, les équations se réduisent à

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d\Lambda_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{d\Lambda_i}{dx_2^0}\xi_2 + \ldots + \frac{d\Lambda_i}{dx_n^0}\xi_n, \tag{3}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Elles sont linéaires et à coefficients périodiques. On connaît la forme de leur solution générale, on trouve

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{11} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{21} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{12} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{22} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{1n} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{2n} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{nn};
\end{aligned}$$

les A sont des constantes d'intégration, les α des constantes fixes qu'on appelle exposants caractéristiques, les φ des fonctions périodiques de t.

Si alors nous posons

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1\varphi_{11} + \eta_2\varphi_{21} + \ldots + \eta_n\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= \eta_1\varphi_{12} + \eta_2\varphi_{22} + \ldots + \eta_n\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= \eta_1\varphi_{1n} + \eta_2\varphi_{2n} + \ldots + \eta_n\varphi_{nn},
\end{aligned}$$

les équations (2) deviendront

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \mathrm{H}_i \tag{2'}$$

où les H_i sont des fonctions de t et des η de même forme que les Ξ.

Nous pourrons d'ailleurs écrire

$$(2) \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \Pi_i^1 + \Pi_i^2 + \ldots + \Pi_i^p + \ldots;$$

Π_i^p représente l'ensemble des termes de Π_i qui sont de degré p par rapport aux η.

Quant aux équations (3), elles deviennent

$$(3') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \Pi_i^1 = \alpha_i \eta_i.$$

Cherchons maintenant la forme des solutions générales des équations (2) et (2').

Je dis que nous devrons trouver $\eta_i =$ fonction développée suivant les puissances de $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}$, ..., $A_n e^{\alpha_n t}$ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t.

Nous pouvons écrire alors

$$(4') \qquad \eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \ldots + \eta_i^p + \ldots,$$

η_i^p représentant l'ensemble des termes de η_i qui sont de degré p par rapport aux A.

Nous remplacerons les η_i par leurs valeurs dans Π_i^p et nous trouverons

$$\Pi_i^p = \Pi_i^{p,p} + \Pi_i^{p,p+1} + \ldots + \Pi_i^{p,q} + \ldots,$$

$\Pi_i^{p,q}$ désignant l'ensemble des termes qui sont de degré q par rapport aux A.

Nous trouverons alors

$$\frac{d\eta_i^1}{dt} = \alpha_i \eta_i^1, \qquad \eta_i^1 = A_i e^{\alpha_i t},$$

$$\frac{d\eta_i^2}{dt} - \alpha_i \eta_i^2 = \Pi_i^{2,2}, \qquad \frac{d\eta_i^3}{dt} - \alpha_i \eta_i^3 = \Pi_i^{2,3} + \Pi_i^{3,3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = \Pi_i^{2,q} + \Pi_i^{3,q} + \ldots + \Pi_i^{q,q} = K_q.$$

Ces équations permettront de calculer successivement par récurrence η_i^2, η_i^3, ..., η_i^q, ... En effet K_q ne dépend que des η^1, η^2, ..., η^{q-1}. Si nous supposons que ces quantités aient été préalablement calculées, nous pourrons écrire K_q sous la forme suivante :

$$K_1 = \Sigma A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} e^{(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n)t} \psi,$$

les β étant des entiers positifs dont la somme est q et ψ une fonction périodique.

On peut écrire encore :

$$\psi = \Sigma C e^{\gamma t \sqrt{-1}},$$

C étant un coefficient généralement imaginaire et γ un entier positif ou négatif. Nous écrirons pour abréger :

$$A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} = A^q, \qquad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots + \alpha_n \beta_n = \Sigma \alpha \beta,$$

et il viendra

$$\frac{d\eta_l'}{dt} - \alpha_l \eta_l' = \Sigma C A^q e^{t(\gamma \sqrt{-1} + \Sigma \alpha \beta)}.$$

Or on peut satisfaire à cette équation en faisant

$$\eta_l' = \sum \frac{C A^q e^{t(\gamma \sqrt{-1} + \Sigma \alpha \beta)}}{\gamma \sqrt{-1} + \Sigma \alpha \beta - \alpha_l}.$$

Il y aurait exception dans le cas où l'on aurait

$$\gamma \sqrt{-1} + \Sigma \alpha \beta - \alpha_l = 0,$$

auquel cas il s'introduirait dans les formules des termes en t. Nous réserverons ce cas qui ne se présente pas en général.

Nous devons maintenant traiter la question de la convergence de ces séries. La seule difficulté provient d'ailleurs comme on va le voir des diviseurs

$$(5) \qquad \gamma \sqrt{-1} + \Sigma \alpha \beta - \alpha_l.$$

Cette convergence est une conséquence immédiate des résultats obtenus dans le paragraphe 3, mais je préfère en donner une démonstration directe.

Remplaçons les équations $(2')$ par les suivantes :

$$(2'') \qquad \eta_l = \frac{1}{\varepsilon} A_l e^{\alpha_l t} + H_l^2 + H_l^3 + \ldots + H_l^p + \ldots.$$

Définissons H_l^p. On voit sans peine que H_l^p est de la forme suivante :

$$H_l^p = \Sigma C \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n} e^{\gamma t \sqrt{-1}}.$$

C est une constante quelconque, les β sont des entiers positifs dont la somme est p, γ est un entier positif ou négatif. Nous prendrons alors

$$H_l^p = \Sigma |C| \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n}.$$

Les séries ainsi obtenues seront convergentes pourvu que les séries trigonométriques qui définissent les fonctions périodiques dont dépendent les H convergent absolument et uniformément; or cela aura toujours lieu parce que ces fonctions périodiques sont analytiques. Quant à ε, c'est une constante positive.

On peut tirer des équations (2″) les η sous la forme suivante :

$$(4'') \qquad \eta_i = \Sigma M \varepsilon^{-\Sigma\beta} A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} e^{i(\Sigma\alpha\beta)t}.$$

Plusieurs termes pourront d'ailleurs correspondre aux mêmes exposants β. Si l'on compare avec les séries tirées de (2′) qui s'écrivent

$$\eta_i = \Sigma N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t[\Sigma\alpha\beta + \gamma\sqrt{-1}]},$$

voici ce qu'on observe :

1° M est réel positif et plus grand que $|N|$.

2° Π désigne le produit des diviseurs (5) $(q < \Sigma\beta)$.

Si donc la série (4″) converge et si aucun des diviseurs (5) n'est plus petit que ε, la série (4′) convergera également. Voici donc comment on peut énoncer la condition de convergence.

La série converge si l'expression

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i$$

ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée ε pour des valeurs entières et positives des β et entières (positives ou négatives) de γ; c'est-à-dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppe, le premier les α et $+\sqrt{-1}$, le second les α et $-\sqrt{-1}$, ne contient l'origine; ou si toutes les quantités α ont leurs parties réelles de même signe et si aucune d'elles n'a sa partie réelle nulle.

Que ferons-nous alors s'il n'en est pas ainsi?

Supposons par exemple que k des quantités α aient leur partie réelle positive, et que $n - k$ aient leur partie réelle négative ou nulle. Il arrivera alors que la série (4′) restera convergente si l'on y annule les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle, de sorte que ces séries ne nous donneront plus la solution générale des équations proposées, mais une solution contenant seulement k constantes arbitraires.

Si on suppose que les équations données rentrent dans les équations de la Dynamique, nous avons vu que n est pair et que les α sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Alors si k d'entre eux ont leur partie réelle positive, k auront leur partie réelle négative et $n - 2k$ auront leur partie réelle nulle. En prenant d'abord les α qui ont leur partie réelle positive, on obtiendra une solution particulière

contenant k constantes arbitraires; on en obtiendra une seconde en prenant les α qui ont leur partie réelle négative.

Dans le cas où aucun des α n'a sa partie réelle nulle et en particulier si tous les α sont réels, on a d'ailleurs

$$k = \frac{n}{2}.$$

Nous allons nous placer maintenant dans un cas très particulier. Supposons d'abord $n = 2$, de telle façon que les équations (1) se réduisent à

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2.$$

Supposons de plus que

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} = 0. \tag{6}$$

La situation du système dépend alors des trois quantités x_1, x_2 et t; on peut donc la représenter par la position d'un point dans l'espace; voici quel mode de représentation on peut adopter pour fixer les idées :

Les coordonnées rectangulaires du point représentatif seront $e^{x_1}\cos t$, $e^{x_1}\sin t$ et x_2. De cette façon :

1° à tout système de valeurs des trois quantités x_1, x_2 et t correspondra un point de l'espace;

2° à tout point de l'espace correspondra un seul système de valeurs des quantités x_1, x_2, $\cos t$, $\sin t$, et par conséquent une seule situation du système si l'on ne considère pas comme distinctes deux situations qui ne diffèrent que parce que t a augmenté d'un certain nombre de périodes 2π;

3° si l'on fait varier t, (x_1 et x_2 restant constants) le point représentatif décrit une circonférence;

4° à la condition $x_1 = x_2 = 0$ correspond le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$;

5° à la condition $x_1 = -\infty$ correspond l'axe des z.

A toute solution des équations (1) correspondra une courbe décrite par le point représentatif. Si la solution est périodique, cette courbe est fermée.

Considérons donc une courbe fermée C correspondant à une solution périodique.

Formons les équations (2), (3), (2′) et (3′) relatives à cette solution périodique et imaginons que l'on calcule les quantités α correspondantes.

Ces quantités sont au nombre de deux, et en vertu de la relation (6) elles sont égales et de signe contraire.

Deux cas peuvent se présenter : ou bien leur carré est négatif et la solution périodique est stable; ou bien leur carré est positif et la solution est instable.

Plaçons-nous dans ce dernier cas et appelons $+\alpha$ et $-\alpha$ les deux valeurs de l'exposant α; nous pourrons supposer alors que α est réel positif.

Cela posé, les séries (4') seront développées suivant les puissances croissantes de $Ae^{\alpha t}$ et de $Be^{-\alpha t}$; mais elles ne seront pas convergentes si A et B y entrent à la fois; elles le deviendront au contraire, si l'on y fait soit $A = 0$, soit $B = 0$.

Faisons d'abord $A = 0$; alors les η seront développés suivant les puissances de $Be^{-\alpha t}$; si donc t croît indéfiniment, η_1 et η_2 tendent simultanément vers zéro. Les solutions correspondantes peuvent s'appeler *solutions asymptotiques*; car pour $t = +\infty$, les η et par conséquent les ξ tendent vers zéro, ce qui veut dire que la solution asymptotique se rapproche asymptotiquement de la solution périodique considérée.

Si l'on fait de même $B = 0$, les η sont développés suivant les puissances de $Ae^{\alpha t}$; ils tendent donc vers zéro quand t tend vers $-\infty$. Ce sont donc encore des solutions asymptotiques.

Il y a donc deux séries de solutions asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Chacune d'elles contient une constante arbitraire, la première B, la seconde A.

A chacune de ces séries de solutions asymptotiques correspondra une série de courbes se rapprochant asymptotiquement de la courbe fermée C et qu'on pourra appeler courbes asymptotiques. L'ensemble de ces courbes asymptotiques formera une *surface asymptotique*. Il y aura deux surfaces asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Ces deux surfaces iront passer par la courbe fermée C.

Supposons que dans les équations (1) les X dépendent d'un paramètre μ et que les fonctions X soient développables suivant les puissances de ce paramètre.

Imaginons que pour $\mu = 0$, les exposants caractéristiques α soient tous distincts de telle façon que ces exposants, étant définis par l'équation $G(\alpha, \mu) = 0$ du paragraphe précédent, soient eux-mêmes développables suivant les puissances de μ.

Supposons enfin qu'on ait, ainsi que nous venons de le dire, annulé toutes les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle.

Les séries (4') qui définissent les quantités η_i dépendent alors de μ. Je me

propose d'établir que ces séries peuvent être développées, non seulement suivant les puissances des $A_i e^{\alpha_i t}$, mais encore suivant les puissances de μ.

Considérons l'inverse de l'un des diviseurs (5) : $(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i)^{-1}$. Je dis que cette expression peut être développée suivant les puissances de μ.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les k exposants caractéristiques dont la partie réelle est positive et que nous sommes convenus de conserver. Chacun d'eux est développable suivant les puissances de μ. Soit α_i^0 la valeur de α_i pour $\mu = 0$; nous pourrons prendre μ_0 assez petit pour que α_i diffère aussi peu que nous voudrons de α_i^0 quand $|\mu| < \mu_0$. Soit alors h une quantité positive plus petite que la plus petite des parties réelles des k quantités $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0$; nous pourrons prendre μ_0 assez petit pour que, quand $|\mu| < \mu_0$, les k exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ aient leur partie réelle plus grande que h.

La partie réelle de $\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i$ sera alors plus grande que h (si $\beta_i > 0$), de sorte qu'on aura

$$|\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i| > h.$$

Ainsi si $|\mu| < \mu_0$, la fonction $(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i)^{-1}$ reste uniforme, continue, finie et plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{h}$.

Nous en conclurons d'après un théorème bien connu que cette fonction est développable suivant les puissances de μ et que les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux du développement de $\dfrac{1}{h\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}$.

Il est à remarquer que les nombres h et μ_0 sont indépendants des entiers β et γ.

Il y aurait exception dans le cas où β_i serait nul. La partie réelle du diviseur (5) pourrait alors être plus petite que h et même être négative. Elle est égale en effet à la partie réelle de $\Sigma\alpha\beta$ qui est positive, moins la partie réelle de α_i qui est également positive et qui peut être plus grande que celle de $\Sigma\alpha\beta$ si β_i est nul.

Supposons que la partie réelle de α_i reste plus petite qu'un certain nombre h_1 tant que $|\mu| < \mu_0$. Alors si

$$\Sigma\beta > \frac{h_1}{h} + 1, \tag{7}$$

la partie réelle de (5) est certainement plus grande que h; il ne peut donc y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels l'inégalité (7) n'a pas lieu.

Supposons maintenant que la partie imaginaire des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ reste constamment plus petite en valeur absolue qu'un certain nombre positif h_2; si l'on a alors

$$(8) \qquad \gamma > h_2 \Sigma\beta + h,$$

la partie imaginaire de (5) et par conséquent son module sera encore plus grand que h; de telle sorte qu'il ne peut y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels aucune des inégalités (7) et (8) n'a lieu. Mais ces diviseurs qui ne satisfont à aucune de ces inégalités sont *en nombre fini*.

D'après une hypothèse que nous avons faite plus haut, aucun d'eux ne s'annule pour les valeurs de μ que nous considérons; nous pouvons donc prendre h et μ_0 assez petits pour que la valeur absolue de l'un quelconque d'entre eux reste plus grande que h quand $|\mu|$ reste plus petit que μ_0.

Alors l'inverse d'un diviseur (5) *quelconque* est développable suivant les puissances de μ et les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux de $\dfrac{1}{h\left(1-\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)}$. Nous avons écrit plus haut :

$$H_i'' = \Sigma C \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n} e^{\gamma\sqrt{-1}}.$$

D'après nos hypothèses, C peut être développé suivant les puissances de μ de telle sorte que je puis poser

$$C = \Sigma E \mu^l, \qquad H_i'' = \Sigma E \mu^l \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n} e^{\gamma\sqrt{-1}}.$$

Reprenons maintenant les équations (2″) en y faisant

$$\varepsilon = h\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right), \qquad \overline{H}_i'' = \Sigma |E| \mu^l \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n}.$$

Les seconds membres des équations (2″) seront alors des séries convergentes ordonnées selon les puissances de μ, de $\eta_1, \eta_2, \ldots$ et η_n.

On en tirera les η_i sous la forme de séries (4″) convergentes et ordonnées suivant les puissances de μ, $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}$, $\ldots$, $A_k e^{\alpha_k t}$.

Des équations (2′) nous tirerions d'autre part les η_i sous la forme de séries (4′) ordonnées suivant les puissances de μ, $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}$, $\ldots$, $A_k e^{\alpha_k t}$, $e^{t\sqrt{-1}}$, $e^{-t\sqrt{-1}}$. Chacun des termes de (4′) est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant de (4″) et comme les séries (4″) convergent, il en sera de même des séries (4′).

14. — Solutions asymptotiques des équations de la Dynamique.

Reprenons les équations (1) du paragraphe 11 :

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et les hypothèses faites à leur sujet au début de ce paragraphe 11.

Nous avons vu dans ce paragraphe 11 que ces équations admettent des solutions périodiques et nous pouvons en conclure que pourvu que l'un des exposants caractéristiques α correspondants soit réel, ces équations admettront aussi des solutions asymptotiques.

A la fin du paragraphe précédent, nous avons envisagé le cas où dans les équations (1) dudit paragraphe 13, les seconds membres X_i sont développables suivant les puissances de μ, mais où les exposants caractéristiques restent distincts les uns des autres pour $\mu = 0$.

Dans le cas des équations qui vont maintenant nous occuper, c'est-à-dire des équations (1) des paragraphes 11 et 14, les seconds membres sont encore développables selon les puissances de μ; mais tous les exposants caractéristiques sont nuls pour $\mu = 0$.

Il en résulte un grand nombre de différences importantes.

En premier lieu les exposants caractéristiques α ne sont pas développables suivant les puissances de μ, mais suivant celles de $\sqrt{\mu}$ (*cf.* § 12). De même les fonctions que j'ai appelées $\varphi_{i.k}$ au début du paragraphe 13 (et qui, dans le cas particulier des équations de la Dynamique qui nous occupe ici, ne sont autres que les fonctions S_i et T_i du paragraphe 12) sont développables, non suivant les puissances de μ, mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Alors dans les équations (2') du paragraphe 13 :

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i,$$

le second membre H_i est développé suivant les puissances des η_i, de $e^{t\sqrt{-1}}$, $e^{-t\sqrt{-1}}$ et de $\sqrt{\mu}$ (et non pas de μ).

On en tirera les η_i sous la forme des séries obtenues au paragraphe précédent

$$\eta_i = \Sigma N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n}}{H} e^{t[\Sigma\alpha\beta + \gamma\sqrt{-1}]},$$

et N et H seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Un certain nombre de questions se posent alors naturellement :

1° Nous savons que N et H sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; en est-il de même du quotient $\frac{N}{H}$?

2° S'il en est ainsi, il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des $A_i e^{\alpha_i t}$, de $e^{t\sqrt{-1}}$ et de $e^{-t\sqrt{-1}}$ qui satisfont *formellement* aux équations proposées; ces séries sont-elles convergentes?

3° Si elles ne sont pas convergentes, quel parti peut-on en tirer pour le calcul des solutions asymptotiques?

Je me propose de démontrer que l'on peut développer $\frac{N}{H}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et que par conséquent il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des $A_i e^{\alpha_i t}$, de $e^{t\sqrt{-1}}$ et de $e^{-t\sqrt{-1}}$ qui satisfont formellement aux équations (1). On pourrait en douter; en effet H est le produit d'un certain nombre des diviseurs (5) du paragraphe précédent. Tous ces diviseurs sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; mais quelques-uns d'entre eux, ceux pour lesquels γ est nul, s'annulent avec $\sqrt{\mu}$. Il peut donc arriver que H s'annule avec μ et contienne en facteur une certaine puissance de $\sqrt{\mu}$. Si alors N ne contenait pas cette même puissance en facteur, le quotient $\frac{N}{H}$ se développerait encore selon les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, mais le développement commencerait par des puissances négatives.

Je dis qu'il n'en est pas ainsi et que le développement de $\frac{N}{H}$ ne contient que des puissances positives de $\sqrt{\mu}$.

Voyons par quel mécanisme ces puissances négatives de $\sqrt{\mu}$ disparaissent. Posons

$$A_i e^{\alpha_i t} = w_i,$$

et considérons les x et les y comme des fonctions des variables t et w.

Il importe avant d'aller plus loin de faire la remarque suivante : parmi les $2n$ exposants caractéristiques α, deux sont nuls et les autres sont deux à deux égaux et de signe contraire. Nous ne conserverons que $n-1$ au plus de ces exposants en convenant de regarder comme nuls les coefficients A_i et les variables w_i qui correspondent aux $n+1$ exposants rejetés. Nous ne conserverons que ceux de ces exposants dont la partie réelle est positive.

Cela posé, les équations (1) deviennent

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{dy_i},$$

$$(3)\qquad \frac{dy_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Cherchons, en partant de ces équations, à développer les x_i et les $y_i - n_i t$ suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$ et des w de telle façon que les coefficients soient des fonctions périodiques de t.

Nous pouvons écrire

$$\alpha_k = \alpha_k^1 \sqrt{\mu} + \alpha_k^2 \mu + \ldots = \Sigma \alpha_k^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

car nous avons vu au paragraphe 12 comment on peut développer les exposants caractéristiques suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Écrivons d'autre part :

$$x_i = x_i^0 + x^1 \sqrt{\mu} + \ldots = \Sigma x_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

$$y_i - n_i t = y_i^0 + y_i^1 \sqrt{\mu} + \ldots = \Sigma y_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

les x_i^p et les y_i^p étant des fonctions de t et des w, périodiques par rapport à t et développables suivant les puissances de w.

Si dans les équations (2) et (3) nous substituons ces valeurs à la place de α_k, des x_i et des y_i, les deux membres de ces équations seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Égalons dans les deux membres des équations (2) les coefficients de $\mu^{\frac{p+1}{2}}$, et dans les deux membres des équations (3) les coefficients de $\mu^{\frac{p}{2}}$, nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i^{p+1}}{dt} + \displaystyle\sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^p}{dw_k} = Z_i^p + \sum_k \frac{d^2 F_1}{dy_i^0\, dy_k^0} y_k^{p-1}, \\ \dfrac{dy_i^p}{dt} + \displaystyle\sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} = T_i^p - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} x_k^p, \end{cases}$$

où Z_i^p et T_i^p ne dépendent que de $x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{p-1}, y_i^0, y_i^1, \ldots, y_i^{p-2}$. Convenons, comme nous l'avons fait plus haut, de représenter par $[U]$ la valeur moyenne de U, si U est une fonction périodique de t.

Des équations (4) nous pourrons alors déduire les suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_k \alpha_k^1 w_k \dfrac{d[x_i^p]}{dw_k} = [Z_i^p] + \sum_k \left[\dfrac{d^2 F_1}{dy_i^0\, dy_k^0} y_k^{p-1}\right], \\ \sum_k \alpha_k^1 w_k \dfrac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} = [T_i^p] - \sum_k \dfrac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} [x_k^p]. \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'un calcul préalable nous ait fait connaître :

$$x_i^0,\quad x_i^1,\quad \ldots,\quad x_i^{p-1},\quad x_i^p - [x_i^p] \quad \text{et} \quad y_i^0,\quad y_i^1,\quad \ldots,\quad y_i^{p-2},\quad y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}].$$

Les équations (5) vont nous permettre de calculer $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ et par conséquent x_i^p et y_i^{p-1}. Les équations (4) nous permettront ensuite de déterminer $x_i^{p+1} - [x_i^{p+1}]$ et $y_i^p - [y_i^p]$, de sorte que ce procédé nous fournira par récurrence tous les coefficients des développements de x_i et de y_i.

La seule difficulté est la détermination de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ par les équations (5).

Les fonctions $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ sont développées suivant les puissances croissantes des w et nous allons calculer les divers termes de ces développements en commençant par les termes du degré le moins élevé.

Pour cela nous allons reprendre les notations du paragraphe 12, c'est-à-dire que nous allons poser

$$-\frac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} = C_{ik}^0 \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{d^2 F_1}{dy_i^0\, dy_k^0}\right] = b_{ik}$$

(pour les valeurs nulles de w).

Si alors nous appelons ξ_i et η_i les coefficients de $w_1^{m_1} w_2^{m_2} \ldots w_{n-1}^{m_{n-1}}$ dans $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$, nous aurons pour déterminer ces coefficients les équations suivantes :

$$(6)\qquad \sum_k b_{ik}\eta_k - S\xi_i = \lambda_i, \qquad \sum_k C_{ik}^0 \xi_k - S\eta_i = \mu_i.$$

Dans ces équations (6) λ_i et μ_i sont des quantités connues, parce qu'elles ne dépendent que de

$$x_i^0,\quad x_i^1,\quad \ldots,\quad x_i^{p-1},\quad x_i^p - [x_i^p] \quad \text{et} \quad y_i^0,\quad y_i^1,\quad \ldots,\quad y_i^{p-2},\quad y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}],$$

ou des termes de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ dont le degré par rapport aux w est plus petit que

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}.$$

De plus nous avons posé pour abréger

$$S = m_1\alpha_1^1 + m_2\alpha_2^1 + \ldots + m_{n-1}\alpha_{n-1}^1.$$

Nous avons donc pour le calcul des coefficients ξ_i et η_i un système d'équations

linéaires. Il ne pourrait y avoir de difficulté que si le déterminant de ces équations était nul; or ce déterminant est égal à

$$S^2[S^2-(\alpha_1^1)^2][S^2-(\alpha_2^1)^2]\ldots[S^2-(\alpha_{n-1}^1)^2].$$

Il ne pourrait s'annuler que pour

$$S=0, \qquad S=\pm\alpha_i^1,$$

c'est-à-dire pour

$$m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}=0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

On ne pourrait donc rencontrer de difficulté que dans le calcul des termes du degré zéro ou 1 par rapport aux w.

Mais nous n'avons pas à revenir sur le calcul de ces termes; en effet nous avons appris à calculer les termes indépendants des w dans le paragraphe 11 et les coefficients de $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ dans le paragraphe 12.

Les termes indépendants des w ne sont en effet autre chose que les séries (8) du paragraphe 11 et les coefficients de $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ ne sont autre chose que les séries S_i et T_i du paragraphe 12.

Il me reste à dire un mot des premières approximations.

Nous donnerons aux x_i^0 des valeurs constantes qui ne sont autres que celles que nous avons désignées ainsi au paragraphe 11.

Nous aurons alors les équations suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy_i^0}{dt}=0, \qquad \frac{dx_i^1}{dt}=0, \qquad \frac{dy_i^1}{dt}+\sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k}=-\sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0\,dx_k^0}x_k^1,\\ &\qquad\qquad \frac{dx_i^2}{dt}+\sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k}=\frac{dF_1}{dy_i^0}.\end{aligned}\right.$$

Dans F_0 qui ne dépend que des x_i, ces quantités doivent être remplacées par x_i^0. Dans F_1 les x_i sont remplacés par x_i^0 et les y_i par $n_i t$. F_1 devient alors une fonction périodique de t dont la période est T. Nous désignerons par ψ comme dans les paragraphes 11 et 12 la valeur moyenne de cette fonction périodique F_1; ψ est alors une fonction périodique et de période 2π par rapport aux y_i^0.

Les deux premières équations (7) montrent que les y_i^0 et les x_i^1 ne dépendent que des w. En égalant dans les deux dernières équations (7) les valeurs moyennes des deux membres, il vient

$$(8)\qquad \Sigma\alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k}=\Sigma C_{ik}^0 x_k^1, \qquad \Sigma\alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k}=\frac{d\psi}{dy_i^0}.$$

Ces équations (8) doivent servir à déterminer les y_i^0 et les x_i^1 en fonctions des ϖ. Peut-on satisfaire à ces équations en substituant à la place des y_i^0 et des x_i^1 des séries développées suivant les puissances des ϖ?

Pour nous en rendre compte envisageons les équations différentielles suivantes :

$$(9) \qquad \frac{dy_i^0}{dt} = \Sigma C_{ik}^0 x_k^1, \qquad \frac{dx_i^1}{dt} = \frac{d\Omega}{dy_i^0}.$$

Ces équations différentielles où les fonctions inconnues sont les y_i^0 et les x_i admettront une solution périodique

$$x_i^1 = 0, \qquad y_i^0 = \varpi_i,$$

ϖ_i étant la quantité désignée ainsi au paragraphe 11.

Les exposants caractéristiques relatifs à cette solution périodique sont précisément les quantités α_k^1. Parmi ces quantités nous sommes convenus de ne conserver que celles dont la partie réelle est positive. Les équations (9) admettent un système de solutions asymptotiques et il est aisé de voir que ces solutions se présentent sous la forme de séries développées suivant les puissances des ϖ. Ces séries satisferont alors aux équations (8). Ces équations peuvent donc être résolues.

Les x_i^1 et les y_i^0 étant ainsi déterminés, le reste du calcul ne présente plus comme nous l'avons vu aucune difficulté. Il existe donc des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des ϖ et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui satisfont formellement aux équations (1).

Cela prouve que le développement de $\frac{\lambda}{\Pi}$ ne débute jamais par une puissance négative de $\sqrt{\mu}$.

Malheureusement les séries ainsi obtenues ne sont pas convergentes.

Soit en effet $\frac{1}{\sqrt{-1}\,\gamma + \Sigma\alpha_i\beta - \alpha_i}$. Si γ n'est pas nul, cette expression est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; mais le rayon de convergence de la série ainsi obtenue tend vers zéro quand $\frac{\gamma}{\Sigma\beta}$ tend vers zéro.

Si donc on développe les diverses quantités $\frac{1}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ on pourra toujours, parmi ces quantités, en trouver une infinité pour lesquelles le rayon de convergence du développement est aussi petit qu'on le veut.

On pourrait encore espérer, quelque invraisemblable que cela puisse paraître, qu'il n'en est pas de même pour les développements des diverses

quantités $\frac{N}{\Pi}$; mais nous verrons dans la suite d'une façon rigoureuse qu'il n'en est pas ainsi en général; il faut donc renoncer à ce faible espoir et conclure que les séries que nous venons de former sont divergentes.

Mais quoiqu'elles soient divergentes ne peut-on en tirer quelque parti?

Considérons d'abord la série suivante qui est plus simple que celle que nous avons en vue :

$$F(w, \mu) = \sum_n \frac{w^n}{1 + n\mu}.$$

Cette série converge uniformément quand μ reste positif et que w reste plus petit en valeur absolue qu'un certain nombre positif w_0 plus petit que 1. De même la série

$$\frac{1}{p!} \frac{d^p F(w, \mu)}{d\mu^p} = \pm \sum \frac{n^{p-1} w^n}{(1 + n\mu)^p}$$

converge uniformément.

Si maintenant l'on cherche à développer $F(w, \mu)$ suivant les puissances de μ, la série à laquelle on est conduit

$$\Sigma w^n (-n)^p \mu^p \tag{10}$$

ne converge pas. Si dans cette série on néglige tous les termes où l'exposant de μ est supérieur à p, on obtient une certaine fonction $\Phi_p(w, \mu)$. Il est aisé de voir que l'expression $\frac{F(w, \mu) - \Phi_p(w, \mu)}{\mu^p}$ tend vers zéro quand μ tend vers zéro par valeurs positives, de sorte que la série (10) représente asymptotiquement la fonction $F(w, \mu)$ pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de Stirling représente asymptotiquement la fonction eulérienne pour les grandes valeurs de x.

Les séries divergentes que nous avons appris à former dans le présent paragraphe sont tout à fait analogues à la série (10).

Considérons en effet l'une des séries

$$\sum \frac{N}{\Pi} w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t \sqrt{-1}} = F(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \ldots, w_k, t) \tag{10'}$$

et

$$\Sigma w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t \sqrt{-1}} \frac{d^p \left(\frac{N}{\Pi}\right)}{(d\sqrt{\mu})^p} = \frac{d^p F}{(d\sqrt{\mu})^p};$$

ces séries sont uniformément convergentes pourvu que les w restent inférieurs en valeur absolue à certaines limites et que $\sqrt{\mu}$ reste réel.

Si l'on développe $\overset{\backslash}{\underset{\mathrm{II}}{}}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, les séries (10′) sont divergentes ainsi que nous l'avons dit. Supposons qu'on néglige dans le développement les termes où l'exposant de $\sqrt{\mu}$ est supérieur à p, on obtiendra une certaine fonction $\Phi_p(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \ldots, w_k, t)$ qui sera développable suivant les puissances des w, $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui sera un polynome de degré p en $\sqrt{\mu}$.

On voit alors que l'expression $\dfrac{\mathrm{F}-\Phi_p}{\sqrt{\mu^p}}$ tend vers zéro quand μ tend vers zéro par valeurs positives, et cela quelque grand que soit p.

En effet si l'on désigne par H_p l'ensemble des termes du développement de $\overset{\backslash}{\underset{\mathrm{II}}{}}$ où l'exposant de $\sqrt{\mu}$ est au plus égal à p, on a

$$\frac{\mathrm{F}-\Phi_p}{\sqrt{\mu^p}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\mu^p}}\left(\overset{\backslash}{\underset{\mathrm{II}}{}} - \mathrm{H}_p\right) w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t\sqrt{-1}}$$

et la série du second membre est *uniformément* convergente et tous ses termes tendent vers zéro quand μ tend vers zéro.

On peut donc dire que les séries que nous avons obtenues dans le présent paragraphe 14 représentent les solutions asymptotiques pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de Stirling représente les fonctions eulériennes.

On s'en rendra d'ailleurs mieux compte de la manière suivante; supposons deux degrés de liberté seulement pour fixer les idées; alors nous ne conserverons plus qu'une seule des quantités w et nous pourrons écrire nos équations sous la forme suivante :

$$\frac{dx_i}{dt} + \alpha w \frac{dx_i}{dw} = \frac{d\mathrm{F}}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} + \alpha w \frac{dy_i}{dw} = -\frac{d\mathrm{F}}{dx_i} \qquad (i = 1, 2)$$

en supprimant les indices de α et de w devenus inutiles.

Nous savons que α est développable suivant les puissances impaires de $\sqrt{\mu}$ et par conséquent α^2 suivant les puissances de μ; inversement μ est développable suivant les puissances de α^2; nous pouvons remplacer μ par ce développement de sorte que F sera développé suivant les puissances de α^2. Pour $\alpha = 0$, F se réduit à F_0 qui ne dépend que de x_1 et de x_2.

Soit

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

la solution périodique qui nous sert de point de départ. Posons, comme au paragraphe 12 :

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i,$$

nos équations deviendront

$$(11)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} + \alpha w \frac{d\xi_i}{dw} = \Xi_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} = \Pi_i.$$

Ξ_i et Π_i sont développés suivant les puissances des ξ_i, des η_i et de α^2; et les coefficients sont des fonctions périodiques de t.

Pour $\alpha = 0$, $\frac{dF}{dy_i}$ et par conséquent Ξ_i s'annulent; donc Ξ_i est divisible par α^2 et je puis poser

$$\Xi_i = \alpha^2 X_i + \alpha^2 X'_i,$$

$\alpha^2 X_i$ représentant l'ensemble des termes du premier degré par rapport aux ξ et aux η, et $\alpha^2 X'_i$ représentant l'ensemble des termes de degré supérieur.

De même, quand α est nul, $\frac{dF}{dx_i}$ et par conséquent Π_i ne dépendent plus que des ξ_i et non des η_i.

Je puis donc poser

$$\Pi_i = Y_i + Y'_i + \alpha^2 Q_i + \alpha^2 Q'_i,$$

$Y_i + \alpha^2 Q_i$ représentant l'ensemble des termes du premier degré par rapport aux ξ et η, pendant que $Y'_i + \alpha^2 Q'_i$ représente l'ensemble des termes de degré supérieur au premier. Je suppose en outre que Y_i et Y'_i ne dépendent que de ξ_1 et de ξ_2.

Posons

$$\xi_1 = \alpha\zeta_1, \qquad \xi_2 = \alpha\zeta_2,$$

Y_i deviendra divisible par α et Y'_i par α^2, de sorte que je pourrai poser

$$Y_i + \alpha^2 Q_i = \alpha Z_i, \qquad Y'_i + \alpha^2 Q'_i = \alpha^2 Z'_i$$

et que nos équations deviendront

$$(12)\qquad \frac{d\zeta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\zeta_i}{dw} = \alpha X_i + \alpha X'_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} = \alpha Z_i + \alpha^2 Z'_i.$$

Considérons les équations

$$(13)\qquad \frac{d\zeta_i}{dt} = \alpha X_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \alpha Z_i.$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux inconnues ζ_i et η_i. Elles ne diffèrent pas des équations (2) du paragraphe 12, sinon parce que ξ_1 et ξ_2 y sont remplacés par $\alpha\zeta_1$ et $\alpha\zeta_2$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 12, l'équation qui définit les exposants caractéristiques admet quatre racines, l'une égale à $+\alpha$, l'autre à $-\alpha$ et les deux autres à zéro.

A la première racine, c'est-à-dire à la racine $+\alpha$, correspondra une solution des équations (2) du paragraphe 12 que nous avons appris à former dans ce paragraphe 12 et que nous avons écrite ainsi :

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i, \qquad \eta_i = e^{\alpha t} T_i.$$

Je rappelle que S_i^0 est nul et par conséquent que S_i est divisible par α.

A la seconde racine $-\alpha$ correspondra de même une autre solution des équations (2) et nous l'écrirons

$$\xi_i = e^{-\alpha t} S'_i, \qquad \eta_i = e^{-\alpha t} T'_i.$$

Enfin aux deux racines zéro, correspondront deux solutions des équations (2) que nous écrirons

$$\begin{aligned} \xi_i &= S''_i, & \eta_i &= T''_i, \\ \xi_i &= S'''_i + \alpha t S''_i, & \eta_i &= T'''_i + \alpha t T''_i. \end{aligned}$$

T'_i, T''_i, T'''_i, S'_i, S''_i, S'_i sont des fonctions périodiques de t, comme S_i et T_i.

De plus S'_i, S''_i, S'''_i seront comme S_i divisibles par α.

Posons alors

$$\begin{aligned} \alpha\zeta_1 &= S_1\theta_1 + S'_1\theta_2 + S''_1\theta_3 + S'''_1\theta_4, \\ \alpha\zeta_2 &= S_2\theta_1 + S'_2\theta_2 + S''_2\theta_3 + S'''_2\theta_4, \\ \eta_1 &= T_1\theta_1 + T'_1\theta_2 + T''_1\theta_3 + T'''_1\theta_4, \\ \eta_2 &= T_2\theta_1 + T'_2\theta_2 + T''_2\theta_3 + T'''_2\theta_4. \end{aligned}$$

Les fonctions θ_i ainsi définies joueront un rôle analogue à celui des fonctions η_i du paragraphe 13. Les équations (12) deviennent alors

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\theta_1}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_1}{dw} - \alpha\theta_1 = \alpha\Theta_1, & &\frac{d\theta_2}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_2}{dw} + \alpha\theta_2 = \alpha\Theta_2, \\ &\frac{d\theta_3}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_3}{dw} = \alpha\theta_4 + \alpha\Theta_3, & &\frac{d\theta_4}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_4}{dw} = \alpha\Theta_4. \end{aligned} \right.$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 et Θ_4 sont des fonctions développées suivant les puissances de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 et α dont tous les termes sont du deuxième degré au moins par rapport aux θ, et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t. De plus les θ doivent être des fonctions périodiques de t et les termes du premier degré en w dans θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 doivent se réduire à w, o, o et o.

Ces équations (14) sont analogues aux équations (2') du paragraphe 13.

Cela posé, soit Φ une fonction qui, de même que Θ_1, Θ_2, Θ_3 et Θ_4, soit développée suivant les puissances de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, de α, $e^{w\sqrt{-1}}$ et $e^{-w\sqrt{-1}}$ et qui soit telle que chacun de ses coefficients soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient du terme correspondant dans Θ_1, Θ_2, Θ_3 et Θ_4; tous

les termes de Φ seront d'ailleurs, comme ceux des Θ_i, du second degré au moins par rapport aux θ.

Observons que le nombre $\frac{n\sqrt{-1}}{\alpha} + p$ (où n est entier positif, négatif ou nul, et où p est entier positif et au moins égal à 1) est toujours plus grand en valeur absolue que 1, quels que soient d'ailleurs n, p et α.

Formons alors les équations

$$(15) \qquad \theta_1 = w + \Phi, \qquad \theta_2 = \Phi, \qquad \theta_3 = \theta_4 + \Phi, \qquad \theta_4 = \Phi$$

qui sont analogues aux équations (2″) du paragraphe 13.

Des équations (14) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui sont analogues aux séries (4′) du paragraphe 13. Des équations (15) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des mêmes variables et analogues aux séries (4″) du paragraphe 13. Chacun des termes de ces dernières séries est positif et plus grand en valeur absolue que le terme correspondant des premières séries; si donc elles convergent, il en est de même des séries tirées des équations (14).

Or il est aisé de voir que l'on peut trouver un nombre w_0 indépendant de α, tel que si $|w| < w_0$, les séries tirées de (15) convergent.

Il en résulte que les séries ordonnées suivant les puissances de w et tirées de (14) convergent uniformément quelque petit que soit α et par conséquent quelque petit que soit μ, ainsi que je l'ai annoncé plus haut.

Nous possédons maintenant les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$; les coefficients sont des fonctions connues de α. Si l'on développe chacun de ces coefficients suivant les puissances de α, on obtiendra les θ développés suivant les puissances de α. Les séries ainsi obtenues sont divergentes, comme nous l'avons vu plus haut; soit néanmoins

$$(16) \qquad \theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots + \alpha^p\theta_i^p + \ldots$$

ces séries.

Posons

$$\Pi_1 = \Theta_1 + \theta_1, \qquad \Pi_2 = \Theta_2 - \theta_2, \qquad \Pi_3 = \Theta_3 + \theta_4, \qquad \Pi_4 = \Theta_4.$$

Posons

$$(17) \qquad \theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots + \alpha^p\theta_i^p + \alpha^p u_i$$

en égalant θ_i aux $p+1$ premiers termes de la série (16) plus un terme complémentaire $\alpha^p u_i$.

Si dans Π_i on remplace les θ_i par leurs développements (17), les Π_i peuvent se développer suivant les puissances de α et l'on peut écrire

$$\Pi_i = \Theta_i^0 + \alpha\Theta_i^1 + \alpha^2\Theta_i^2 + \ldots + \alpha^{p-1}\Theta_i^{p-1} + \alpha^p U_i,$$

les Θ_i^k étant indépendants de α pendant que U_i est développable suivant les puissances de α.

On aura alors les équations

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\theta_i^0}{dt} = 0, & \dfrac{d\theta_i^1}{dt} + w\dfrac{d\theta_i^0}{dw} = \Theta_i^0, & \\ \dfrac{d\theta_i^2}{dt} + w\dfrac{d\theta_i^1}{dw} = \Theta_i^1, & \ldots, & \dfrac{d\theta_i^p}{dt} + w\dfrac{d\theta_i^{p-1}}{dw} = \Theta_i^{p-1} \end{array}\right.$$

et ensuite

$$(19)\qquad \frac{du_i}{dt} + \alpha w\frac{du_i}{dw} + \alpha w\frac{d\theta_i^p}{dw} = \alpha U_i.$$

Voici quelle est la forme de la fonction U_i; les quantités θ_i^k peuvent être regardées comme des fonctions connues de t et de w, définies par les équations (18) et par l'équation (20) que j'écrirai plus loin; pendant que les u_i restent les fonctions inconnues. Alors U_i est une fonction développée suivant les puissances de w, de $e^{\pm w\sqrt{-1}}$, de α et des u_i. De plus tout terme du $q^{\text{ième}}$ degré par rapport aux u_i est au moins du degré $p(q-1)$ par rapport à α.

Soit U_i^0 ce que devient U_i quand on y annule α et les u_i; on aura

$$(20)\qquad w\frac{d[\theta_i^p]}{dw} = [U_i^0].$$

Je puis ensuite, en posant

$$U_i' = U_i - w\frac{d\theta_i^p}{dw},$$

puis

$$V_1 = U_1' - u_1, \qquad V_2 = U_2' + u_2, \qquad V_3 = U_3' - u_4, \qquad V_4 = U_4',$$

mettre les équations (19) sous la forme

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{du_1}{dt} + \alpha w\dfrac{du_1}{dw} - \alpha u_1 = \alpha V_1, & \dfrac{du_2}{dt} + \alpha w\dfrac{du_2}{dw} + \alpha u_2 = \alpha V_2, \\ \dfrac{du_3}{dt} + \alpha w\dfrac{du_3}{dw} - \alpha u_4 = \alpha V_3, & \dfrac{du_4}{dt} + \alpha w\dfrac{du_4}{dw} = \alpha V_4. \end{array}\right.$$

On voit alors que les V_i ne contiennent que des termes du deuxième degré au moins par rapport à w et aux u_i.

En effet les θ_i sont divisibles par w et se réduisent à w ou à zéro quand on y

supprime les termes de degré supérieur au premier en w. Il en résulte d'abord que θ_i^p est divisible par w^2. D'autre part le second membre de l'équation (17) ne contiendra que des termes du premier degré au moins par rapport à w et u_i. Donc Θ_i ne contient que des termes du deuxième degré au moins par rapport à w et aux u_i. Il en résulte que les seuls termes du premier degré qui peuvent subsister dans U_1, U_2, U_3 et U_4 se réduisent respectivement à u_1, $-u_2$, u_4 et zéro.

D'ailleurs $w\frac{d\theta_i^p}{dw}$ est divisible par w^2; donc les V_i ne contiennent que des termes du deuxième degré au moins. C. Q. F. D.

Des équations (21) on peut tirer les u_i sous la forme de séries développées suivant les puissances de w et de $e^{\pm\mu\sqrt{-1}}$. En appliquant à ces équations le même raisonnement qu'aux équations (14) on peut démontrer que ces séries convergent quand $|w| < w_0$ et que la convergence reste uniforme quelque petit que soit α.

Il en est de même pour les séries qui représentent $\frac{du_i}{dw}$, $\frac{d^2u_i}{dw^2}$, etc.

Il résulte de là qu'on peut assigner une limite supérieure indépendante de α, à u_i, à $\frac{du_i}{dw}$, $\frac{d^2u_i}{dw^2}$, etc., pourvu que $|w| < w_0$.

Mais je veux démontrer maintenant que cela a encore lieu pour toutes les valeurs positives de w.

Reprenons les équations

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha w \frac{du_i}{dw} = U_i'.$$

U_i' peut être regardée comme une série développée suivant les puissances de α et des u_i et dont les coefficients sont des fonctions de t et de w. Je dis que cette série reste convergente quels que soient t et w pourvu que α et les u_i soient assez petits. En effet elle ne pourrait cesser de converger que si la fonction $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ cessait d'être développable suivant les puissances de α, des v_i et des v_i' quand on y remplace x_i par

$$x_i^0 + \alpha x_i^1 + \alpha^2 x_i^2 + \ldots + \alpha^{p+1} x_i^{p+1} + \alpha^{p+1} v_i$$

et y_i par

$$n_i t + y_i^0 + \alpha y_i^1 + \alpha^2 y_i^2 + \ldots + \alpha^p y_i^p + \alpha^p v_i',$$

ou, ce qui revient au même, si la fonction F pour une valeur quelconque de t ou de w (c'est-à-dire pour un système quelconque de valeurs de t, de y_1^0 et

de y_2^0) cessait d'être développable suivant les puissances de $x_i - x_i^0$, et de $y_i - n_i t - y_i^0$. Or il est manifeste qu'il n'en est pas ainsi.

Je puis donc toujours trouver une fonction Φ développée suivant les puissances de α et des u_i, mais dont les coefficients sont des constantes au lieu d'être fonctions de t et de ϖ comme ceux de U_i'; et de plus m'arranger de telle sorte que le coefficient d'un terme quelconque de Φ soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de U_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$, au moins pour les valeurs de t et de ϖ que j'aurai à considérer.

J'ajouterai que, d'après la forme particulière des fonctions U_i', je puis trouver deux nombres réels positifs M et β tels que la fonction Φ satisfasse à la condition que je viens d'énoncer si je prends

$$\Phi = \frac{M(1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}{1 - \beta\alpha - \beta\alpha^p(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}.$$

Si je considère les valeurs de ϖ positives et inférieures à une certaine limite W, je devrai prendre, pour satisfaire à cette condition, des nombres M et β d'autant plus grands que W sera plus grand; mais tant que W sera fini, les nombres M et β seront eux-mêmes finis.

Soit maintenant ϖ_1 une valeur positive de ϖ plus petite que ϖ_0. D'après ce que nous avons vu plus haut, il est possible d'assigner pour $\varpi = \varpi_1$ une limite supérieure à u_1, u_2, u_3 et u_4; soit u_0 cette limite, on aura donc

$$|u_i| < u_0 \qquad \text{pour} \quad \varpi = \varpi_1.$$

Soit maintenant u' une fonction définie par les conditions suivantes :

$$\frac{du'}{dt} + \alpha\varpi\frac{du'}{d\varpi} = \frac{\alpha M(4u' + 1)}{1 - \beta\alpha - 4\beta\alpha^p u'}, \qquad u' = u_0 \qquad \text{pour} \quad \varpi = \varpi_1.$$

On aura manifestement [1] pour toutes les valeurs de t et de ϖ :

$$|u_i| < u' \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Or on trouve sans peine :

$$\frac{1 - \beta\alpha + \beta\alpha^p}{4M}\log\frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} - \frac{\beta\alpha^p}{M}(u' - u_0) = \log\frac{\varpi}{\varpi_1}$$

et pour $\alpha = 0$, on trouve

$$\frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} = \left(\frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{4M},$$

ce qui montre que u' reste fini quand α tend vers zéro.

---

[1] Cette propriété se trouve démontrée dans *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, § 115, p. 373 à 378. [J. L.].

Nous devons en conclure que les quantités u_i restent également finies quand α tend vers zéro.

Il résulte de là que la série $\theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots$ représente la fonction θ_i *asymptotiquement* (c'est-à-dire à la façon de la série de Stirling) ou en d'autres termes que l'expression $\frac{\theta_i - \theta_i^0 - \alpha\theta_i^1 - \alpha^2\theta_i^2 - \ldots - \alpha^{p-1}\theta_i^{p-1}}{\alpha^{p-1}}$ tend vers zéro avec α. En effet cette expression est égale à $\alpha(\theta_i^p + u_i)$ et nous venons de voir que $\theta_i^p + u_i$ reste fini quand α tend vers zéro.

Mais ce n'est pas tout; je dis que $\frac{du_i}{dw}$ reste fini quand α tend vers zéro.

Nous avons en effet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_i}{dw}\right) + \alpha w \frac{d}{dw}\left(\frac{du_i}{dw}\right) + \alpha\left(\frac{du_i}{dw}\right) = \alpha \sum_k \frac{dU_i'}{du_k}\frac{du_k}{dw} + \alpha\frac{dU_i'}{dw}.$$

$\frac{dU_i'}{du_k}$ et $\frac{dU_i'}{dw}$ sont des fonctions de t, de w, de α et des u_i; mais d'après ce que nous venons de voir, nous pouvons assigner aux u_i des limites supérieures; nous pourrons donc en assigner également aux $\frac{dU_i'}{du_k}$ et aux $\frac{dU_i'}{dw}$. Supposons par exemple que l'on ait

$$\left|\frac{dU_i'}{du_k}\right| < A, \qquad \left|\frac{dU_i'}{dw}\right| < B \qquad \text{pour} \quad w < W,$$

A et B étant deux nombres positifs.

D'autre part, nous savons qu'on peut assigner une limite à $\frac{du_i}{dw}$ pour $w = w_1$. Supposons par exemple que l'on ait

$$\left|\frac{du_i}{dw}\right| < u_0' \qquad \text{pour} \quad w = w_1,$$

u_0' étant un nombre positif. Soit ensuite u' une fonction définie comme il suit :

$$\frac{du'}{dt} + \alpha w\frac{du'}{dw} = \alpha u'(\tfrac{1}{2}A + W) + \alpha B, \qquad u' = u_0' \qquad \text{pour} \quad w = w_1.$$

On aura manifestement

$$\left|\frac{du_i}{dw}\right| < u'.$$

Or on voit sans peine que u' ne dépend que de w et satisfait à l'équation

$$w\frac{du'}{dw} = u'(\tfrac{1}{2}A + W) + B.$$

Donc u' est fini; donc $\frac{du_i}{dw}$ reste finie quand α tend vers zéro. Donc on a *asymptotiquement* (en entendant ce mot au même sens que plus haut) :

$$\frac{d\theta_i}{dw} = \frac{d\theta_i^0}{dw} + \alpha\frac{d\theta_i^1}{dw} + \alpha^2\frac{d\theta_i^2}{dw} + \ldots.$$

On démontrerait de même que l'on a asymptotiquement :

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{d\theta_i^0}{dt} + \alpha\frac{d\theta_i^1}{dt} + \alpha^2\frac{d\theta_i^2}{dt^2} + \ldots, \qquad \frac{d^2\theta_i}{dw^2} = \frac{d^2\theta_i^0}{dw^2} + \alpha\frac{d^2\theta_i^1}{dw^2} + \alpha^2\frac{d^2\theta_i^2}{dw^2} + \ldots.$$

Voici donc la conclusion finale à laquelle nous parvenons :

Les séries

$$x_i^0 + \sqrt{\mu}\,x_i^1 + \mu\,x_i^2 + \ldots, \qquad n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu}\,y_i^1 + \mu\,y_i^2 + \ldots$$

définies dans ce paragraphe sont divergentes, mais elles jouissent de la même propriété que la série de Stirling, de telle sorte qu'on a asymptotiquement :

$$x_i = x_i^0 + \sqrt{\mu}\,x_i^1 + \mu\,x_i^2 + \ldots, \qquad y_i = n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu}\,y_i^1 + \mu\,y_i^2 \ldots.$$

De plus, si D est un signe quelconque de différentiation, c'est-à-dire si l'on pose

$$Df = \frac{d^{h_0+h_1+\ldots+h_k} f}{dt^{h_0}\,dw_1^{h_1}\,dw_2^{h_2}\ldots dw_k^{h_k}}$$

on aura encore asymptotiquement :

$$Dx_i = Dx_i^0 + \sqrt{\mu}\,Dx_i^1 + \mu\,Dx_i^2 + \ldots,$$
$$Dy_i = D(n_i t + y_i^0) + \sqrt{\mu}\,Dy_i^1 + \mu\,Dy_i^2 + \ldots.$$

En ce qui concerce l'étude des séries analogues à celles de Stirling, je renverrai au paragraphe I d'un Mémoire que j'ai publié dans les *Acta Mathematica* (t. 8, p. 295) (1).

---

(1) *Œuvres de H. Poincaré*, t. I, p. 290.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE ET PROBLÈME DES n CORPS.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DU CAS OU IL N'Y A QUE DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ.

15. — Représentations géométriques diverses.

Reprenons les équations (1) du paragraphe 11 ;

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dF}{dy_1}, & \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{dF}{dy_2}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_1}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_2}. \end{cases}$$

Nous nous bornerons au cas le plus simple qui est celui où il n'y a que deux degrés de liberté; je n'ai pas à m'occuper en effet de celui où il n'y a qu'un degré de liberté, car les équations de la Dynamique s'intègrent alors aisément par de simples quadratures.

Nous supposerons donc que la fonction F ne dépend que de quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2. Nous supposerons de plus que cette fonction est uniforme par rapport à ces quatre variables et périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2.

La situation du système est donc définie par les quatre quantités x_1, x_2, y_1, y_2, mais cette situation ne change pas quand y_1 ou y_2 augmente de 2π ou d'un multiple de 2π. En d'autres termes, et pour reprendre le langage du Chapitre I, x_1 et x_2 sont des variables linéaires, pendant que y_1 et y_2 sont des variables angulaires.

Nous connaissons une intégrale des équations (2) qui est la suivante :

$$(2)\qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

C désignant la constante des forces vives. Si cette constante est regardée comme une des données de la question, les quatre quantités x et y ne sont plus indépendantes ; elles sont liées par la relation (2). Il suffira donc, pour déterminer la situation du système, de se donner arbitrairement trois de ces quatre quan-

tités. Il devient possible, par conséquent, de représenter la situation du système par la position d'un point P dans l'espace.

Il pourra arriver en outre pour des raisons diverses que les quatre variables x et y soient soumises, non seulement à l'égalité (2), mais à une ou plusieurs inégalités :

$$\varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0. \tag{3}$$

Supposons par exemple pour fixer les idées que les inégalités (3) s'écrivent

$$a > x_1 > b,$$

et que l'égalité (2) soit telle que lorsque x_1 satisfait à ces inégalités, on puisse tirer de la relation (2) la quatrième variable x_2 en fonction uniforme des trois autres x_1, y_1 et y_2.

Nous pouvons alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées rectangulaires seront

$$X = \cos y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)], \qquad Y = \sin y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)],$$
$$Z = \sin y_2(cx_1 + d),$$

c et d étant deux nouvelles constantes positives telles que

$$ca + d < 1, \qquad cb + d > 0.$$

Il est clair en effet qu'à toute situation du système, c'est-à-dire à tout système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 satisfaisant aux conditions

$$a > x_1 > b, \qquad 2\pi > y_1 > 0, \qquad 2\pi > y_2 > 0$$

correspond un point de l'espace et un seul, compris entre les deux tores

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 = (cb + d)^2, \\ (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 = (ca + d)^2. \end{cases} \tag{4}$$

Et réciproquement, à tout point de l'espace compris entre ces deux tores correspond un système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 et un seul, satisfaisant aux inégalités précédentes.

Il peut se faire que les inégalités (3) ne s'écrivent plus $a > x_1 > b$; mais que cependant ces inégalités, jointes à la relation (2) entraînent comme conséquence

$$a > x_1 > b.$$

Si de plus x_2 est encore fonction uniforme des trois autres variables, le même mode de représentation géométrique est encore applicable.

Nous pouvons nous placer dans un cas plus général encore :

Supposons que l'on puisse trouver une variable auxiliaire ξ, jouissant de la propriété suivante. Si x_1, x_2, y_1 et y_2 satisfont à la fois à l'égalité (2) et aux inégalités (3), on pourra exprimer x_1 et x_2 en fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. De plus, en vertu des inégalités (3), ξ ne peut devenir infinie et reste comprise entre certaines limites de telle façon que l'on a comme conséquence de (2) et de (3) :

$$a > \xi > b.$$

Nous pourrons alors définir complètement la situation du système en nous donnant les trois variables ξ, y_1 et y_2, et la représenter par un point P dont les coordonnées rectangulaires seront

$$X = \cos y_1[1 + \cos y_2(c\xi + d)], \qquad Y = \sin y_1[1 + \cos y_2(c\xi + d)],$$
$$Z = \sin y_2(c\xi + d)$$

avec les conditions

$$c \geq 0, \qquad ca + d < 1, \qquad cb + d > 0.$$

On voit alors, comme dans le cas précédent, qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace et un seul compris entre les deux tores (4), et réciproquement, qu'à tout point compris entre ces deux tores ne peut correspondre plus d'une situation du système.

Il peut se faire que pour $x_1 = a$, (ou plus généralement pour $\xi = a$), la situation du système reste la même quelle que soit la valeur attribuée à y_2. Nous en verrons dans la suite des exemples. C'est ainsi qu'en coordonnées polaires, il faut en général pour définir la position d'un point se donner les deux coordonnées ρ et ω, mais que si l'on suppose $\rho = 0$, on retrouve toujours le même point, à savoir le pôle, quel que soit ω.

Dans ce cas on choisira les constantes c et d de telle façon que

$$ca + d = 0.$$

Le second des deux tores (4) se réduit alors à un cercle

$$Z = 0, \qquad X^2 + Y^2 = 1.$$

En chacun des points de ce cercle y_2 est indéterminé; mais néanmoins, comme pour $\xi = a$ la situation du système ne dépend pas de y_2, à chaque point du cercle correspond une situation du système et une seule.

On peut dire alors qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace intérieur au premier des deux tores (4) et que, réciproquement, à un

point intérieur de ce tore ne peut correspondre qu'une seule situation du système.

J'envisagerai encore un autre cas.

Imaginons qu'en vertu des inégalités (3), ξ puisse prendre toutes les valeurs positives, de telle sorte que

$$a = 0, \qquad b = +\infty.$$

Supposons que pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépende pas de y_2 et que pour $\xi = \infty$, cette situation ne dépende pas de y_1.

Nous pourrons alors représenter la situation par un point dont les coordonnées rectangulaires seront

$$X = \cos y_1 \, e^{\xi \cos y_2}, \qquad Y = \sin y_1 \, e^{\xi \cos y_2}, \qquad Z = \xi \sin y_2.$$

Pour $\xi = 0$ il vient (quel que soit y_2)

$$X = \cos y_1, \qquad Y = \sin y_1, \qquad Z = 0.$$

Le point représentatif se trouve sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0$$

et sa position ne dépend pas de y_2; cela n'a pas d'inconvénient puisque par hypothèse la situation du système pour $\xi = 0$ ne dépend pas non plus de y_2.

Pour $\xi = \infty$, on trouve pourvu que $\cos y_2$ soit négatif :

$$X = Y = 0, \qquad Z = \sin y_2.$$

Le point représentatif se trouve alors sur l'axe des Z et sa position ne dépend pas de y_1, mais pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas non plus de y_1.

Le mode de représentation adopté est donc légitime.

Ce qui précède a besoin d'être appuyé de quelques exemples. Je n'en traiterai ici que trois.

Le premier de ces exemples est le plus important parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps. Imaginons deux corps, le premier de grande masse, le second de masse finie, mais très petite, et supposons que ces deux corps décrivent autour de leur centre de gravité commun une circonférence d'un mouvement uniforme. Considérons ensuite un troisième corps de masse infiniment petite, de façon que son mouvement soit troublé par l'attraction des deux premiers corps, mais qu'il ne puisse pas troubler l'orbite de ces deux premiers corps. Bornons-nous de plus au cas où ce troisième corps se

meut dans le plan des deux circonférences décrites par les deux premières masses.

Tel est le cas d'une petite planète se mouvant sous l'influence du Soleil et de Jupiter quand on néglige l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tel est encore le cas de la Lune se mouvant sous l'influence du Soleil et de la Terre quand on néglige l'excentricité de l'orbite terrestre et l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Nous définirons la position du troisième corps par ses éléments osculateurs à un instant donné et nous écrirons les équations du mouvement en adoptant les notations de M. Tisserand dans sa Note des *Comptes rendus* du 31 janvier 1887 :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{dR}{dL}, \\[2ex] \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{dR}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{dR}{dG}. \end{cases}$$

Je désigne par a, e et n le grand axe osculateur, l'excentricité et le moyen mouvement de la troisième masse ; j'appelle l l'anomalie moyenne de cette troisième masse et g la longitude de son périhélie.

Je pose ensuite

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1-e^2)}.$$

Je choisis les unités de telle façon que la constante de Gauss soit égale à 1, que le moyen mouvement de la seconde masse soit égal à 1 et que la longitude de cette seconde masse soit égale à t.

Dans ces conditions, l'angle sous lequel la distance des deux dernières masses est vue de la première ne diffère de $l+g-t$ que par une fonction périodique de l de période 2π.

La fonction R est la fonction perturbatrice ordinaire augmentée de $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2L^2}$; Cette fonction ne dépend que de L, de G, de l et de $l+g-t$; car la distance de la seconde masse à la première est constante et la distance de la troisième à la première ne dépend que de L, G et l. Cette fonction est d'ailleurs périodique de période 2π tant par rapport à l que par rapport à $l+g-t$.

On conclut de là que l'on a

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0$$

et que les équations (5) admettent comme intégrale

$$R + G = \text{const.}$$

Nous allons chercher à ramener les équations (5) à la forme des équations (1). Pour cela nous n'avons qu'à poser

$$x_1 = G, \qquad x_2 = L, \qquad y_1 = g - t, \qquad y_2 = l,$$
$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = R + G,$$

et les équations (5) reprennent la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

La fonction F dépend d'un paramètre très petit μ qui est la masse du second corps et nous pouvons écrire

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F est périodique par rapport à y_1 et y_2 qui sont des variables angulaires, tandis que x_1 et x_2 sont des variables linéaires. Si l'on fait $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et

$$F_0 = \frac{1}{2a} + G = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$$

ne dépend plus que des variables linéaires.

Il résulte de la définition même de L et de G en fonctions de a et e que l'on doit avoir

$$L^2 > G^2 \qquad \text{ou} \qquad x_2^2 > x_1^2,$$

ce qui montre que x_1 peut varier depuis $-x_2$ jusqu'à $+x_2$.

Si l'on suppose $x_1 = +x_2$ l'excentricité est nulle; il en résulte que la fonction perturbatrice et la situation du système ne dépendent plus que de la différence de longitude des deux petites masses, c'est-à-dire de

$$l + g - t = y_1 + y_2.$$

On en déduit

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2},$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0,$$

d'où l'on conclurait (puisque la valeur initiale de $x_1 - x_2$ est supposée nulle) que x_1 doit rester constamment égal à x_2; mais ce n'est là pour les équations (1) qu'une solution singulière qui doit être rejetée. En ce qui concerne les solutions « particulières » que nous devons conserver, l'équation (6) signifie simplement que quand $x_1 - x_2$ atteint la valeur zéro, cette valeur est un maximum, ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'inégalité $x_2^2 > x_1^2$.

Si nous supposons maintenant $x_2 = -x_1$, l'excentricité sera encore nulle, mais le mouvement sera rétrograde (il l'est toutes les fois que x_1 et x_2 ne sont pas de même signe); alors F et la situation du système ne dépendent plus que de l'angle

$$-l + g - t = y_1 - y_2.$$

ce qui donne

$$\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Je vais maintenant traiter la question suivante :

Trouver une variable ξ telle que si x_1, x_2, y_1, y_2 satisfont aux égalités et inégalités (2) et (3) (qui dans le cas qui nous occupe se réduisent à $F = C$, $x_2^2 > x_1^2$), ces quatre quantités peuvent s'exprimer en fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

Je traiterai d'abord la question dans le cas où $\mu = 0$ et où

$$F = F_0 = \frac{1}{2x_2^2} + x_1.$$

Envisageons un plan et dans ce plan un point dont les coordonnées sont

$$X = x_1 - c, \qquad Y = x_2.$$

Alors les égalités et inégalités (2) et (3) s'écrivent

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0, \qquad Y > X + c > -Y.$$

Construisons la courbe

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0$$

et les deux droites

$$X + c = \pm Y.$$

Ces droites et cette courbe peuvent être dans deux situations différentes, représentées par les figures 3 et 4.

Chacune des deux figures devrait se composer de deux moitiés symétriques par rapport à l'axe des x, mais nous n'avons représenté que la moitié qui est au-dessus de cet axe. Dans le cas de la figure 3 la courbe nous offre deux arcs utiles BC et DE pendant que les arcs AB et CD doivent être rejetés à cause de l'inégalité $Y^2 > (X + c)^2$. Dans le cas de la figure 4, il n'y a qu'un arc utile BC et l'arc AB doit être rejeté.

Le passage de la figure 3 à la figure 4 se fait quand la droite CD devenant tangente à la courbe, les deux points C et D se confondent. Cela a lieu pour

$$c = \frac{3}{2}, \qquad X = -\frac{1}{2}, \qquad Y = 1.$$

Nous nous supposerons dans ce qui va suivre placés dans le cas de la figure 3 et nous envisagerons seulement l'arc utile BC; c'est en effet le cas le plus interessant au point de vue des applications.

Posons

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G};$$

on voit que ξ s'annule au point C et devient infini au point B et que quand on

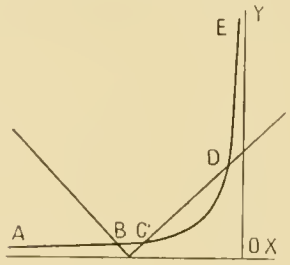

Fig. 3.

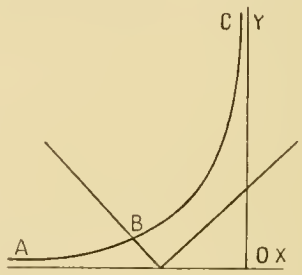

Fig. 4.

parcourt l'arc BC depuis C jusqu'en B, on voit ξ croître constamment depuis zéro jusqu'à $+\infty$. Si donc on se donne ξ, le point correspondant de l'arc BC sera entièrement déterminé, ce qui revient à dire que x_1 et x_2 sont fonctions uniformes de ξ.

Qu'arrivera-t-il maintenant si μ n'est plus nul, mais seulement très petit?

Faisons encore

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

et voyons si en tenant compte des relations

$$(7) \qquad F = G, \qquad \xi > 0, \qquad x_2 > 0, \quad (^1),$$

x_1 et x_2 seront encore fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. Pour qu'il

(1) On voit aisément pourquoi j'écris cette dernière relation; l'arc BC comme on le voit sur la figure est tout entier au-dessus de l'axe des X, ce qui entraîne l'inégalité $x_2 > 0$; il est clair que cette inégalité subsistera encore pour les valeurs suffisamment petites de μ.

cessât d'en être ainsi, il faudrait que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(\xi, F)}{\partial(x_1, x_2)}$ s'annulât pour un système de valeurs satisfaisant aux conditions (7). Or cela n'arrivera pas si μ est assez petit et si C est assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans la plupart des applications, ces conditions seront remplies; nous pourrons donc prendre ξ comme variable indépendante; cette variable sera essentiellement positive et x_1 et x_2 seront fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

Toutefois pour trouver le mode de représentation géométrique le plus convenable, il faut encore faire un changement de variables. Posons

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_2, = x_1 - x_2, \qquad y'_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y'_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Après ce changement de variables, les équations conserveront la forme canonique

$$\frac{dx'_1}{dt} = \frac{dF}{dy'_1}, \qquad \frac{dy'_1}{dt} = -\frac{dF}{dx'_1}, \qquad \frac{dx'_2}{dt} = \frac{dF}{dy'_2}, \qquad \frac{dy'_2}{dt} = -\frac{dF}{dx'_2}.$$

On voit que y'_1 et y'_2 sont encore des variables angulaires; quand en effet y'_1 ou y'_2 augmente d'un multiple de 2π, y_1 et y_2 augmentent aussi d'un multiple de 2π et par conséquent la situation du système ne change pas.

Mais il y a plus; quand on change simultanément y'_1 et y'_2 en $y'_1 + \pi$ et $y'_2 + \pi$, y_2 ne change pas et y_1 augmente de 2π. La situation du système ne change donc pas.

Cela posé nous représenterons la situation du système par le point de l'espace qui a pour coordonnées rectangulaires :

$$X = \cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Y = \sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Z = \xi \sin y'_2.$$

Pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépend pas de y'_2 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0.$$

Pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas de y'_1 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur l'axe des Z si $\cos y'_2$ est négatif et à l'infini si $\cos y'_2$ est positif.

A chaque point de l'espace correspond donc une situation du système et une seule; réciproquement, à chaque situation du système correspondent, non pas un, mais deux points de l'espace et en effet aux deux systèmes de valeurs (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) et (x'_1, x'_2, $y'_1 + \pi$, $y'_2 + \pi$) correspondent deux points différents de l'espace, mais une seule situation du système.

Les équations (1) admettent les invariants intégraux

$$\int (dx_1\, dy_1 + dx_2\, dy_2) = \int (dx'_1\, dy'_1 + dx'_2\, dy'_2)$$

et

$$\int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 = dx'_1\, dy'_1\, dx'_2 dy'_2.$$

Si nous transformons cet invariant par les règles exposées dans le paragraphe 7 nous verrons que

$$\int \frac{x'^2_1\, d\xi\, dy'_1\, dy'_2}{x'_1 \dfrac{dF}{dx'_1} + x'_2 \dfrac{dF}{dx'_2}} = \int \frac{x'^2_1\, dX\, dY\, dL}{\left(x'_1 \dfrac{dF}{dx'_1} + x'_2 \dfrac{dF}{dx'_2}\right)\xi(X^2 + Y^2)}$$

est encore un invariant intégral.

Comme ξ est essentiellement positif, la quantité sous le signe $\int$ est de même signe que

$$x'_1 \frac{dF}{dx'_1} + x'_2 \frac{dF}{dx'_2} = x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}.$$

Or pour $\mu = 0$, on trouve

$$x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2} = x_1 - \frac{1}{x_2^2}.$$

Si nous nous supposons placés dans le cas de la figure 3 et sur l'arc BC, nous devons supposer

$$C > \frac{3}{2}, \qquad x_1^2 < x_2^2, \qquad 0 < x_2 < 1,$$

d'où l'on tire

$$x_1 - \frac{1}{x_2^2} = 3x_1 - 2C < 3x_1 - 2\frac{3}{2} = 3(x_1 - 1) < 0.$$

Ainsi $x_1 \dfrac{dF}{dx_1} + x_2 \dfrac{dF}{dx_2}$ est toujours négatif quand μ est nul. Il en sera encore de même quand μ cessera nul, pourvu que C soit assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans ces conditions l'intégrale

$$\int \frac{x'^2_1\, dX\, dY\, dL}{\xi(X^2 + Y^2)\left(-x'_1 \dfrac{dF}{dx'_1} - x'_2 \dfrac{dF}{dx'_2}\right)}$$

est un invariant positif.

Pour $\mu = 0$, les équations (5) s'intègrent aisément comme on le sait et l'on trouve

$$L = \text{const.}, \qquad G = \text{const.}, \qquad g = \text{const.}, \qquad l = nt + \text{const.},$$

Les solutions ainsi obtenues sont représentées dans le mode de représen-

tation géométrique adopté par certaines trajectoires. Ces trajectoires sont fermées toutes les fois que le moyen mouvement n est un nombre commensurable. Elles sont tracées sur des surfaces trajectoires qui ont pour équation générale $\xi = \text{const.}$ et qui sont par conséquent des surfaces de révolution fermées analogues à des tores.

Nous verrons dans la suite comment ces résultats sont modifiés quand μ n'est plus nul.

Comme second exemple, je reprends l'équation dont j'ai déjà parlé à la fin du paragraphe 11 :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R.$$

R étant une fonction de ρ et de t, holomorphe par rapport à ρ et s'annulant avec ρ et périodique par rapport à t. Cette équation peut s'écrire en reprenant les notations du paragraphe cité :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi},$$

avec

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu\int R(\rho, \xi)\,d\rho + \eta.$$

Posons

$$\sigma = \sqrt{n}\,\sqrt{2x_1}\cos y_1, \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2x_1}\sin y_1.$$

Les équations conserveront la forme canonique des équations de la Dynamique et la fonction F dépendra de deux variables linéaires x_1 et η et de deux variables angulaires y_1 et ξ.

On voit aisément que quand on se donne la constante des forces vives C, x_1, y_1 et ξ, la quatrième variable η est entièrement déterminée ; on a en effet

$$\eta = C - nx_1 - \frac{m}{n^2}x_1^2\sin^2 y_1 + \mu\int R(\rho, \xi)\,d\rho.$$

Pour $x_1 = 0$, la situation du système ne dépend pas de y_1. Nous pouvons donc adopter pour représenter cette situation le point dont les coordonnées sont

$$X = \cos\xi\, e^{x_1\cos y_1}, \qquad Y = \sin\xi\, e^{x_1\cos y_1}, \qquad Z = x_1\sin y_1.$$

A chaque situation du système correspond ainsi un point de l'espace et inversement. Il faut excepter les points à l'infini et les points de l'axe des Z qui nous donneraient $x_1 = \infty$ et par conséquent un résultat illusoire.

Comme troisième exemple, envisageons un point mobile pesant se mouvant sur une surface parfaitement polie et dans le voisinage d'une position d'équilibre stable.

Prenons pour origine le point le plus bas de la surface; pour plan des xy le plan tangent qui sera horizontal; pour axes des x et des y les axes de l'indicatrice de façon que l'équation de la surface s'écrive

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \mu\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ étant un ensemble des termes du troisième degré au moins en x et en y et μ un coefficient très petit.

Nous aurons alors en appelant x' et y' les projections de la vitesse sur les axes des x et des y :

$$F = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + gz,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx'}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \qquad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

Changeons de variables en posant

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt[4]{ga}}\cos y_1, & x' = \sqrt{2x_1}\sqrt[4]{ga}\sin y_1, \\ y = \dfrac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt[4]{gb}}\cos y_2, & y' = \sqrt{2x_2}\sqrt[4]{gb}\sin y_2. \end{cases}$$

Les équations différentielles conserveront la forme canonique des équations de la Dynamique. L'équation des forces vives s'écrit

$$\sqrt{ga}\,x_1 + \sqrt{gb}\,x_2 + \mu g\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

φ désignant la même fonction que plus haut, mais transformée par le changement de variables. Comme x_1 et x_2 sont essentiellement positifs (ainsi d'ailleurs que les coefficients a et b), l'équation des forces vives montre que ces deux quantités restent toujours inférieures à une certaine limite. D'après la définition de la fonction φ cette fonction s'annule avec x_1 et x_2, et il en est encore de même de ses dérivées partielles du premier ordre. Nous en conclurons que μ étant très petit, la fonction $\mu\varphi$ et ses dérivées du premier ordre ne pourront jamais dépasser une certaine limite supérieure très petite. Nous pouvons donc écrire

$$\left|\mu\frac{d\varphi}{dx_1}\right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \qquad \left|\mu\frac{d\varphi}{dx_2}\right| < \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Faisons maintenant $x_2 = \xi x_1$; le rapport ξ sera essentiellement positif. L'équation des forces vives devient

$$(9) \qquad x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi) + \mu g \varphi(x_1, \xi x_1, y_1, y_2) = C.$$

La dérivée du premier membre de (9) par rapport à x_1 s'écrit

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi + \mu g \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu \xi g \frac{d\varphi}{dx_2}.$$

En vertu des inégalités (8), cette expression est toujours positive, ce qui montre que l'on peut tirer de l'équation (9) x_1 en fonction uniforme de ξ, y_1 et y_2, et par conséquent que la situation du système est complètement définie par les trois variables y_1, y_2 et ξ.

Pour $\xi = 0$ la situation ne dépend pas de y_1, pour $\xi = \infty$ elle ne dépend pas de y_2.

Nous représenterons donc cette situation par le point

$$X = \cos y_2\, e^{\xi \cos y_1}, \qquad Y = \sin y_2\, e^{\xi \cos y_1}, \qquad Z = \xi \sin y_1.$$

A chaque point de l'espace correspondra ainsi une situation du système et réciproquement.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour faire comprendre l'importance du problème qui va nous occuper dans ce Chapitre et la façon dont on peut varier les modes de représentation géométrique.

CHAPITRE II.

ETUDE DES SURFACES ASYMPTOTIQUES.

16. — Exposé du problème.

Reprenons les équations de la Dynamique en supposant deux degrés de liberté seulement, et par conséquent quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 14 ces équations admettent certaines solutions particulières remarquables que nous avons appelées asymptotiques. Chacune de ces solutions asymptotiques est représentée, dans le système de représentation géométrique exposé au paragraphe précédent, par certaines courbes trajectoires. L'ensemble de ces courbes engendre certaines surfaces que nous pouvons appeler surfaces asymptotiques et que nous nous proposons d'étudier.

Ces solutions asymptotiques peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(1)\quad x_1 = \varphi_1(t, w), \qquad x^2 = \varphi_2(t, w), \qquad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t, w), \qquad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t, w),$$

w étant égal à $Ae^{\alpha t}$, et A étant une constante arbitraire. De plus φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 sont (par rapport à t, w étant regardé un instant comme une constante) des fonctions périodiques de période T, et n_1T et n_2T sont des multiples de 2π.

Si entre les équations (1) on élimine t et w, il viendra

$$(2)\qquad x_1 = f_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = f_2(y_1, y_2)$$

et ces équations peuvent être regardées comme définissant nos surfaces asymptotiques. Nous avons vu ensuite que si l'on cherche à développer φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, on arrive à des séries qui sont divergentes, mais que ces séries représentent néanmoins asymptotiquement ces fonctions lorsque μ est très petit.

Je rappelle que je conviens de dire que la série

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots$$

représente asymptotiquement la fonction $F(x)$ pour x très petit, quand on a

$$\lim \frac{F(x) - A_0 - A_1 x - \ldots - A_p x^p}{x^p} = 0 \qquad \text{pour} \quad x = 0.$$

J'ai étudié dans les *Acta Mathematica* (t. 8) [1] les propriétés des séries divergentes qui représentent asymptotiquement certaines fonctions et j'ai reconnu que les règles ordinaires du calcul sont applicables à ces séries. Une égalité asymptotique, c'est-à-dire une égalité entre une série divergente et une fonction qu'elle représente asymptotiquement, peut subir toutes les opérations ordinaires du calcul, à l'exception de la différentiation.

Soient donc

$$\sigma_1(t, w, \sqrt{\mu}), \qquad \sigma_2(t, w, \sqrt{\mu}), \qquad \sigma_3(t, w, \sqrt{\mu}), \qquad \sigma_4(t, w, \sqrt{\mu})$$

les séries divergentes ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ qui représentent asymptotiquement φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Nous aurons alors les quatre égalités asymptotiques

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = \sigma_1(t, w, \sqrt{\mu}), & x_2 = \sigma_2(t, w, \sqrt{\mu}), \\ y_1 = n_1 t + \sigma_3(t, w, \sqrt{\mu}), & y_2 = n_2 t + \sigma_4(t, w, \sqrt{\mu}). \end{cases}$$

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, t. I, p. 290.

Nous pourrons éliminer t et w entre ces égalités d'après les règles ordinaires du calcul et nous obtiendrons ainsi deux nouvelles égalités asymptotiques

$$(4) \qquad x_1 = s_1(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \qquad x_2 = s_2(y_1, y_2, \sqrt{\mu}),$$

où s_1 et s_2 sont des séries divergentes ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et dont les coefficients sont des fonctions de y_1 et de y_2.

En général, il n'est pas permis de différentier une égalité asymptotique; mais nous avons démontré directement à la fin du paragraphe 14 que dans le cas particulier qui nous occupe, on peut différentier autant de fois que l'on veut les égalités (3), tant par rapport à t que par rapport à w.

Nous pouvons en conclure qu'il est permis également de différentier les égalités (4) autant de fois qu'on veut par rapport à y_1 et à y_2.

Nous nous proposons d'étudier les surfaces asymptotiques définies par les équations (2). Les fonctions $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$ qui entrent dans ces équations devront satisfaire aux équations

$$(5) \qquad \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Nous allons procéder par approximations successives; dans une première approximation nous prendrons pour équations des surfaces asymptotiques les équations (4) en nous arrêtant au second terme des séries (c'est-à-dire au terme en $\sqrt{\mu}$) inclusivement. L'erreur commise sera alors du même ordre de grandeur que μ.

Dans une seconde approximation, nous prendrons encore pour équations des surfaces asymptotiques les équations (4), mais en prenant un plus grand nombre de termes dans les séries. Nous pourrons en prendre un assez grand nombre pour que l'erreur commise soit du même ordre de grandeur que μ^p, quelque grand que soit p.

Enfin dans une troisième approximation, nous chercherons à mettre en évidence les propriétés des équations *exactes* des surfaces asymptotiques, c'est-à-dire des équations (2).

Nous devons donc d'abord chercher à former directement les séries s_1 et s_2 des équations (4). Ces séries, substituées à la place de x_1 et de x_2, doivent satisfaire formellement aux équations (5).

Nous sommes donc conduits à chercher des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, qui satisfassent formellement aux équations (5). Les

coefficients de ces séries seront des fonctions de y_1 et de y_2 qui ne devront pas changer quand y_1 et y_2 augmenteront respectivement de $n_1 T$ et $n_2 T$.

Mais nous trouverons une infinité de séries qui satisfont à ces conditions. Comment distinguer, parmi celles-là, celles qui doivent entrer dans les égalités (4)? Nous avons vu plus haut que dans notre mode de représentation géométrique, la solution périodique considérée est représentée par une courbe fermée et que, par cette courbe fermée, passent deux surfaces asymptotiques. On passe de l'une à l'autre en changeant $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Si donc dans les équations (2) on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, on obtient une seconde surface asymptotique qui doit couper la première.

En d'autres termes, si l'on considère les deux surfaces asymptotiques ainsi obtenues comme deux nappes d'une même surface, on peut dire que cette surface a une courbe double.

Soit s_1^p et s_2^p la somme des p premiers termes des séries s_1 et s_2, les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = s_1^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), & x_2 = s_2^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \\ x_1 = s_1^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}), & x_2 = s_2^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}) \end{cases}$$

représenteront deux surfaces qui différeront peu des deux nappes dont je viens de parler et qui par conséquent devront se couper.

Si l'on considère ces deux surfaces comme deux nappes d'une surface unique, on peut dire que cette surface unique présente une courbe double.

Nous verrons dans la suite que cette condition suffit pour faire distinguer les séries s_1 et s_2 parmi toutes les séries de même forme qui satisfont formellement aux équations (5).

17. — Première approximation.

Reprenons nos hypothèses ordinaires, à savoir : que quatre variables, deux linéaires x_1 et x_2, deux angulaires y_1 et y_2 sont liées par les équations

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Que la constante C des forces vives étant regardée comme une des données de la question, ces quatre variables satisfont à l'équation

$$(2)\qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

de telle façon qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Que l'on a adopté un mode de représentation géométrique tel qu'à toute situation du système correspond un point représentatif et réciproquement.

Que F dépend d'un paramètre très petit μ, de telle façon qu'on puisse développer F suivant les puissances de μ et écrire

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 \ldots.$$

Que F_0 ne dépend que de x_1 et x_2 et est indépendant de y_1 et de y_2.

Ces conditions sont remplies dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous a servi d'exemple au paragraphe précédent.

Supposons que pour certaines valeurs de x_1 et de x_2, par exemple pour

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0,$$

les deux nombres $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ (que j'appellerai pour abréger n_1 et n_2) sont commensurables entre eux.

D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 11, à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond une équation $\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0$, qui portait le n° 7 dans le paragraphe cité, et à chaque racine de cette équation (7) correspond une solution périodique des équations (1).

Nous avons vu ensuite dans le paragraphe 12 que le nombre des racines de l'équation (7) est toujours pair, que la moitié de ces racines correspond à des solutions périodiques stables et l'autre moitié à des solutions instables.

Les équations (1) *ont donc si* μ *est assez petit des solutions périodiques instables.*

Chacune de ces solutions périodiques sera représentée dans le mode de représentation adopté par une courbe trajectoire fermée.

Nous avons vu au paragraphe 13 que par chacune des courbes fermées qui représentent une solution périodique instable, passent deux surfaces trajectoires dites *asymptotiques* sur lesquelles sont tracées en nombre infini des trajectoires qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la courbe trajectoire fermée.

Les équations (1) nous conduisent donc à une infinité de surfaces trajectoires asymptotiques dont je me propose de trouver l'équation.

Voyons d'abord sous quelle forme se présente en général l'équation d'une surface trajectoire. Cette équation pourra s'écrire

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2),$$

Φ_1 et Φ_2 étant deux fonctions de y_1 et de y_2 qui doivent être choisies de telle sorte que l'on ait identiquement

$$F(\Phi_1, \Phi_2, y_1, y_2) = C.$$

Ces deux fonctions Φ_1 et Φ_2 devront d'ailleurs satisfaire à deux équations aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Il pourrait d'ailleurs nous suffire d'envisager la première de ces équations, car on peut en faire disparaître x_2, en remplaçant cette variable par sa valeur que l'on peut tirer de (2) en fonction de x_1, de y_1 et de y_2.

Voici comment nous procéderons pour intégrer les équations (3) en supposant que x_1 et x_2 sont très voisins de x_1^0 et de x_2^0, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable.

Nous supposerons que x_1 et x_2 sont développés selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ et nous écrirons

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots, \\ x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots, \end{cases}$$

et nous chercherons à déterminer les fonctions x_i^k de telle façon qu'en substituant dans les équations (3) à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), ces équations soient satisfaites formellement [1].

Si dans F nous substituons à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et l'on pourra écrire

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \ldots.$$

On voit d'ailleurs sans peine que

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0),$$

$$H_1 = x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_1x_1^1 - n_2x_2^1,$$

$$H_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2) + \left[(x_1^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} + 2x_1^1x_2^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_2^0} + (x_2^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right] - n_1x_1^2 - n_2x_2^2,$$

---

[1] Si x_1^0 et x_2^0 étaient choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, on pourrait se contenter de développer x_1 et x_2 suivant les puissances de μ (et non de $\sqrt{\mu}$). On arriverait ainsi à des séries, qui à la vérité ne seraient pas convergentes au sens géométrique du mot, mais qui comme celles de M. Lindstedt pourraient rendre des services dans certains cas.

et plus généralement

$$H_k = \Theta_k - [L x_1^1 x_1^{k-1} + M(x_1^1 x_2^{k-1} + x_2^1 x_1^{k-1}) + N x_2^1 x_2^{k-1}] - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k,$$

Θ_k ne dépendant que de y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, ... x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, ..., x_2^{k-2}, et en posant pour abréger

$$L = -\frac{d^2 F_0}{(dx_1^0)^2}, \qquad M = -\frac{d^2 F_0}{dx_1^0\, dx_2^0}, \qquad N = -\frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2}.$$

La première des équations (3) nous donne alors, en égalant les puissauces semblables de $\sqrt{\mu}$, une suite d'équations qui nous permettront de déterminer successivemeut x_1^0, x_1^1, x_1^2, ... x_1^k.

Nous pouvons toujours supposer que $n_2 = 0$. Car si cela n'avait pas lieu nous poserions

$$x_1'' = a x_1 - b x_2, \qquad y_1'' = d y_1 - c y_2,$$
$$x_2'' = c x_1 + d x_2, \qquad y_2'' = -b y_1 + a y_2,$$

a, b, c, d étant quatre nombres entiers tels que

$$ad - bc = 1.$$

Après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique.

La fonction F qui est périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2, est encore périodique de période 2π par rapport à y_1'' et à y_2''. Le changement de variables n'a donc pas altéré la forme des équations (1).

Les nombres n_1 et n_2 sont remplacés par deux nouveaux nombres n_1'' et n'' qui jouent par rapport aux équations transformées le même rôle que n_1 et n_2 par rapport aux équations primitives et l'on a

$$n_1'' = d n_1 - c n_2, \qquad n_2'' = -b n_1 + a n_2.$$

Mais le rapport de n_1 à n_2 étant commensurable par hypothèse, il est toujours possible de choisir les quatre entiers a. b, c, d de telle sorte que

$$n_2'' = -b n_1 + a n_2 = 0.$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que n_2 soit nul; c'est ce que nous ferons jusqu'à nouvel ordre.

Nous supposerons en même temps $n_1 T = 2\pi$.

Si après cette simplification, nous égalons les coefficients de $\sqrt{\mu}$ dans les deux membres des deux équations (3), il viendra

$$(5) \qquad -n_1 \frac{dx_1^1}{dy_1} = -n_1 \frac{dx_2^1}{dy_1} = 0,$$

ce qui montre que x_1^1 et x_2^1 ne dépendent que de y_2.

Égalons maintenant les coefficients de μ dans les deux membres de la première des équations (3), il viendra, en tenant compte des équations (5) :

$$(6)\qquad -n_1\frac{dx_1^2}{dy_1}-(\mathrm{M}x_1^1+\mathrm{N}x_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2}+\frac{d\mathrm{F}_1}{dy_1}=0.$$

Nous nous proposerons dans ce qui va suivre de déterminer les fonctions x_i^2 de telle façon que ce soient des fonctions périodiques de y_1, qui ne doivent pas être altérées quand, y_2 conservant la même valeur, y_1 augmentera de 2π.

Nos fonctions pourront alors être développées en séries trigonométriques suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1. Nous conviendrons de représenter par la notation [U] le terme tout connu dans le développement de la fonction périodique U suivant les lignes trigonométriques de y_1 et de ses multiples. Dans ces conditions on aura

$$\left[\frac{d\mathrm{U}}{dy_1}\right]=0,$$

et je puis écrire

$$\left[(\mathrm{M}x_1^1+\mathrm{N}x_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2}\right]=0,\qquad \left[(\mathrm{M}x_1^1+\mathrm{N}x_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2}\right]=\left[\frac{d\mathrm{F}_1}{dy_2}\right].$$

Comme x_1^1 et x_2^1 ne dépendent pas de y_1, je puis écrire plus simplement

$$(7)\qquad \frac{dx_1^1}{dy_2}=0,\qquad (\mathrm{M}x_1^1+\mathrm{N}x_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2}=\left[\frac{d\mathrm{F}_1}{dy_2}\right].$$

La première de ces équations montre que x_1^1 se réduit à une constante. Quant à la seconde, elle est facile à intégrer. On a en effet

$$\left[\frac{d\mathrm{F}_1}{dy_2}\right]=\frac{d[\mathrm{F}_1]}{dy_2},$$

ce qui nous donne pour l'intégrale de l'équation (7)

$$(8)\qquad \mathrm{M}x_1^1x_2^1+\frac{\mathrm{N}}{2}(x_2^1)^2=[\mathrm{F}_1]+\mathrm{C}_1,$$

C_1 désignant une constante d'intégration.

Mais si nous regardons la constante des forces vives C comme une des données de la question, nous ne pouvons plus considérer les deux constantes x_1^1 et C_1 comme arbitraires. On doit avoir en effet identiquement

$$\mathrm{F}=\mathrm{H}_0+\sqrt{\mu}\,\mathrm{H}_1+\mu\,\mathrm{H}_2+\mu\sqrt{\mu}\,\mathrm{H}_3+\ldots=\mathrm{C}$$

ou

$$\mathrm{H}_0=\mathrm{C},\qquad \mathrm{H}_1=0,\qquad \mathrm{H}_2=0,\qquad \ldots$$

ou

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad -n_2 x_1^1 = 0, \qquad \ldots.$$

Ainsi la constante x_1^1 est nulle, ce qui apporte de nouvelles simplifications dans nos équations.

L'équation (8) devient en effet

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'écrire et de discuter les équations de nos surfaces trajectoires en négligeant les termes en μ et ne tenant compte que des termes en $\sqrt{\mu}$.

Nous supposerons donc que x_1 et x_2 sont définis en fonction de y_1 et de y_2 par les équations suivantes :

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu} x_1^1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}([F_1] + C_1)}.$$

D'après cela, x_1 serait une constante et x_2 une fonction de y_2 seulement, indépendante de y_1.

Revenons à notre premier exemple du paragraphe 15. Ce que nous dirons s'appliquerait également aux deux autres exemples, mais c'est sur le premier que je veux insister parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps.

Nous avons vu que l'on pouvait représenter la situation du système par le point P qui a pour coordonnées rectangulaires $\cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}$, $\sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}$, $\xi \sin y'_2$, où

$$y'_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y'_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \qquad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G} = \frac{-x'_2}{x'_1},$$
$$y_1 = g - l, \qquad y_2 = l.$$

Nous avions observé de plus que les variables

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_2 = x_1 - x_2$$

forment avec y'_1 et y'_2 un système de variables canoniques.

Nous pouvons donc regarder ξ, y'_1 et y'_2 comme un système particulier de coordonnées définissant la position du point P dans l'espace, de sorte que toute relation entre ξ, y'_1, y'_2 est l'équation d'une surface.

Mais ensuite, nous avons dû faire un autre changement de variables.

Nous avons posé

$$x''_1 = ax_1 + dx_2, \qquad y''_1 = dy_1 - cy_2, \qquad x''_2 = cx_1 + dx_2, \qquad y''_2 = -by_1 + ay_2,$$

en choisissant les nombres entiers a, b, c, d de façon à annuler le nombre que nous avons appelé n''_2.

Après ce changement de variables, nous avons supprimé les accents devenus inutiles et nous avons restitué le nom de x_1, x_2, y_1, y_2 à nos nouvelles variables indépendantes x''_1, x''_2, y''_1 et y''_2.

En conséquence, les variables que nous avons appelées x_1, x_2, y_1 et y_2 dans tout le calcul qui précède, et *auxquelles nous conserverons désormais ce nom*, ne sont pas les mêmes que celles que nous avions désignées par les mêmes lettres dans le premier exemple du paragraphe 15, c'est-à-dire G, L, $g-t$ et l.

Il est clair que notre nouvel y_1 et notre nouvel y_2 sont des fonctions linéaires de

$$y'_1 = \frac{1}{2}(g-t+l) \qquad \text{et} \qquad y'_2 = \frac{1}{2}(g-t-l)$$

et que le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 est une fonction linéaire et fractionnaire de ξ.

Nous devons conclure de là : que l'on peut définir complètement la position du point P dans l'espace par le nouvel y_1, le nouvel y_2 et le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1, de telle façon que toute relation entre y_1, y_2, et $\frac{x_2}{x_1}$ est l'équation d'une surface; que ce système particulier de coordonnées est tel que l'on peut augmenter y_1 ou y_2 d'un multiple de 2π sans que le point P change.

L'équation approximative de nos surfaces trajectoires, en négligeant les termes en μ sera

$$(9) \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu}}{x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu}} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C_1)}.$$

Nous nous proposons tout d'abord de construire les surfaces représentées par cette équation approximative (9).

Observons d'abord que $y_1 = 0$ est l'équation d'une certaine surface S et que la portion de cette surface qui nous sera utile est une portion de surface sans contact.

En effet il suffit de montrer que l'on a

$$\frac{dy_1}{dt} \neq 0.$$

Or il en est évidemment ainsi, car si l'on pose

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

il vient

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 - \mu\frac{dF_1}{dx_1} - \mu^2\frac{dF_2}{dx_1} + \ldots.$$

Le paramètre μ étant très petit, $\frac{dy_1}{dt}$ est de même signe que n_1 et n_1 est une constante qui est toujours de même signe.

Donc $\frac{dy_1}{dt}$ est toujours de même signe et ne peut s'annuler. C. Q. F. D.

La position d'un point P sur la surface S sera définie par les deux autres coordonnées y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$; ce système de coordonnées est tout à fait analogue aux coordonnées polaires, c'est-à-dire que les courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$ sont des courbes fermées concentriques et que le point P ne change pas quand l'autre coordonnée y_2 augmente de 2π.

Reprenons les surfaces définies par l'équation (9) et étudions leurs intersections avec la portion de surface S qui a pour équation $y_1 = 0$.

Je remarque d'abord que $\sqrt{\mu}$ étant très petit, ces intersections différeront fort peu des courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$

Mais pour étudier plus complètement la forme de ces courbes d'intersection, il faut d'abord rechercher quelles sont les propriétés de la fonction $[F_1]$.

Revenons aux notations du paragraphe 11. Dans ce paragraphe nous avons posé

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h),$$

A et h étant des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0; comme nous n'avons plus ici que deux degrés de liberté, j'écrirai simplement

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + h).$$

En faisant ensuite

$$y_1 = n_1 t, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad \omega = (n_1 m_1 + n_2 m_2)t + m_2 \varpi_2 + h,$$

nous trouvions

$$F_1 = \Sigma A \sin\omega.$$

Je posais ensuite

$$\psi = \mathcal{S} A \sin\omega,$$

la sommation $\mathcal{S}$ s'étendant à tous les termes tels que $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$; d'où

$$\omega = m_2 \varpi_2 + h.$$

Dans le cas qui nous occupe, n_2 est nul; la condition $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ se réduit à $m_1 = 0$ et l'on a $y_2 = \varpi_2$; il vient donc

$$\psi = \mathrm{S} A \sin(m_2 \varpi_2 + h) = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h).$$

D'après la définition de $[F_1]$, il suffit pour obtenir cette quantité de supprimer dans l'expression de F_1 tous les termes où m_1 n'est pas nul; il vient donc

$$[F_1] = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h) = \psi.$$

Ainsi la fonction que nous appelons ici $[F_1]$ est la même que nous désignions par ψ dans la première Partie.

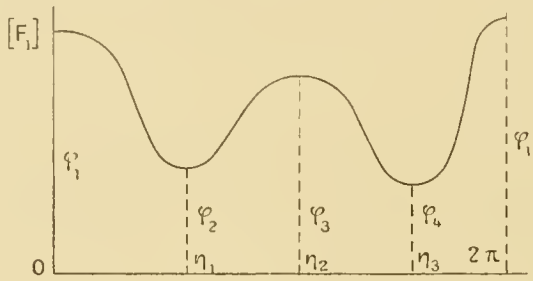

Fig. 5.

$[F_1]$ est par conséquent une fonction périodique de y_2 et cette fonction est finie; elle doit donc passer au moins par un maximum et par un minimum.

Nous supposerons pour fixer les idées que $[F_1]$ varie de la façon suivante quand y_2 varie depuis zéro jusqu'à 2π.

Pour $y_2 = 0$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_1,

Pour $y_2 = \eta_1$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_2.

Pour $y_2 = \eta_2$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_3.

Pour $y_2 = \eta_3$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_4.

Pour $y_2 = 2\pi$ $[F_1]$ reprend la valeur φ_1.

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4.$$

Ces hypothèses peuvent être représentées par la courbe précédente dont l'abscisse est y_2 et l'ordonnée $[F_1]$.

Ayant ainsi fixé les idées, je puis construire les courbes

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Nous verrons que selon la valeur de la constante d'intégration C_1, ces courbes affecteront des formes différentes.

Dans la figure 6, j'ai représenté par un trait plein ———— les deux courbes $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$; ces deux courbes ont chacune un point double dont les coordonnées sont respectivement :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_3 \qquad \text{et} \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_1.$$

J'ai représenté par un trait pointillé ------- les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1 > -\varphi_4$.

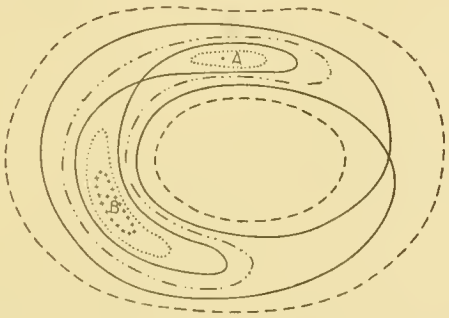

Fig. 6.

J'ai représenté par le trait mixte _.._.._.._ une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué ..... les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$.

Pour $C_1 = -\varphi_3$ l'une de ces deux branches se réduit à un point représenté sur la figure en A, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $y_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée sur la figure par le trait ××××××××.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, cette seconde branche subsiste seule; pour $C_1 = -\varphi_1$, elle se réduit à son tour à un point représenté en B sur la figure et ayant pour coordonnées :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = 0.$$

Enfin pour $C_1 < -\varphi_4$, la courbe devient tout entière imaginaire.

Les surfaces définies par l'équation (1) ont une forme générale qu'il est aisé de déduire de celle des courbes que nous venons de construire.

Considérons en effet une quelconque de ces courbes et par tous ses points faisons passer une des lignes dont l'équation générale est

$$y_2 = \text{const.}; \qquad \frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

L'ensemble des lignes ainsi construites constituera une surface fermée qui sera précisément l'une des surfaces définies par l'équation (9).

On voit par là que ces surfaces seront en général des surfaces fermées triplement connexes (c'est-à-dire ayant mêmes connexions que le tore).

Pour $C_1 > -\varphi_1$ ou pour C_1 compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$ on trouve deux pareilles surfaces, intérieures l'une à l'autre dans le premier cas, extérieures l'une à l'autre dans le second.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, ou entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$, on n'a plus qu'une seule surface triplement connexe; enfin pour $C_1 < -\varphi_1$ la surface cesse complètement d'exister.

Passons aux quatre surfaces remarquables :

$$C = -\varphi_1, \quad -\varphi_2, \quad -\varphi_3 \quad \text{et} \quad -\varphi_4.$$

Les surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $C_1 = -\varphi_1$ présentent une courbe double et ont mêmes connexions que la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de Pascal à point double ou d'une lemniscate, autour d'un axe qui ne rencontre pas la courbe.

La surface $C_1 = -\varphi_3$ se réduit à une seule surface fermée triplement connexe et à une courbe fermée isolée; enfin la surface $C_1 = -\varphi_4$ se réduit à une courbe fermée isolée.

Dans le paragraphe 11 nous avons envisagé l'équation $\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0$ qui portait le n° 7 dans ce paragraphe; nous avons vu qu'à chacune des racines de cette équation correspond une solution périodique. Mais dans le cas qui nous occupe, et d'après une remarque que nous venons de faire, cette équation peut s'écrire

$$\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0,$$

de telle sorte que les solutions périodiques correspondront aux maxima et aux minima de $[F_1]$. Dans le cas actuel, ces maxima, de même que les minima, seront au nombre de deux.

Nous aurons donc deux solutions périodiques instables correspondant aux deux courbes doubles des surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $-\varphi_4$ et deux solutions pério-

diques stables, correspondant aux deux courbes fermées isolées des surfaces $C_1 = -\varphi_3$ et $-\varphi_1$.

Quelles sont parmi ces surfaces, celles qui diffèrent peu des surfaces asymptotiques et les représentent en première approximation ? D'après ce que nous avons vu au paragraphe 16, ce seront celles d'entre elles qui présentent une courbe double, c'est-à-dire les surfaces $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$.

18. — Deuxième approximation.

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent et les hypothèses faites au début de ce paragraphe ; écrivons

$$x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$
$$x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots;$$

imaginons que les coefficients de ces deux développements soient des fonctions de y_1 et de y_2 et cherchons à déterminer ces coefficients de façon que ces équations soient compatibles avec les équations différentielles (1), du paragraphe précédent, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

C'est là le problème que nous nous sommes proposé plus haut.

Ce problème peut être présenté sous une autre forme (en se plaçant au point de vue des *Vorlesungen über Dynamik*).

Si x_1 et x_2 sont deux fonctions de y_1 et de y_2 satisfaisant aux équations (1), l'expression $x_1\,dy_1 + x_2\,dy_2$ devra être une différentielle exacte. Si donc nous posons

$$dS = x_1\,dy_1 + x_2\,dy_2,$$

S sera une fonction de y_1 et de y_2 qui sera définie par l'équation aux dérivées partielles :

$$(2)\qquad F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right) = C.$$

S pourra se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et l'on aura

$$(3)\qquad S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + S_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots.$$

$S_0, S_1, \ldots, S_k, \ldots$ seront des fonctions de y_1 et de y_2 et l'on aura

$$\frac{dS_k}{dy_1} = x_1^k, \qquad \frac{dS_k}{dy_2} = x_2^k.$$

Je rappelle maintenant quelles conditions nous avons imposées dans le paragraphe précédent aux fonctions x_1^k et x_2^k; nous avons supposé d'abord que x_1^0 et x_2^0 devaient être des constantes. On a alors

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Si nous appelons ensuite n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ces quantitée n_1 et n_2 seront encore des constantes. L'analyse qui va suivre s'applique au cas où le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable. Dans ce cas on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer $n_2 = 0$; c'est ce que nous ferons désormais, comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent.

Nous avons supposé en outre dans ce paragraphe que x_1^k et x_2^k sont des fonctions périodiques de y_1 qui ne changent pas de valeur quand on change y_1 et y_2 en $y_1 + 2\pi$ et y_2.

Il résulte de là que $\frac{dS_k}{dy_1}$ et $\frac{dS_k}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques par rapport à y_1 et que l'on peut écrire

$$S_k = \frac{\lambda_k}{n_1} y_1 + S'_k, \tag{4}$$

λ_k étant une constante et S'_k une fonction périodique de y_1.

Supposons que dans le premier membre de l'équation (2) : $F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$, on remplace S par son développement (3); on verra que F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et qu'on aura, ainsi que l'on a vu dans le paragraphe précédent :

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + H_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

les H étant des fonctions de y_1, de y_2, et des dérivées partielles de S_0, S_1, S_2, etc.

On voit d'ailleurs que H_0 dépendra seulement de S_0, H_1 de S_0 et S_1, H_2 de S_0, S_1 et S_2, H_3 de S_0, S_1, S_2, S_3, etc.

On trouve d'ailleurs :

$$\begin{aligned}
H_0 &= F_0(x_1^0, x_2^0) = C,\\
H_1 &= -n_1\frac{dS_1}{dy_1},\\
H_2 &= -n_1\frac{dS_2}{dy_1} + \Delta S_1 + K_2,\\
H_3 &= -n_1\frac{dS_3}{dy_1} + 2\Delta S_2 + K_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H_p &= -n_1\frac{dS_p}{dy_1} + 2\Delta S_{p-1} + K_p,
\end{aligned}$$

où l'on a posé pour abréger :

$$\Delta S_p = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2 F_0}{(dx_1^0)^2} x_1^1 x_1^p + \frac{d^2 F_0}{dx_1^0\, dx_2^0}(x_1^1 x_2^p + x_2^1 x_1^p) + \frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2} x_2^1 x_2^p\right]$$

et où K_p ne dépend que de S_0, S_1, ..., jusqu'à S_{p-2}.

Cela posé, pour déterminer par récurrence les fonctions S_p, nous aurons les équations suivantes :

$$H_0 = C, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad H_p = 0.$$

Si l'on supposait que les fonctions S_0, S_1, ..., S_{p-1} fussent entièrement connues, l'équation $H_p = 0$ ou

$$(5) \qquad n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p$$

déterminerait la fonction S_p à une fonction arbitraire près de y_2.

Mais ce n'est pas tout à fait ainsi que la question se présente.

Supposons que l'on connaisse complètement S_0, S_1, ..., S_{p-2} et que l'on connaisse S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2.

Par hypothèse les dérivées de S_0, S_1, ..., S_{p-2}, S_{p-1} sont des fonctions périodiques de y_1 ; donc K_p et ΔS_{p-1} seront des fonctions périodiques de y_1.

Désignons par [U] comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent la valeur moyenne de U qui est une fonction périodique de y_1.

S_p doit être de la forme (4); nous en concluons que $\left[\frac{dS_p}{dy_1}\right]$ doit être une constante $\frac{\lambda_p}{n_1}$ indépendante de y_2, de sorte que l'équation (5) nous donne

$$(6) \qquad 2[\Delta S_{p-1}] + [K_p] = \lambda_p,$$

et cette équation déterminera complètement S_{p-1} (si l'on suppose que l'on se donne, soit arbitrairement, soit suivant une loi quelconque, la constante λ_p).

Nous trouvons d'abord l'équation

$$H_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dS_1}{dy_1} = 0,$$

qui nous montre que S_1 est une fonction arbitraire de y_2.

Nous en déduirons

$$2\Delta S_p = -M\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_1} - N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_2}$$

[nous posons pour abréger :

$$-M = \frac{d^2 F_0}{dy_1^0\, d_2^0}, \qquad -N = \frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2},$$

comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité].

L'équation que nous trouvons ensuite en égalant à zéro la valeur moyenne de H_2 est la suivante :

$$[\Delta S_1] + [K_2] = \lambda_2.$$

Or

$$\Delta S_1 = -\frac{N}{2}\left(\frac{dS_1}{dy_2}\right)^2 = [\Delta S_1].$$

D'autre part,

$$K_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2).$$

λ_2 est une constante qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est précisément celle que nous avons appelée $-C_1$ dans le paragraphe cité.

Il vient donc

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

S_1 est ainsi entièrement déterminé à une constante près ; mais nous pouvons laisser cette constante de côté, elle ne joue en effet aucun rôle, puisque les fonctions S n'entrent que par leurs dérivées.

L'équation (6) devient ensuite

$$(7) \qquad \left[N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\left[\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p].$$

Dans le second membre tout est connu; K_p ne dépend que de S_0, S_1, ..., S_{p-2}; $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est connu puisque S_{p-1} est supposé déterminé à une fonction arbitraire près de y_2.

D'autre part $\frac{dS_1}{dy_2}$ est indépendant de y_1; le premier membre peut donc s'écrire $N\frac{dS_1}{dy_1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$, de sorte que l'équation (7) nous donnera $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ en fonction de y_2. Nous connaîtrons donc $[S_{p-1}]$ à une constante près et cette constante qui ne joue aucun rôle peut être laissée de côté.

Nous connaissons d'une part S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2; d'autre part nous connaissons $[S_{p-1}]$ en fonction de y_2; donc S_{p-1} est entièrement déterminé.

La constante C_1 joue un rôle prépondérant. Supposons d'abord qu'elle soit supérieure à la valeur que nous avons appelée $-\varphi_4$ dans les paragraphes cités et par conséquent que $[F_1] + C_1$ soit toujours positif et $\frac{dS_1}{dy_2}$ toujours réel et je pourrai ajouter toujours positif, parce que je suis libre de prendre le signe $+$ devant le radical.

Je dis que dans ce cas, on peut choisir arbitrairement les constantes λ et que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques non seulement de y_1, mais encore de y_2. (S_p est encore de la forme $\lambda_p y_1 + \mu_p y_2 + S''_p$, λ_p et μ_p étant des constantes pendant que S''_p est périodique de période 2π tant par rapport à y_1 que par rapport à y_2).

En effet, supposons que cela soit vrai pour

$$\frac{dS_1}{dy_1},\quad \frac{dS_1}{dy_2},\quad \frac{dS_2}{dy_1},\quad \frac{dS_2}{dy_2},\quad \ldots,\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\quad \frac{dS_{p-1}}{dy_1};$$

je dis que cela sera vrai encore pour $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$.

En effet, nous avons par hypothèse :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \Sigma A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha),$$

les A et les α étant des constantes, m_1 et m_2 étant des entiers.

On aura ensuite par définition

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} A_{0,m_2} \cos(m_2 y_2 + \alpha).$$

Mais on doit avoir

$$2[\Delta S_{p-2}] + [K_{p-1}] = \lambda_{p-1}$$

et par conséquent

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1},$$

λ_{p-1} étant une constante; on en conclut que

$$A_{0,m_2} = 0 \quad \text{pour} \quad m_2 \neq 0, \qquad A_{0,0} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1}.$$

Il vient ainsi

$$S_{p-1} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1} y_1 + \Sigma A_{m_1 m_2} \frac{\sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha)}{m_1} + [S_{p-1}],$$

m_1 et m_2 prenant toujours sous le signe Σ toutes les valeurs entières telles que $m_1 \neq 0$.

Ainsi, pour que S_{p-1} soit de la forme voulue, il suffit que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ soit une fonction périodique de y_2. Or $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ est défini par l'équation

$$N \frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M \frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p].$$

K_p ne dépendant que de $S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$ sera périodique en y_2.

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$ est une constante $\frac{\lambda_{p-1}}{n_1}$; de plus $\frac{dS_1}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_2 *qui ne s'annule jamais.*

Il en résulte que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ peut être développé suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_2. On a ensuite

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2(\Delta S_{p-1}) + K_p,$$

ce qui montre que $\frac{dS_p}{dy_1}$ est périodique en y_1 et y_2.

Ainsi en choisissant pour C_1 une valeur supérieure à $-\varphi_4$ et en choisissant ensuite les autres constantes λ_3, λ_4, ... d'une façon arbitraire, on trouve pour $\frac{dS}{dy_1}$ et $\frac{dS}{dy_2}$ des séries ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_1 et de y_2. Ces séries, quoique divergentes, peuvent rendre des services dans certains cas.

Passons maintenant au cas de $C_1 = -\varphi_4$, qui ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 17 est celui qui correspond aux séries qui représentent asymptotiquement les surfaces asymptotiques.

L'expression $[F_1] + C_1$ n'est jamais négative, mais elle devient nulle pour une certaine valeur de y_2 que nous avons appelée η_3 dans le paragraphe cité. Je supposerai dans ce paragraphe que cette valeur est nulle; j'ai le droit de le faire, puisque cela n'implique qu'un choix particulier de l'origine des y_2.

Écrivons donc $[F_1] + C_1$ sous forme de série trigonométrique :

$$[F_1] + C_1 = \Sigma A_m \sin m y_2 + \Sigma B_m \cos m y_2.$$

Pour $y_2 = 0$, cette fonction s'annule ainsi que sa dérivée, puisque la fonction étant toujours positive, zéro est pour elle un minimum. Il en résulte que l'expression suivante : $\frac{[F_1] + C_1}{\sin^2 \frac{y_2}{2}}$ est développable suivant les sinus et cosinus des multiples de y_2; c'est une fonction périodique de y_2 qui ne s'annule jamais et ne devient jamais infinie.

Il suit de là que l'on peut écrire

$$\frac{\sin \frac{y_2}{2}}{\sqrt{[F_1] + C_1}} = \Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2,$$

et par conséquent

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2}.$$

Nous pourrons écrire maintenant l'équation (7) sous la forme suivante :

$$(7') \qquad \frac{\sqrt{2N}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p + \Phi_p(y_2),$$

Φ_p étant une fonction connue de y_2.

Cela posé, je me propose de démontrer que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques de y_1 et de y_2, dont la période est 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2.

Supposons en effet que cela soit démontré pour

$$\frac{dS_1}{dy_1},\quad \frac{dS_1}{dy_2},\quad \frac{dS_2}{dy_1},\quad \frac{dS_2}{dy_2},\quad \ldots,\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\quad \frac{dS_{p-1}}{dy_1}.$$

$\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2; d'autre part sa valeur moyenne

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}$$

est une constante indépendante de y_2. Nous pourrons donc écrire

$$S_{p-1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}y_1 + \theta_{p-1}(y_1, y_2) + \zeta_{p-1}(y_2),$$

$\theta_{p-1}(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de y_1 et y_2, et ζ_{p-1} une fonction arbitraire de y_2 seulement. Il vient ensuite

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2},$$

d'où

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2},$$

ce qui montre que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2.

L'équation (7') montre que cela est vrai également de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ et par conséquent de $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ (quelle que soit d'ailleurs la constante λ_p) et l'équation (5) montre que cela est vrai de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

Cela sera donc vrai des fonctions $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ quel que soit l'indice p.

Il importe toutefois de remarquer que si ces fonctions sont périodiques, ce n'est pas une raison suffisante pour qu'elles puissent être développées suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$. En effet, ces fonctions ne sont

pas toujours finies, sauf pour un choix particulier des constantes λ_p; il est aisé de s'en rendre compte, car l'équation (7'), d'où l'on doit tirer la valeur de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$, a en facteur dans son premier membre $\sin\frac{y_2}{2}$. Donc l'expression de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ contiendra $\sin\frac{y_2}{2}$ au dénominateur.

Les dérivées des fonctions S_p pourront donc devenir infinies, mais seulement pour

$$\sin\frac{y_2}{2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad y_2 = 2k\pi.$$

Si y_2 a une valeur différente de $2k\pi$, ces dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur de y_1; elles peuvent donc se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1.

Nous pouvons donc écrire par exemple :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \Sigma A_m \cos m y_1 + \Sigma B_m \sin m y_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2 qui peuvent devenir infinies.

Imaginons maintenant que les constantes λ_p *d'indice impair* soient toutes nulles; je dis que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ ne changeront pas quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$ toutes les fois que l'indice p sera pair et qu'au contraire ces deux fonctions changeront de signe, sans changer de valeur absolue, quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$, toutes les fois que l'indice p sera impair.

Je suppose que le théorème soit vrai pour

$$\frac{dS_1}{dy_1},\quad \frac{dS_1}{dy_2},\quad \frac{dS_2}{dy_1},\quad \frac{dS_2}{dy_2},\quad \ldots,\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\quad \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

et je me propose de démontrer qu'il est vrai également pour $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$.

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est muliplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$, il en sera de même de

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Nous avons trouvé en effet

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \Sigma A_m \cos m y_1 + \Sigma B_m \sin m y_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2.

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 augmente de 2π, il en sera de

même de A_m et B_m et des dérivées de ces fonctions par rapport à y_2. Il en sera donc encore de même de

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = \sum \frac{dA_m}{dy_2}\frac{\sin m y_1}{m} - \sum \frac{dB_m}{dy_2}\frac{\cos m y_1}{m}.$$

Nous avons maintenant à montrer que cela est vrai de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$.

Pour cela il est nécessaire d'étudier de quelle manière K_p dépend des fonctions S_0, S_1, S_2, ..., S_{p-1}. Je me propose d'établir que l'ordre de tous les termes de K_p par rapport aux dérivées des fonctions d'indice impair S_1, S_3, S_5, ... sera de même parité que p.

En effet, en faisant dans $F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$,

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + \ldots,$$

nous avons trouvé

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + \ldots.$$

Si je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$ et qu'en même temps je change S_1, S_3, S_5, ... en $-S_1$, $-S_3$, $-S_5$, ... sans toucher aux fonctions d'indice pair, l'expression de F ne devra pas changer.

Donc H_p devra se changer en $(-1)^p H_p$.

Cela montre que l'ordre de tous les termes de H_p par rapport aux dérivées de S_1, S_3, S_5, ..., devra être de même parité que p. Il devra donc, comme je l'ai annoncé, en être de même des termes de K_p, puisqu'on obtient K_p en supprimant dans H_p les termes qui dépendent de S_{p-1} ou de S_p.

Cela posé, changeons y_2 en $y_2 + 2\pi$; les dérivées de S_q ne changeront pas si q est pair et au plus égal à $p-2$; elles changeront de signe si q est impair et au plus égal à $p-2$. Donc K_p se changera en $(-1)^p K_p$.

Reprenons maintenant l'équation (7)

$$(7) \qquad N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p].$$

Quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$, $[K_p]$ se change en $(-1)^p[K_p]$, $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$ se change en $(-1)^p\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$, et $\frac{dS_1}{dy_2}$ se change en $-\frac{dS_1}{dy_2}$.

Nous pouvons même dire que λ_p se change en $(-1)^p\lambda_p$.

En effet cela est vrai pour p pair, parce que λ_p est une constante indépendante de y_2; cela est vrai encore pour p impair, parce que nous avons supposé que les λ_p d'indice impair sont tous nuls.

Il résulte de là que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ se change en $(-1)^{p-1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ et par conséquent $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ en $(-1)^{p-1}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$. C. Q. F. D.

Je dis maintenant que $\frac{dS_p}{dy_1}$ se changera en $(-1)^p\frac{dS_p}{dy_1}$.

Écrivons en effet l'équation (5)

$$n_1\frac{dS_p}{dy_1} = 2\,\Delta S_{p-1} + K_p; \tag{5}$$

K_p et ΔS_{p-1} et par conséquent le second membre de l'équation (5) seront multipliés par $(-1)^p$ quand y_2 augmentera de 2π. Il devra donc en être de même du premier membre et de $\frac{dS_p}{dy_1}$. C. Q. F. D.

Je vais maintenant démontrer que l'on peut choisir les constantes λ_p de façon que les dérivées des fonctions S_p ne deviennent pas infinies pour $y_2 = 2k\pi$.

Supposons que l'on ait choisi les constantes $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}$ de façon que

$$\frac{dS_1}{dy_1},\quad \frac{dS_1}{dy_2},\quad \ldots,\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\quad \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\quad \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

restent finies et que les constantes λ_q d'indice impair soient nulles; je me propose de choisir λ_p de façon que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$ ne deviennent pas non plus infinies. Nous verrons en même temps que λ_p devra être nulle si p est impair.

Il est clair d'abord que si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ reste finie, il en sera de même de

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] \qquad \text{et} \qquad \Phi_p(y_2) = [K_p] - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right].$$

Reprenons maintenant l'équation (7'). Le coefficient de la quantité inconnue $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ s'annule pour $y_2 = 2k\pi$; pour que cette quantité inconnue demeure finie, il faut que le second membre s'annule également et que l'on ait

$$\Phi_p(2k\pi) = \lambda_p.$$

Comme Φ_p ne change pas quand y_2 augmente de 4π, il suffira de prendre $k = 0$ et $k = 1$ et d'écrire

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p. \tag{8}$$

Si p est pair, il n'y a pas de difficulté, on a

$$\Phi_p(y_2) = \Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et par conséquent

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi),$$

de sorte qu'il suffit de prendre

$$\lambda_p = \Phi_p(0).$$

Si au contraire p est impair, on a

$$\Phi_p(y_2) = -\Phi_p(y_2 + 2\pi) \qquad \text{et} \qquad \Phi_p(0) = -\Phi_p(2\pi),$$

de sorte que les équations (8) ne peuvent être satisfaites que si l'on a

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p = 0.$$

Nous avons donc à démontrer que pour p impair, $\Phi_p(0)$ est nul.

Soit en effet

$$\Phi_p(0) = \alpha$$

et par conséquent

$$\Phi_p(2\pi) = -\alpha.$$

Je dis que α est nul.

Nous allons nous appuyer sur un lemme qui est presque évident. Voici l'énoncé de ce lemme :

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions périodiques et de période 2π par rapport à y_1 et à y_2. On sait que si φ est une fonction périodique de y_1, par exemple, la valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dy_1}$ est nulle. On aura donc

$$\iint \frac{d\varphi_1}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 = \iint \frac{d\varphi_2}{dy_1}\, dy_1\, dy_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1}\right) dy_1\, dy_2 = 0,$$

les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de y_1 et de y_2 depuis zéro jusqu'à 2π.

Il est nécessaire pour que le lemme soit vrai que les fonctions φ_1 et φ_2 soient continues, mais leurs dérivées peuvent être discontinues. Ces dérivées doivent seulement rester finies.

Cela posé, nous achèverons de déterminer la fonction S_{p-1} non plus par l'équation (7'), mais par l'équation suivante :

$$(9) \qquad \frac{\sqrt{2N}\sin\frac{y_2}{2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]}{\Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2} = -\alpha\cos\frac{y_2}{2} + \Phi_p(y_2).$$

Elle ne diffère de l'équation (7') que parce que λ_p a été remplacé par $\alpha\cos\frac{y_2}{2}$.

Cette équation montre d'abord que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ est une fonction périodique de y_2 et de période 2π (je rappelle que p est supposé impair). De plus, cette fonction ne devient pas infinie pour $y_2 = 2k\pi$, parce que le second membre de l'équation (9) s'annule pour $y_2 = 0$ et pour $y_2 = 2\pi$.

Posons ensuite

$$\zeta_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}}\frac{dS_1}{dy_1} + \mu\frac{dS_2}{dy_1} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_1} + \mu^{\frac{p}{2}}\eta,$$

$$\zeta_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \mu^{\frac{1}{2}}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2};$$

η sera une fonction de y_1, de y_2 et de μ définie par l'équation

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C. \tag{10}$$

Il est aisé de voir que ζ_2 est entièrement déterminé, puisque nous connaissons maintenant complètement $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$. On pourra donc tirer η de l'équation (10) sous la forme suivante :

$$\eta = \eta_0 + \mu^{\frac{1}{2}}\eta_1 + \mu\eta_2 + \ldots,$$

les η_i étant des fonctions périodiques de y_1 et de y_2, de période 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2.

De plus on aura

$$\frac{d\zeta_1}{dy_2} - \frac{d\zeta_2}{dy_1} = \mu^{\frac{p}{2}}\frac{d\eta}{dy_2}.$$

Nous n'avons besoin que de η_0; or on voit tout de suite que η_0 est donnée par l'équation suivante :

$$n_1\eta_0 = 2\,\Delta S_{p-1} + K_p, \tag{11}$$

qui ne diffère de l'équation (5) que parce que l'inconnue y est désignée par η_0.

Cette équation montre que η_0 est une fonction périodique de y_1; il faut chercher la valeur moyenne de cette fonction. Si l'on se reporte à la signification de l'équation (9), on verra qu'elle exprime que la partie moyenne du second membre de (11) est $\alpha\cos\frac{y_2}{2}$. On a donc

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1}\cos\frac{y_2}{2}.$$

ζ_2 est susceptible de deux valeurs différentes qui se permutent l'une dans l'autre, soit quand on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, soit quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$.

J'appellerai φ_2 la plus grande des deux valeurs de ζ_2 et ψ_2 la plus petite.

De même ζ_1 est susceptible de deux valeurs; j'appellerai φ_1 celle qui correspond à φ_2 et ψ_1 celle qui correspond à ψ_2.

Enfin η est susceptible de deux valeurs; j'appellerai η' celle qui correspond à φ_2 et η'' celle qui correspond à ψ_2; η_i est susceptible de deux valeurs que j'appellerai de même η'_i et η''_i.

La fonction φ_2 est périodique de période 2π par rapport à y_2; en effet, quand on augmente y_2 de 2π, les deux valeurs de ζ_2 se permutent entre elles; donc φ_2 qui est toujours égale à la plus grande de ces deux valeurs ne change pas.

Pour la même raison, φ_1, ψ_1, ψ_2, η', η'', η'_i, η''_i seront des fonctions de période 2π par rapport à y_2.

Des définitions précédentes, il résulte que φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions continues, quoique les dérivées de ces fonctions, de même que η' et η'', puissent être discontinues.

Nous sommes donc dans les conditions où notre lemme est applicable et nous pourrons écrire

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta'}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 = \iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1}\right) dy_1\, dy_2 = 0,$$

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta''}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 = \iint \left(\frac{d\psi_1}{dy_2} - \frac{d\psi_2}{dy_1}\right) dy_1\, dy_2 = 0,$$

ou encore

$$\iint \frac{d(\eta' - \eta'')}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 = 0,$$

ou enfin

$$\iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 + \iint \left[\frac{d(\eta' - \eta'_0)}{dy_2} - \frac{d(\eta'' - \eta''_0)}{dy_2}\right] dy_1\, dy_2 = 0.$$

Cette relation devra avoir lieu quel que soit μ.

Mais quand μ tend vers zéro, $\eta' - \eta'_0$ et $\eta'' - \eta''_0$ tendent vers zéro.

Donc on aura

$$(12) \qquad \lim \iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 = 0 \qquad \text{pour} \quad \mu = 0.$$

Transformons le premier membre de l'égalité (12). Je remarque d'abord que p étant impair, η_0 est une fonction qui doit se changer en $-\eta_0$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$. Il suffit pour s'en convaincre de se reporter à l'équation (11). Nous avons donc

$$\eta'_0 = -\eta''_0 = \pm \eta_0,$$

d'où

$$\iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 = 2 \iint \frac{d\eta'_0}{dy_2}\, dy_1\, dy_2 = 2 \iint \frac{d(\pm \eta_0)}{dy_2}\, dy_1\, dy_2.$$

Il reste à voir pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta'_0 = +\eta_0$ et pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta'_0 = -\eta_0$.

Si nous avons

$$(13) \qquad \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_3}{dy_2} + \mu^2 \frac{dS_5}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-3}{2}} \frac{dS_{p-2}}{dy_2} > 0,$$

nous devrons prendre, d'après notre convention :

$$\xi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} + \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} - \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Si au contraire le premier membre de l'inégalité (13) est négatif, nous devrons prendre

$$\xi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Tout dépend donc du signe de premier membre de l'inégalité (13). Égalons ce premier membre à zéro, nous obtiendrons une équation

$$\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots = 0. \tag{14}$$

Cette équation peut être regardée comme définissant y_2 en fonction de y_1 et de μ.

On pourra résoudre cette équation et écrire

$$y_2 = \theta(y_1, \mu).$$

Observons seulement que θ est une fonction périodique de période 2π par rapport à y_1 et que cette fonction θ s'annule identiquement quand on y fait $\mu = 0$.

Par conséquent quand y_2 variera de 0 à $0 + 2\pi$, on aura

$$\eta'_0 = +\eta_0$$

et quand y_2 variera de $0 + 2\pi$ à $0 + 4\pi$, on aura

$$\eta'_0 = -\eta_0.$$

Nos intégrales doivent être étendues à toutes les valeurs de y_2 comprises entre zéro et 2π. Mais comme η'_0 est une fonction de période 2π, on aura

$$\int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta'_0}{dy_2} = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{0+2\pi} dy_2 \frac{d\eta'_0}{dy_2}$$

ou

$$\iint \frac{d\eta'_0}{dy_2} dy_1\, dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{0+2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2}.$$

Quand μ tendra vers zéro, le premier membre devra tendre vers zéro et d'ailleurs θ tendra vers zéro, on aura donc

$$\lim \iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2} = 0,$$

d'où

$$0 = \iint \frac{d\eta_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{d[\eta_0]}{dy_2} dy_2 = -\pi \frac{\alpha}{n_1} \int_0^{2\pi} \sin \frac{y_2}{2} dy_2 = -\frac{4\pi\alpha}{n_1}.$$

On a donc

$$\alpha = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de là que si l'on annule les constantes λ_p d'indice impair et si l'on donne des valeurs convenables aux constantes λ_p d'indice pair, les fonctions $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ resteront finies.

On pourra donc les développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$; les multiples pairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls dans le développement si p est pair; si au contraire p est impair, les multiples impairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls.

Nous aurons alors pour les équations approximatives de la surface asymptotique

$$(15) \qquad x_1 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1}, \qquad x_2 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_2}.$$

Ces séries ainsi que nous l'avons vu sont divergentes, mais si l'on arrête comme nous le faisons dans les équations (15) au $n^{\text{ième}}$ terme, l'erreur commise peut être très petite si μ est très petit, ainsi que je l'ai exposé plus haut.

Nous avons vu que la quantité appelée plus haut α est toujours nulle. On peut donner de ce fait essentiel une autre démonstration.

Posons

$$T = S_1 + \mu S_3 + \mu^2 S_5 + \ldots + \mu^{\frac{p-3}{2}} S_{p-2},$$
$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \ldots.$$

Je dis d'abord que T est une fonction périodique de y_1 et y_2.

En effet ses dérivées $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques; on a donc

$$T = \beta y_1 + \gamma y_2 + T',$$

β et γ étant des constantes et T' étant une fonction périodique de y_1 et y_2.

On en conclut que

$$\frac{dT}{dy_1} = \beta + \frac{dT'}{dy_1}, \qquad \frac{dT}{dy_2} = \gamma + \frac{dT'}{dy_2},$$

$\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT'}{dy_2}$ étant des séries trigonométriques dont le terme tout connu est nul.

Mais les fonctions $S_1, S_3, \ldots, S_{p-2}$ étant d'indice impair, leurs dérivées changent de signe quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$. Donc $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ changent de signe quand y_2 augmente de 2π. Donc les termes tout connus β et γ sont nuls. Donc $T = T'$ est une fonction périodique qui ne change pas quand y_1 augmente de 2π et qui change de signe quand y_2 augmente de 2π.

Cela posé, nous savons que ζ_1 et ζ_2 sont liées par l'équation

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il en résulte que, si les deux valeurs de ζ_2 se confondent, les deux valeurs de ζ_1 se confondent également.

Écrivons que les deux valeurs de ζ_2 se confondent, il vient

$$\frac{dT}{dy_2} = 0. \tag{16}$$

Cette équation (16) est d'ailleurs identique à l'équation (14). Écrivons maintenant que les deux valeurs de ζ_1 se confondent, il viendra

$$\frac{dT}{dy_1} + \mu^{\frac{p-1}{2}} \xi = 0. \tag{17}$$

Les équations (16) et (17) devront être équivalentes. De plus elles devront être équivalentes à la suivante :

$$y_2 = \theta(y_1, \mu),$$

θ ayant le même sens que plus haut. Supposons qu'on développe θ suivant les puissances croissantes de μ, il viendra

$$y_2 = \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3 + \ldots, \tag{18}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ étant des fonctions périodiques de y_1.

Supposons y_2 lié à y_1 par l'équation (18); quand y_1 augmentera de 2π, y_2 ne changera pas et T qui est périodique ne changera pas non plus; on aura donc

$$\int_{y_1=0}^{y_1=2\pi} dT = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dT}{dy_1} dy_1 + \frac{dT}{dy_2} dy_2\right) = 0,$$

ou en remplaçant $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ par leurs valeurs tirées des équations (16) et (17) :

$$-\mu^{\frac{p-1}{2}} \int_0^{2\pi} \xi \, dy_1 = 0.$$

Si dans

$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \ldots,$$

on remplace y_2 par sa valeur (18), il viendra

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots.$$

ξ_0, ξ_1, ξ_3, etc. étant des fonctions périodiques de y_1.

On devra avoir quel que soit μ :

$$\int_0^{2\pi} dy_1(\xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots) = 0$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \xi_0 \, dy_1 = 2\pi[\xi_0] = 0.$$

Il est clair que pour obtenir ξ_0, il suffit de faire $y_2 = 0$ dans η_0, or on a

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1} \cos\frac{y_2}{2}.$$

Il vient donc

$$\frac{2\pi\alpha}{n_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

19. — Troisième approximation.

Nous nous proposons maintenant de construire exactement nos surfaces asymptotiques ou plutôt leur intersection avec la surface $y_1 = 0$, qui est comme nous l'avons vu plus haut une surface sans contact.

Dans notre mode de représentation géométrique, la solution périodique que nous envisageons est représentée par une certaine courbe trajectoire fermée. Cette courbe fermée vient couper la surface $y_1 = 0$ en un point que j'ai représenté sur la figure en O'.

Par cette courbe fermée passent deux surfaces asymptotiques; ces deux surfaces coupent la surface $y_1 = 0$ suivant deux courbes que j'ai représentées sur la figure en trait plein en AO'B' et A'O'B.

J'ai représenté en trait pointillé ------- la courbe $y_1 = y_2 = 0$.

Reprenons les notations du paragraphe 16: considérons les séries s_1 et s_2 qui

entrent dans les équations (4) de ce paragraphe; soient comme dans le paragraphe 16. s_1^p et s_2^p la somme des p premiers termes des séries s_1 et s_2. Nous avons vu que les équations

$$x_1 = s_1^p(y_1, y_2), \qquad x_2 = s_2^p(y_1, y_2)$$

représentent des surfaces qui diffèrent très peu des surfaces asymptotiques. Ces surfaces couperont la surface $y_1 = 0$ suivant des courbes qui ont pour équation

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = s_1^p(0, y_2), \qquad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

et qui sont représentées sur la figure en trait mixte . . . . . .

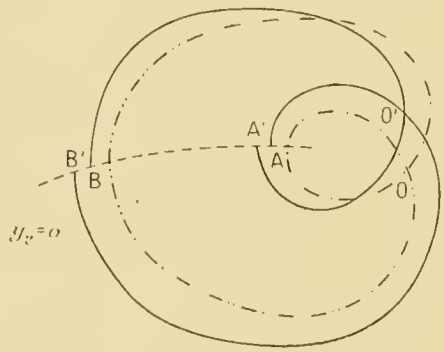

Fig. 7.

Nous avons appris dans le paragraphe précédent à former les séries s_1 et s_2; nous avons vu que $s_1^p(y_1, y_2)$ et $s_2^p(y_1, y_2)$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport à y_1 et de période 4π par rapport à y_2.

Il en résulte que la courbe en trait mixte doit être comme l'indique la figure une courbe fermée admettant un point double O.

La première question à traiter est la suivante : les courbes en trait plein, intersections des surfaces asymptotiques avec $y_1 = 0$, sont-elles aussi des courbes fermées ? Il est clair qu'il en serait ainsi si les séries s_1 et s_2 étaient convergentes. Car les courbes en trait pointillé différeraient alors aussi peu qu'on voudrait des courbes en trait plein ; la distance d'un point de la courbe pleine à la courbe pointillée tendrait vers zéro quand p croîtrait indéfiniment.

Je vais montrer sur un exemple simple qu'il n'en est pas ainsi. Soit

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu\varepsilon \cos x \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ représente une fonction périodique de y de période 2π, et où μ et ε sont deux constantes que je suppose très petites. Je forme les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{dF}{dp} = 1, & \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{dF}{dq} = 2q, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dF}{dx} = -\mu\varepsilon \sin x\varphi(y), & \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dF}{dy} = \mu \sin y + \mu\varepsilon \cos x\varphi'(y). \end{cases}$$

On voit que p et q joueront le même rôle que j'attribuais jusqu'ici à x_1 et à x_2, pendant que x et y joueront le rôle que j'attribuais à y_1 et à y_2, je n'ai changé les notations que pour supprimer les indices.

Supposons d'abord $\varepsilon = 0$. Les équations admettent alors une solution périodique qui s'écrit

$$x = t, \qquad p = 0, \qquad q = 0, \qquad y = 0.$$

Les exposants caractéristiques (en laissant de côté les deux qui sont nuls, ainsi qu'il arrive toujours avec les équations de la Dynamique) sont égaux à $\pm\sqrt{2\mu}$.

Il existe alors deux surfaces asymptotiques qui ont pour équations

$$p = \frac{dS_0}{dx}, \qquad q = \frac{dS_0}{dy}, \qquad S_0 = \mp 2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2};$$

d'où

$$p = 0, \qquad q = \pm\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}.$$

Les exposants caractéristiques n'étant pas nuls, mais égaux à $\pm\sqrt{2\mu}$ quand on fait $\varepsilon = 0$, il existera encore une solution périodique pour les petites valeurs de ε; à cette solution périodique correspondront deux surfaces asymptotiques dont l'équation pourra se mettre sous la forme

$$p = \frac{dS}{dx}, \qquad q = \frac{dS}{dy},$$

S étant une fonction de x et de y satisfaisant à l'équation

$$\frac{dS}{dx} + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 = 2\mu\sin^2\frac{y}{2} + \mu\varepsilon\cos x\varphi(y).$$

Les exposants caractéristiques ne s'annulant pas pour $\varepsilon = 0$, il résulte de ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 13 que p et q et par conséquent S sont développables suivant les puissances croissantes de ε. Posons donc

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots.$$

Nous avons trouvé plus haut :

$$S_0 = -2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2}.$$

Quant à S_1, il devra satisfaire à l'équation

$$\frac{dS_1}{dx} + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{dS_1}{dy} = \mu\cos x\,\varphi(y).$$

Si l'on désigne par Σ une fonction qui satisfasse à l'équation

$$\frac{d\Sigma}{dx} + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\Sigma}{dy} = \mu\, e^{ix}\varphi(y) \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

S_1 sera la partie réelle de Σ. Or on peut satisfaire à cette équation en faisant

$$\Sigma = e^{ix}\psi(y);$$

il suffit pour cela que

$$i\psi + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\psi}{dy} = \mu\varphi(y).$$

L'équation en ψ ainsi obtenue et qu'il s'agit d'intégrer est linéaire. Son intégrale générale s'écrit : si $\varphi(y) = 0$:

$$\psi = C\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha = -i\sqrt{\frac{2}{\mu}}$$

et si $\varphi(y)$ est quelconque :

$$\psi = C\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}\int\sqrt{\frac{\mu}{2}}\varphi(y)\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{-\alpha}dy.$$

Comme ψ doit être développable suivant les puissances entières de y pour les petites valeurs de y, il est facile de voir quelle valeur il faudra donner à la constante d'intégration. Si, pour $y = 0$, $\varphi(y)$ s'annule, l'intégrale devra s'annuler aussi, de sorte qu'il faudra la prendre entre les limites zéro et y.

Que faudrait-il maintenant pour que les courbes BO'B' et AO'A' fussent fermées ? Il faudrait que la fonction S restât finie ainsi que ses dérivées pour toutes les valeurs de y et fût périodique de période 4π par rapport à y (c'est ce qui arrivait, rappelons-le, pour les fonctions s_1^p et s_2^p dont nous avons parlé un peu plus haut). Comme cela devrait avoir lieu pour toutes les valeurs de ε, cela devrait avoir lieu de S_1, et comme S_1 est égal à $\cos x$ multiplié par la partie réelle de ψ, plus $\sin x$ multiplié par la partie imaginaire de ψ, cela devrait avoir lieu de ψ.

Donc pour les valeurs de y voisines de 2π, ψ devrait être développable suivant les puissances entières de $y - 2\pi$. Mais il n'en est pas ainsi de $\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}$. Donc l'intégrale

$$J = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\varphi(y)\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{-\alpha}dy$$

devrait être nulle. Calculons cette intégrale en supposant $\varphi(y) = \sin y$. Posons $\operatorname{tg}\frac{y}{4} = t$, il viendra

$$J = 4\sqrt{2\mu}\int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Intégrons par parties en remarquant que $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ est la dérivée de $\frac{t}{1+t^2}$, il viendra

$$J = 4\alpha\sqrt{2\mu}\int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}\,dt}{1+t^2}.$$

Faisons $t^2 = u$, on aura

$$J = 2\alpha\sqrt{2\mu}\int_0^\infty \frac{u^{-\frac{\alpha+1}{2}}\,du}{1+u} = \frac{2\pi\alpha\sqrt{2\mu}}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} = \frac{-8\pi i}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}}.$$

Donc J n'est pas nul; donc les courbes BO'B' et AO'A' ne sont pas fermées, donc les séries s_1 et s_2 ne sont pas convergentes, non plus que les séries définies dans les paragraphes 14 et 18 ainsi que je l'avais annoncé dans ces paragraphes.

La distance des deux points B et B' n'est donc pas nulle, mais elle jouit de la propriété suivante. Non seulement BB' tend vers zéro, quand μ tend vers zéro, mais le rapport $\frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}}$ tend également vers zéro quelque grand que soit p.

En effet la courbe pointillée a pour équation

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = s_1^p(0, y_2), \qquad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

et la courbe en trait plein a pour équation

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = f_1(0, y_2), \qquad x_2 = f_2(0, y_2).$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, les séries s_1 et s_2 représentent asymptotiquement les fonctions f_1 et f_2, ce qui veut dire que l'on a

$$\lim\frac{f_1 - s_1^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = \lim\frac{f_2 - s_2^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0 \qquad \text{pour} \quad \mu = 0.$$

Donc le rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de B à la courbe pointillée tendra vers zéro et il en sera de même du rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de B' à cette courbe pointillée. On a donc

$$\lim\frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En d'autres termes, si l'on regarde μ comme un infiniment petit du premier ordre, la distance BB', sans être nulle, est un infiniment petit d'ordre infini. C'est ainsi que la fonction $e^{\frac{1}{\mu}}$ est un infiniment petit d'ordre infini sans être nulle.

Dans l'exemple particulier que nous avons traité plus haut, la distance BB' est du même ordre de grandeur que l'intégrale J, c'est-à-dire que $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}$.

Une seconde question à traiter est celle de savoir si les deux courbes O'B et O'B' prolongées se coupent. S'il en est ainsi en effet, la trajectoire qui passera par le point d'intersection appartiendra à la fois aux deux nappes de la surface asymptotique. Ce sera une trajectoire *doublement asymptotique*. Soit C la trajectoire fermée qui passe par le point O' et qui représente la solution périodique. La trajectoire doublement asymptotique diffère très peu de C, lorsque t est négatif et très grand, elle s'en éloigne asymptotiquement, s'en écarte beaucoup d'abord, puis s'en rapproche de nouveau asymptotiquement, de façon à différer très peu de C, lorsque t est positif et très grand.

Je me propose d'établir qu'il existe une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

Je commence par observer que la courbe O'B, quelque loin qu'on la prolonge, ne pourra jamais se recouper elle-même, c'est-à-dire que cette courbe O'B prolongée n'a pas de point double. En effet d'après la définition de cette courbe les antécédents des divers points de O'B sont eux-mêmes sur cette courbe O'B, de sorte que l'antécédente de la courbe O'B est une portion de cette courbe. De même la seconde, la troisième, etc., la $n^{\text{ième}}$ antécédente de O'B sont des portions de plus en plus petites de cette courbe, limitées par le point O' d'une part et un point D de plus en plus rapproché de O' d'autre part.

Si la courbe O'B avait un point double, il en devrait être de même de toutes ses antécédentes, et par conséquent de tout arc O'D si petit qu'il soit, faisant partie de O'B. Or les principes du paragraphe 13 nous permettent de construire la portion de O'B voisine de O' et de constater que cette portion de courbe n'a pas de point double. Il en est donc de même de la courbe entière quelque loin qu'on la prolonge.

D'après la définition des deux nappes de la surface asymptotique et des courbes BO'A', B'O'A, l'une de ces courbes (par exemple la courbe B'O'A') est telle que le $n^{\text{ième}}$ antécédent d'un point de cette courbe se rapproche indéfiniment de O', quand n augmente; pour l'autre courbe B'O'A, c'est le $n^{\text{ième}}$

conséquent qui se rapproche indéfiniment de O'. Ce que nous venons de dire s'applique donc également à la courbe O'B', pourvu qu'on remplace partout le mot antécédent par le mot conséquent. Donc la courbe O'B' quelque loin qu'on la prolonge ne se recoupera pas elle-même et il est clair qu'il en sera de même des courbes O'A et O'A'.

Je dis maintenant que la courbure des courbes O'B et O'B' est finie, je veux dire qu'elle ne croît pas indéfiniment quand μ tend vers zéro.

En effet nous avons vu que non seulement les séries s_1 et s_2 représentent asymptotiquement les deux fonctions f_1 et f_2, mais que les séries $\frac{d^2 s_1}{dy_2^2}$ et $\frac{d^2 s_2}{dy_2^2}$ représentent asymptotiquement $\frac{d^2 f_1}{dy_2^2}$ et $\frac{d^2 f_2}{dy_2^2}$.

On en conclut que si μ est regardé comme un infiniment petit, la courbure de la courbe en trait plein au point B différera infiniment peu de la courbure de la courbe pointillée au point le plus rapproché; or cette dernière courbure est finie, donc il en est de même de la courbure de la courbe en trait plein.

Soit maintenant B_1 le conséquent du point B et B'_1 celui du point B'. La distance BB_1 est du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$ et il en est de même de la distance $B'B'_1$, les arcs BB_1 et $B'B'_1$ sont donc très petits si μ est très petit et leur courbure est finie; d'autre part les distances BB', $B_1B'_1$ de même que les rapports $\frac{BB'}{BB_1}$, $\frac{BB'}{B'B'_1}$ tendent vers zéro quand μ tend vers zéro; enfin il existe un invariant intégral positif.

Nous nous trouvons donc dans les conditions du théorème III du paragraphe 8. Nous en conclurons que les arcs BB_1 et $B'B'_1$ se coupent, c'est-à-dire que la courbe O'B' coupe la courbe O'B prolongée et par conséquent qu'il existe au moins une trajectoire doublement asymptotique.

Je dis maintenant qu'il en existe au moins deux.

En effet la figure a été construite de façon que les points B et B' soient sur la courbe

$$y_1 = y_2 = 0.$$

Mais l'origine des y_2 est restée arbitraire; je puis supposer qu'on la choisisse de telle sorte qu'au point d'intersection des deux courbes O'B et O'B', on ait $y_2 = 0$. En ce cas les points B et B' coïncident. Il doit donc en être de même de leurs conséquents B_1 et B'_1. Les deux arcs BB_1 et $B'B'_1$ ont alors mêmes extrémités, mais cela ne suffit pas pour satisfaire au théorème III que je viens d'appliquer (il faut en effet pour satisfaire à ce théorème que l'aire limitée par

ces deux arcs ne soit pas convexe), il faut encore qu'ils se coupent en un autre point N.

Par ce point passera une trajectoire doublement asymptotique qui ne se confondra pas avec celle qui passe en B. Il y a donc au moins deux trajectoires doublement asymptotiques.

Je suppose toujours que les points B et B′ se confondent. Soit BMN la portion de la courbe O′B comprise entre les points B et N; soit de même BPN la portion de la courbe O′B′ comprise entre le point $B = B'$ et le point N. Ces deux arcs BMN et BPN limiteront une certaine aire que j'appelle α.

Nous avons vu que, dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous occupe, on peut appliquer le théorème I du paragraphe 8. Il existera donc des trajectoires qui traverseront une infinité de fois l'aire α.

Donc parmi les conséquentes de l'aire α, il y en aura une infinité qui auront une partie commune avec α.

Si donc on considère la courbe fermée BMNPB qui limite l'aire α, et les conséquentes de cette courbe, il y aura une infinité de ces conséquentes qui couperont la courbe BMNPB elle-même.

Comment cela peut-il se faire ?

L'arc BMN ne peut couper aucun de ses conséquents; car l'arc BMN et ses conséquents appartiennent à la courbe O′B et la courbe O′B ne peut se recouper elle-même.

Pour la même raison l'arc BPN ne peut couper aucun de ses conséquents.

Il faut donc, ou bien que l'arc BMN coupe un des conséquents de BPN, ou que l'arc BPN coupe un des conséquents de BMN (dans les hypothèses où nous nous sommes placés, c'est le second cas qui se présentera). Dans l'un comme dans l'autre cas la courbe O′B ou son prolongement coupera la courbe O′B′ ou son prolongement.

Ces deux courbes se coupent donc en une infinité de points et une infinité de ces points d'intersection se trouveront sur les arcs BMN ou BPN. Par ces points d'intersection passeront une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

On démontrerait de la même manière que la surface asymptotique qui coupe la surface $y_1 = 0$ suivant la courbe O′A contient une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

CHAPITRE III.

RESULTATS DIVERS.

20. — Solutions périodiques du deuxième genre.

Dans le Chapitre précédent et en particulier dans les paragraphes 17 et 18 nous avons construit nos séries en supposant que l'on donne à C_1 une valeur tantôt supérieure tantôt égale à $-\varphi_1$.

Supposons maintenant qu'on ait donné à C_1 une valeur $< -\varphi_1$. Alors

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}$$

n'est pas toujours réel. Supposons par exemple que, pour la valeur choisie de C_1, x_2^1 reste réel quand y_2 varie depuis η_5 jusqu'à η_6. Je vais considérer une valeur η_7 de y_2 comprise entre η_5 et η_6 :

$$\eta_5 < \eta_7 < \eta_6$$

et je vais chercher à définir les x_i^k pour toutes les valeurs de y_2 comprises entre η_5 et η_7.

J'observe d'abord que x_2^1 est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, à cause du double signe du radical; donnons d'abord par exemple à ce radical le signe $+$.

Imaginons que l'on ait calculé successivement x_1^1, x_1^2, ... x_1^{k-2}, x_2^1, x_2^2, ..., x_2^{k-2}.

L'équation (7) du paragraphe 18 nous donne

$$x_1^2[x_2^{k-1}] = \theta(y_2) - C_{k-1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{k-1} une constante.

Nous déterminerons cette constante par la condition

$$\theta(\eta_5) + C_{k-1} = 0.$$

Alors bien que x_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_5$, la fonction

$$[x_2^{k-1}] = \frac{\theta(y_2) - \theta(\eta_5)}{x_2^1}$$

reste finie pour $y_2 = \eta_5$.

Nous avons donc complètement déterminé les fonctions x_i^k pour $\eta_5 < y_2 < \eta_7$ et nous appellerons $x_{0,i}^k$ les fonctions de y_2 ainsi déterminées.

Supposons que l'on recommence le calcul en donnant au radical le signe —. On trouvera pour les fonctions x_i^k de nouvelles valeurs que j'appelle $x_{1.i}^k$ et qui seront d'ailleurs la continuation analytique des premières.

Imaginons ensuite que l'on remplace C_1 par une constante nouvelle C'_1 très voisine de C_1.

Alors le radical $\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C'_1)}$ sera réel toutes les fois que y_2 sera compris entre η_7 et une certaine valeur η_8 très voisine de η_6.

Cela posé, nous allons par le procédé exposé ci-dessus calculer les fonctions x_i^k pour les valeurs de y_2 comprises entre η_7 et η_8, d'abord en faisant

$$x_2^1 = +\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C'_1)}$$

(nous appellerons $x_{2.i}^k$ les fonctions ainsi calculées), puis en faisant

$$x_2^1 = -\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C'_1)}$$

(nous appellerons $x_{3.i}^k$ les fonctions ainsi calculées).

Nous allons ensuite construire les quatre branches de courbes

1° : $\qquad y_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{0.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{0.2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_5$ jusqu'à $y_2 = \eta_7$.

2° : $\qquad y_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{1.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{1.2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_5$ jusqu'à $y_2 = \eta_7$.

3° : $\qquad y_2 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{2.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{2.2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

4° : $\qquad y_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{3.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{3.2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

Dans ces formules nous avons posé

$$\varphi_{p.q}(y_2) = x_{p.q}^0 + x_{p.q}^1\sqrt{\mu} + \ldots + x_{p.q}^k \mu^{\frac{k}{2}}.$$

La première et la deuxième de ces courbes se raccorderont et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_5$.

La troisième et la quatrième courbe se raccorderont également et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_8$.

C'est ce qu'indique la figure 8 où les trois arcs pointillés représentent les

trois courbes $y_2 = \eta_5, \eta_7, \eta_8$, où l'arc AB représente la première de nos quatre branches de courbe, l'arc AD′ la deuxième, l'arc B′C la troisième et l'arc DC la quatrième.

Nous regarderons C_1 comme une donnée, mais C'_1 est resté jusqu'ici arbitraire. Nous déterminerons C'_1 par la condition que la première et la troisième courbe se raccordent et que les points B et B′ se confondent, ce qui s'exprime analytiquement par les conditions

$$(1) \qquad \varphi_{0,1}(\eta_7) = \varphi_{2,1}(\eta_7), \qquad \varphi_{0,2}(\eta_7) = \varphi_{2,2}(\eta_7).$$

Ces deux équations ne sont d'ailleurs pas distinctes et se ramènent à une seule.

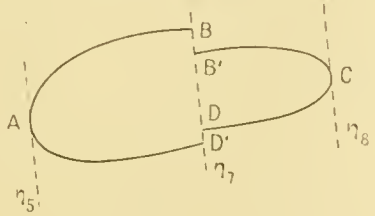

Fig. 8.

En nous appuyant sur le théorème III du paragraphe 8, nous pourrions démontrer que si C'_1 est déterminé par les équations (1), les équations

$$(1') \qquad \varphi_{1,1}(\eta_7) = \varphi_{3,1}(\eta_7), \qquad \varphi_{1,2}(\eta_7) = \varphi_{3,2}(\eta_7)$$

seront aussi satisfaites aux quantités près de l'ordre de $\mu^{\frac{k+1}{2}}$; c'est-à-dire que la deuxième et la quatrième courbe se raccorderont aux quantités près de cet ordre, ou que la distance DD′ est un infiniment petit de même ordre que $\mu^{\frac{k+1}{2}}$.

Mais je dois faire ici la même observation que plus haut; les séries auxquelles on parvient de la sorte ne sont pas convergentes bien qu'elles puissent rendre des services si on les manie avec précaution.

Il existe donc des régions, où, au moins pendant un certain temps, y_2 (dans le cas où l'on suppose $n_2 = 0$) ou $n_2 y_1 - n_1 y_2$ (dans le cas général) conservent des valeurs finies. C'est ce fait que les astronomes expriment d'ordinaire en disant qu'il y a libration. On peut se demander si ces régions de libration sont sillonnées de solutions périodiques.

On peut s'en rendre compte par les considérations suivantes.

Écrivons les équations

$$(2)\qquad x_1 = x_1^0 + \mu x_1^2, \qquad x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu u_2^2.$$

Ces équations sont à des quantités près de l'ordre μ celles de surfaces que nous avons construites (voir *fig.* 8); elles satisfont donc approximativement aux équations (3) du paragraphe 17. Quant à u_2^2 c'est une fonction de y_1 et de y_2 qui ne diffère de x_2^2 que par une fonction de y_2 de telle sorte

$$\frac{du_2^2}{dy_1} = \frac{dx_2^2}{dy_1}.$$

Cette fonction u_2^2 doit d'ailleurs rester toujours finie.

Je me propose de modifier la forme de la fonction F qui entre dans nos équations différentielles de façon que ces équations (2) satisfassent *exactement* aux équations (3) du paragraphe 17.

Je cherche donc une fonction F^* telle que les équations

$$(3)\qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF^*}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF^*}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_2}$$

admettent des surfaces trajectoires représentées précisément par ces équations (2).

Voici comment nous déterminerons cette fonction F^*.

Observons d'abord que x_1^0 et x_2^0 sont déterminés par les deux équations simultanées

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = 0.$$

On peut tirer de ces deux équations x_1^0 et x_2^0 en fonction de C. Nous regarderons donc désormais x_1^0 et x_2^0 comme des fonctions connues de C.

D'autre part $[F_1]$ est une fonction de y_2, de x_1^0 et de x_2^0, ce qui nous permet de le regarder comme une fonction connue de y_2 et de C.

Les équations (2) nous donneront par conséquent x_1 et x_2 en fonction de y_1, de y_2, de C et de C_1.

Remarquons que si x_1 et x_2 sont définis par ces équations, l'expression

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = dS$$

est une différentielle exacte, de sorte que

$$\frac{dx_1^2}{dy_2} = \frac{du_2^2}{dy_1}.$$

Résolvons maintenant les équations (2) par rapport à C et C_1, il viendra

$$C = F^*(x_1, x_2, y_1, y_2), \qquad C_1 = \Phi^*(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

La fonction F^* est ainsi définie et l'on aura en employant la notation de Jacobi :

$$[F^*, \Phi^*] = 0,$$

ce qui signifie que

$$\Phi^* = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (3).

La solution la plus générale de ces équations (3) s'écrit alors

$$(\alpha) \qquad \frac{dS}{dy_1} = x_1, \qquad \frac{dS}{dy_2} = x_2, \qquad \frac{dS}{dC} = C' + t, \qquad \frac{dS}{dC_1} = C'_1,$$

C' et C'_1 étant deux nouvelles constantes d'intégration.

Cherchons à former effectivement F^* ou du moins à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la différence $F - F^*$.

Or x_1^2 est défini par la condition suivante :

$$F\left(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1\right) - C$$

doit être une quantité de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$. (*Cf.* § 17).

Donc comme $\frac{dF_0}{dx_2^0}$ est nul, la fonction

$$F\left(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2\right) - C$$

sera encore de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$, quelle que soit la fonction u_2^2.

D'ailleurs on a identiquement

$$F^*\left(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2\right) = C.$$

Donc la différence $F - F^*$ regardée comme fonction de μ, de C, de C_1, de y_1 et de y_2 est de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$.

Posons maintenant

$$\xi_2\sqrt{\mu} = x_2 - x_2^0.$$

Des deux équations (1) on tirera facilement C_1 et C en fonction de x_1, ξ_2, y_1, y_2 et μ; on voit alors sans peine que C et C_1 peuvent être développés suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$, les coefficients étant des fonctions finies de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2.

Nous venons de voir que $F - F^*$ est une fonction de μ, de y_1, de y_2, de C et de C_1 dont le développement suivant les puissances de μ commence par un

terme en $\mu\sqrt{\mu}$; si nous y remplaçons C et C_1 par leurs valeurs en fonction de μ, de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2, nous verrons que cette différence $F - F^*$ est une fonction développée suivant les puissances de μ, dont les coefficients dépendent de x_1, ξ_2, y_1 et y_2 et qui commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$.

Par conséquent la fonction

$$\frac{F - F^*}{\mu\sqrt{\mu}} = F'(\mu, x_1, \xi_2, y_1, y_2)$$

ne devient pas infinie pour $\mu = 0$.

Par le changement de variable que nous venons de faire, les équations (3) deviennent

$$(3') \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF^*}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_1}, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{dF^*}{\sqrt{\mu}\,dy_2}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF^*}{\sqrt{\mu}\,d\xi_2}.$$

De même les équations proposées

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

doivent se réduire à

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{dF}{\sqrt{\mu}\,dy_2}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{\sqrt{\mu}\,d\xi_2}.$$

Nous formerons en outre les équations suivantes:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{d}{dy_1}(F^* + \varepsilon F'), & \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{d}{dx_1}(F^* + \varepsilon F'), \\[2ex] \dfrac{d\xi_2}{dt} = \dfrac{d}{\sqrt{\mu}\,dy_2}(F^* + \varepsilon F'), & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{d}{\sqrt{\mu}\,d\xi_2}(F^* + \varepsilon F'), \end{cases}$$

qui se réduisent à (3') pour $\varepsilon = 0$ et à (4) pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les équations (3) et par conséquent les équations (3') peuvent s'intégrer exactement; nous en avons donné par les équations (α) la solution générale.

Si l'on discute cette solution géuérale et si l'on cherche à la construire en conservant le même mode de représentation géométrique que dans les paragraphes précédents, on verra qu'il existe une infinité de surfaces trajectoires fermées.

Ces surfaces qui ont pour équation

$$(6) \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1) + \mu u_2^2}}{x_1^0 + \mu x_1^2}$$

diffèrent peu des surfaces que nous avons construites dans le paragraphe 17 et dont l'équation s'écrivait

$$(7)\qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}}{x_1^0}.$$

Elles ont même forme générale que les surfaces définies par l'équation (7). Si donc nous faisons les mêmes hypothèses que dans le paragraphe 17 au sujet des maxima et des minima de $[F_1]$, deux de nos surfaces (6) seront des surfaces fermées à courbe double; ce seront celles qui correspondent aux valeurs $-\varphi_2$ et $-\varphi_1$ de la constante C_1. Les autres se composent de une ou deux nappes fermées.

La surface fermée à courbe double sera pour nos équations (3') une surface asymptotique et elle partagera l'espace en trois régions comme nous l'avons dit plus haut.

Parmi ces régions, je distingue la région R_2 comprise entre les deux nappes qui est une région dite de libration et je me propose de montrer que dans cette région, on peut tracer une infinité de trajectoires fermées correspondant à des solutions périodiques.

Revenons en effet aux équations (α) qui nous font connaître la solution générale des équations (3) et (3'). D'après la forme des équations (2), nous pouvons écrire

$$S = ay_1 + by_2 + \theta(y_1, y_2) + \sqrt{\frac{2\mu}{N}}\int\sqrt{([F_1] + C_1)}\,dy_2,$$

a et b étant des fonctions de C et de C_1 seulement et $\theta(y_1, y_2)$ une fonction réelle et périodique de y_1 et de y_2.

On en déduit

$$C'_1 = \frac{dS}{dC_1} = \frac{da}{dC_1}y_1 + \frac{db}{dC_1}y_2 + \frac{d\theta}{dC_1} + \sqrt{\frac{\mu}{2N}}\int\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Nous donnerons à C_1 une valeur déterminée qui devra être plus petite que $-\varphi_1$ puisque nous nous supposons placés dans la région R_2.

La surface fermée qui correspond à cette valeur de C_1 présentant les mêmes connexions que le tore, nous pouvons en faire le tour de deux manières différentes : 1° en regardant y_2 comme constant; 2° en regardant y_1 comme constant.

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_2 comme constant, y_1 aura augmenté de 2π et $\frac{dS}{dC_1}$ aura augmenté de $2\pi\frac{da}{dC_1}$.

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_1 comme constant, y_2 sera revenu à la même valeur, mais l'intégrale $\int \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1]+C_1)}}$ aura augmenté d'une certaine période φ définie comme il suit :

Supposons que les valeurs de y_2 pour lesquelles le radical $\sqrt{([F_1]+C_1)}$ est réel soient les valeurs comprises entre η_5 et η_6, on aura

$$\varphi = 2\int_{\eta_5}^{\eta_6} \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1]+C_1)}}.$$

Quand notre intégrale augmentera de φ, $\frac{dS}{dC_1}$ augmentera de $\varphi\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$.

Pour que la solution qui correspond à cette valeur de C_1 soit périodique, il faut donc et il suffit que ces deux quantités $2\pi\frac{da}{dC_1}$ et $\varphi\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$ soient commensurables entre elles.

Cette condition sera évidemment satisfaite pour une infinité de valeurs de C_1; notre région R_2 contient donc une infinité de trajectoires fermées, représentant des solutions périodiques.

Ainsi si K est un nombre commensurable quelconque, l'équation

$$(8) \qquad 2\pi\frac{da}{dC_1} = K\varphi\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

$\left(\text{qui contient } C_1 \text{ parce que } \frac{da}{dC_1} \text{ et } \varphi \text{ sont des fonctions de } C_1\right)$ nous donnera une valeur de C_1 correspondant à une solution périodique.

Pour discuter cette équation, il me faut chercher ce que c'est que $\frac{da}{dC_1}$.

Il me suffit pour cela de rappeler que

$$a = x_1^0 + \mu[x_1^2]$$

et que

$$F_0(x_1^0 + \mu x_1^2,\ x_2^0 + \sqrt{\mu}x_2^1) + \mu F_1(x_1^0,\ x_2^0,\ y_1,\ y_2)$$

doit se réduire à C aux quantités près de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$. On en conclut

$$-n_1 x_1^2 - \frac{N}{2}(x_2^1)^2 + F_1(x_1^0,\ x_2^0,\ y_1,\ y_2) = 0$$

d'où

$$-n_1[x_1^2] - C_1 - [F_1] + [F_1] = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{da}{dC_1} = -\frac{\mu}{n_1}.$$

$\frac{da}{dC_1}$ est donc une constante, indépendante de C_1, de sorte que l'équation (8) peut s'écrire

$$(8') \qquad \frac{\varphi}{\sqrt{\mu}} = \text{const.}$$

Pour discuter cette équation nouvelle, il convient de chercher comment varie v quand on fait varier C_1 depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Pour $C_1 = -\varphi_4$, v est infini; C_1 variant depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_2$, v décroît d'abord jusqu'à un certain minimum, pour croître ensuite de nouveau jusqu'à l'infini.

Pour $C_1 < -\varphi_2$, v peut admettre deux valeurs correspondant aux deux nappes de la surface et que l'on peut envisager séparément. (Cf. *fig.* 6.)

La première nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_3$.

La seconde nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_1$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Ainsi v admet trois minima au moins et reste toujours supérieur à une certaine limite positive.

Si donc nous regardons l'équation (8′) comme définissant C_1 en fonction de μ, C_1 sera fonction continue de μ, mais nous pourrons prendre μ assez petit pour que cette équation n'admette aucune racine.

Ainsi il est certain qu'il existe toujours une infinité de solutions périodiques; mais quand on fera décroître μ, toutes ces solutions disparaîtront l'une après l'autre.

Il résulte de ce qui précède que les équations (5) admettent pour $\varepsilon = 0$ une infinité de solutions périodiques; les principes du Chapitre III (Ire Partie) nous permettent d'affirmer qu'il y en a encore une infinité pour les valeurs suffisamment petites de ε. Comme μ est très petit, il semble très probable qu'il existera une infinité de solutions périodiques pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$, c'est-à-dire pour les équations (4) qui sont déduites par un changement de variable très simple des équations proposées.

Par conséquent, si nous revenons à ces équations proposées, nous voyons que dans la *région de libration* R_2 *il y a une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques*. Nous allons d'ailleurs l'établir rigoureusement par une voie toute différente.

Mais si faisant décroître μ d'une manière continue, on suit une de ces trajectoires fermées, on la verra se déformer aussi d'une façon continue et *disparaître* ensuite pour une certaine valeur de μ. Ainsi pour $\mu = 0$ toutes les solutions

périodiques de la région R_2 auront disparu l'une après l'autre. Ce n'est pas ainsi que se comportaient les solutions périodiques étudiées dans le Chapitre III (Ire Partie) et qui subsistaient encore pour $\mu = 0$.

On peut démontrer que dans le voisinage d'une trajectoire fermée représentant une solution périodique, soit stable, soit instable, il passe une infinité d'autres trajectoires fermées. Cela ne suffit pas, en toute rigueur, pour conclure que toute région de l'espace, si petite qu'elle soit, est traversée par une infinité de trajectoires fermées [1], mais cela suffit pour donner à cette hypothèse un haut caractère de vraisemblance.

Ainsi que je viens de le dire, l'aperçu qui précède ne suffirait pas pour établir rigoureusement l'existence des solutions périodiques du deuxième genre. Voici comment nous y parviendrons.

Reprenons nos équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

et envisageons une solution périodique du premier genre de période T; quand t augmentera de T, y_1 et y_2 augmenteront de $n_1 T$ et de $n_2 T$; je supposerai comme plus haut :

$$n_1 T = 2\pi, \qquad n_2 = 0.$$

Cela posé, de l'équation $F = C$ nous pouvons tirer x_2 en fonction de x_1, y_1 et y_2; en remplaçant x_2 par la valeur ainsi obtenue, on trouve

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2},$$

les seconds membres pouvant être regardés comme des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2. Enfin en éliminant dt, il viendra

$$(9) \qquad \frac{dx_1}{dy_1} = X, \qquad \frac{dy_2}{dy_1} = Y,$$

X et Y étant des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2, périodiques de période 2π par rapport à y_1.

Soit

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \qquad y_2 = \varphi_2(y_1)$$

la solution périodique considérée qui sera de période 2π par rapport à y_1; je suppose que cette solution périodique soit celle que nous avons définie plus

[1] Les travaux récents de M. Cantor nous ont appris en effet (pour employer le langage de ce savant géomètre) qu'un ensemble peut être parfait, sans être continu.

haut et qui était représentée approximativement sur la figure du paragraphe 17 par la courbe fermée isolée de la surface $C_1 = -\varphi_3$. Ce sera donc une solution périodique *stable*, elle admettra deux exposants caractéristiques α et $-\alpha$ égaux et de signe contraire et dont le carré sera réel négatif.

Soit maintenant

$$x_1 = \varphi_1(y_1) + \xi_1, \qquad y_2 = \varphi_2(y_1) + \xi_2$$

une solution peu différente de la première. Soient conformément aux notations du Chapitre III (Ire Partie) β_1 et β_2 les valeurs initiales de ξ_1 et de ξ_2 pour $y_1 = 0$, et $\beta_1 + \psi_1$, $\beta_2 + \psi_2$ les valeurs de ξ_1 et de ξ_2 pour $y_1 = 2k\pi$ (k entier). La solution sera périodique de période $2k\pi$ si l'on a

$$\psi_1 = \psi_2 = 0. \tag{10}$$

On sait que ψ_1 et ψ_2 pourront se développer suivant les puissances de β_1 et β_2 et que ces fonctions dépendront en outre de μ.

Si l'on regarde un instant β_1, β_2 et μ comme les coordonnées d'un point dans l'espace, les équations (10) représentent une certaine courbe gauche et à chaque point de cette courbe gauche correspond une solution périodique. Il est clair que ψ_1 et ψ_2 s'annulent avec β_1 et β_2; en effet si l'on fait $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, on obtient, d'après la définition de ξ_1 et de ξ_2, une solution périodique de période 2π qui peut aussi être regardée comme périodique de période $2k\pi$.

La courbe (10) comprend donc d'abord l'axe des μ tout entier. Je me propose de démontrer que si, pour $\mu = \mu_0$, $k\alpha$ est multiple de $2i\pi$, il existera une autre branche de la courbe (10) qui passera par le point

$$\mu = \mu_0, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = 0$$

et par conséquent que pour les valeurs de μ voisines de μ_0, il existe d'autres solutions périodiques que $\xi_1 = \xi_2 = 0$

Posons $\mu - \mu_0 = \lambda$ et cherchons à développer ψ_1 et ψ_2 suivant les puissances de β_1, de β_2 et de λ.

Calculons d'abord les termes du premier degré par rapport à β_1 et à β_2.

Je dis d'abord que pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour $\mu = \mu_0$, tous ces termes sont nuls.

En effet supposons que les ξ soient assez petits pour qu'on en puisse négliger les carrés. Nous avons vu dans la première Partie que dans ce cas, les ξ satisfont à un système de deux équations différentielles linéaires que nous avons appelées équations aux variations des équations (9). Nous avons vu également

que ces équations linéaires admettent deux solutions remarquables; que la première de ces solutions est multipliée par $e^{2\alpha\pi}$ quand y_1 augmente de 2π, et que l'autre est multipliée par $e^{-2\alpha\pi}$.

Pour $\lambda = 0$, $k\alpha$ est un multiple de $2i\pi$, de sorte que $e^{2\alpha\pi}$ et $e^{-2\alpha\pi}$ sont deux racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Donc nos deux solutions se reproduisent quand y_1 augmente de $2k\pi$. Comme l'équation est linéaire, la solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions remarquables, et elle ne change pas non plus quand y_1 augmente de $2k\pi$.

Comme ψ_1 et ψ_2 sont précisément les accroissements que subissent ξ_1 et ξ_2 quand y_1 passe de la valeur zéro à la valeur $2k\pi$, ψ_1 et ψ_2 doivent être nuls; mais cela n'est vrai que quand ξ_1 et ξ_2 (ou β_1 et β_2) sont assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés; ce seront donc seulement les termes de ψ_1 et ψ_2 qui sont du premier degré en β_1 et β_2 qui seront nuls. C. Q. F. D.

Soient $a\beta_1 + b\beta_2$ les termes du premier degré de ψ_1, $c\beta_1 + e\beta_2$ les termes du premier degré de ψ_2. Nous venons de voir que pour $\lambda = 0$:

$$a = b = c = e = 0.$$

Soit encore pour $\lambda = 0$:

$$\frac{da}{d\lambda} = a', \qquad \frac{db}{d\lambda} = b', \qquad \frac{dc}{d\lambda} = c', \qquad \frac{de}{d\lambda} = e'.$$

Je dis que

$$a' + e' = 0.$$

En effet l'équation en S :

$$(a - S)(e - S) - bc = 0$$

admet pour racines (*cf.* § 12)

$$S = 1 - e^{2\alpha k\pi}, \qquad S = 1 - e^{-2\alpha k\pi};$$

pour $\lambda = 0$, ces deux racines sont nulles; si λ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré, elles seront égales à $\pm 2k\pi\frac{d\alpha}{d\lambda}\lambda$. L'équation en S :

$$(a' - S)(e' - S) - b'c' = 0$$

aura donc pour racines

$$S = \pm 2k\pi\frac{d\alpha}{d\lambda}$$

et comme ces deux racines sont égales et de signe contraire on aura

$$a' + e' = 0.$$

De plus a', e', b' et c' ne seront pas nuls à la fois en général. En effet cela ne

pourrait avoir lieu que si $\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{d\alpha}{d\mu}$ était nul. Or μ_0 est une quantité choisie de telle sorte que α (qui est une fonction de μ) soit commensurable avec $2i\pi$. Or $\frac{d\alpha}{d\mu}$ ne pourrait s'annuler pour toutes les valeurs commensurables de $\frac{\alpha}{2i\pi}$ qu'en s'annulant identiquement; alors α serait une constante (qui devrait d'ailleurs être nulle puisque $\alpha = 0$ pour $\mu = 0$) ce qui n'a pas lieu en général.

Nous avons vu que pour $\lambda = 0$ les termes du premier degré de ψ_1 et de ψ_2 s'annulent identiquement. Supposons qu'il en soit de même des termes du deuxième degré, du troisième degré, etc., du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré, mais que les termes du $m^{\text{ième}}$ degré ne s'annulent pas identiquement dans ψ_1 et dans ψ_2 pour $\lambda = 0$. Soit θ_1 l'ensemble des termes du $m^{\text{ième}}$ degré de ψ_1 pour $\lambda = 0$; soit θ_2 l'ensemble des termes du $m^{\text{ième}}$ degré de ψ_2 pour $\lambda = 0$. Ainsi θ_1 et θ_2 sont deux polynomes homogènes du $m^{\text{ième}}$ degré en β_1 et β_2 et de ces deux polynomes l'un au moins ne s'annule pas identiquement.

Posons

$$\psi_1 = a'\lambda\beta_1 + b'\lambda\beta_2 + \theta_1 + \omega_1, \qquad \psi_2 = c'\lambda\beta_1 - a'\lambda\beta_2 + \theta_2 + \omega_2.$$

Alors ω_1 et ω_2 seront un ensemble de termes qui seront : ou bien du $(m+1)^{\text{ième}}$ degré au moins par rapport aux β, ou bien du deuxième degré au moins par rapport aux β et du premier degré au moins par rapport à λ, ou bien du premier degré au moins par rapport aux β et du deuxième degré au moins par rapport à λ.

Je me propose de démontrer que l'on peut tirer des équations (10) β_1 et β_2 en séries ordonnées suivant les puissances de $\lambda^{\frac{1}{m-1}}$ et dont tous les termes ne sont pas nuls.

Mais il faut d'abord que je démontre que l'on a identiquement

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} = 0.$$

En effet il existe un invariant intégral positif. Nous en concluons qu'il existe une intégrale $\iint \Phi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$ qui a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à la portion de surface sans contact $y_1 = 0$ et pour toutes ses conséquentes.

De plus la fonction Φ est positive. Donc $\Phi(0, 0)$ n'est pas nul; en multipliant la fonction Φ par un facteur convenable, nous pourrons donc toujours supposer

$$\Phi(0, 0) = 1.$$

Mais le point

$$\xi_1 = \beta_1 + \psi_1, \qquad \xi_2 = \beta_2 + \psi_2, \qquad y_1 = 2k\pi.$$

est le $k^{\text{ième}}$ conséquent du point

$$\xi_1 = \beta_1, \qquad \xi_2 = \beta_2, \qquad y_1 = 0.$$

On aura donc pour une aire quelconque :

$$\iint \Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2)(d\beta_1 + d\psi_1)(d\beta_2 + d\psi_2) = \iint \Phi(\beta_1, \beta_2)\, d\beta_1\, d\beta_2$$

d'où l'identité

$$(11) \quad \Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2)\left[\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} - \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1}\right] = \Phi(\beta_1, \beta_2).$$

Nous supposerons $\lambda = 0$, nous aurons donc

$$\psi_1 = \theta_1 + \omega_1, \qquad \psi_2 = \theta_2 + \omega_2.$$

Les θ ne contiennent alors que des termes du $m^{\text{ième}}$ degré et les ω que des termes du $(m+1)^{\text{ième}}$ degré ou de degré supérieur.

Il résulte de là que la différence

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) - \Phi(\beta_1, \beta_2)$$

ne contient que des termes du $m^{\text{ième}}$ degré au moins par rapport à β_1 et à β_2. Si l'on convient de négliger les termes du $m^{\text{ième}}$ degré et de degré supérieur, on pourra écrire

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) = \Phi(\beta_1, \beta_2).$$

On aura, en négligeant toujours les termes du $m^{\text{ième}}$ degré .

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1} = 1 + \frac{d\theta_1}{d\beta_1}, \qquad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} = 1 + \frac{d\theta_2}{d\beta_2},$$

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2} = \frac{d\theta_1}{d\beta_2}, \qquad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = \frac{d\theta_2}{d\beta_1}$$

et

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} - \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = 1 + \frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2},$$

de sorte qu'en identifiant dans l'identité (11) tous les termes de degré inférieur à m, on arrive à la relation

$$\Phi(\beta_1, \beta_2)\left(\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2}\right) = 0.$$

Dans le premier membre de cette relation, nous ne devons conserver que les termes de degré $m-1$ au plus, de sorte qu'il reste

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1}+\frac{d\theta_2}{d\beta_2}=0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Posons

$$\lambda=\pm\eta^{m-1},\qquad \beta_1=\gamma_1\eta,\qquad \beta_2=\gamma_2\eta;$$

on voit que θ_1 et θ_2 deviennent divisibles par η^m et ω_1 et ω_2 par η^{m+1}, de sorte que l'on peut poser

$$\theta_1=\eta^m\theta'_1,\qquad \theta_2=\eta^m\theta'_2,\qquad \omega_1=\eta^{m+1}\omega'_1,\qquad \omega_2=\eta^{m+1}\omega'_2,$$

d'où

$$\psi_1=\pm\eta^m(a'\gamma_1+b'\gamma_2)+\eta^m\theta'_1+\eta^{m+1}\omega'_1,$$
$$\psi_2=\pm\eta^m(c'\gamma_1-a'\gamma_2)+\eta^m\theta'_2+\eta^{m+1}\omega'_2,$$

de sorte que nos équations (10) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(12)\qquad \pm(a'\gamma_1+b'\gamma_2)+\theta'_1+\eta\omega'_1=0,\qquad \pm(c'\gamma_1-a'\gamma_2)+\theta'_2+\eta\omega'_2=0.$$

Je dis que l'on peut tirer de ces équations γ_1 et γ_2 en séries ordonnées suivant les puissances de η et sans que ces séries soient identiquement nulles.

En vertu du théorème IV (§ 2), il nous suffit pour cela d'établir :

1° Que les équations (12), quand on y fait $\eta=0$, admettent au moins un système de solutions réelles :

$$\gamma_1=\gamma_1^0,\qquad \gamma_2=\gamma_2^0.$$

2° Que si l'on fait

$$\eta=0,\qquad \gamma_1=\gamma_1^0,\qquad \gamma_2=\gamma_2^0$$

le déterminant fonctionnel des premiers membres des deux équations (12) par rapport à γ_1 et γ_2 n'est pas nul.

Cela revient à dire que, pour les équations (12) réduites par la supposition de $\eta=0$, la solution

$$\gamma_1=\gamma_1^0,\qquad \gamma_2=\gamma_2^0$$

doit être une solution simple.

Mais en vertu des théorèmes V et VI du paragraphe 2 et de leurs corollaires, on peut encore développer γ_1 et γ_2 suivant les puissances de η, quand même cette solution serait multiple, pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.

Nous sommes donc conduits à envisager les équations

$$(13)\qquad \pm(a'\gamma_1+b'\gamma_2)+\theta'_1=0,\qquad \pm(c'\gamma_1-a'\gamma_2)+\theta'_2=0$$

et nous devons chercher à démontrer que ces équations admettent au moins une solution d'ordre impair.

De ces équations nous pouvons tirer la suivante :

$$(14) \qquad (a'\gamma_1 + b'\gamma_2)\,\theta'_2 - (c'\gamma_1 - a'\gamma_2)\,\theta'_1 = 0$$

qui est homogène et dont on pourra par conséquent tirer le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Il est clair que θ'_1 et θ'_2 sont formés avec γ_1 et γ_2 comme θ_1 et θ_2 avec β_1 et β_2; on aura donc

$$\frac{d\theta'_1}{d\gamma_1} + \frac{d\theta'_2}{d\gamma_2} = 0.$$

Cela prouve qu'il existe un polynome f homogène et de degré $m+1$ en γ_1 et γ_2 et qui est tel que

$$\theta'_1 = \frac{df}{d\gamma_2}, \qquad \theta'_2 = -\frac{df}{d\gamma_1}.$$

De même si nous posons

$$f_1 = \frac{1}{2}(b'\gamma_2^2 + 2a'\gamma_1\gamma_2 - c'\gamma_1^2)$$

il vient

$$a'\gamma_1 + b'\gamma_2 = \frac{df_1}{d\gamma_2}, \qquad c'\gamma_1 - a'\gamma_2 = -\frac{df_1}{d\gamma_1};$$

de sorte que l'équation (14) peut s'écrire

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\,\frac{df}{d\gamma_1} - \frac{df_1}{d\gamma_1}\,\frac{df}{d\gamma_2} = 0.$$

Considérons l'expression

$$\Pi = \frac{f^2}{f_1^{m+1}}.$$

Elle est homogène et de degré zéro par rapport à γ_1 et γ_2; elle ne dépend donc que du rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. Je dis que le dénominateur f_1 ne peut jamais s'annuler.

En effet l'équation

$$(a' - S)(c' - S) - b'c' = 0$$

doit avoir ses deux racines imaginaires, d'où

$$a'c' - b'c' = -a'^2 - b'c' < 0$$

d'où

$$a'^2 + b'c' > 0,$$

ce qui prouve que la forme quadratique f_1 est définie. L'expression Π ne peut

donc jamais devenir infinie. Elle admettra donc au moins un maximum. Pour ce maximum on devra avoir

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\frac{df}{d\gamma_1} - \frac{df_1}{d\gamma_1}\frac{df}{d\gamma_2} = 0.$$

Ainsi l'équation (14) admet au moins une racine réelle. Elle sera en général simple. En tout cas, elle sera toujours d'ordre impair, car un maximum ne peut correspondre qu'à une racine d'ordre impair.

Nous avons tiré de l'équation (14) le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$; nous pouvons donc poser

$$\gamma_1 = \delta_1 u, \qquad \gamma_2 = \delta_2 u,$$

δ_1 et δ_2 étant des quantités connues.

Il nous reste maintenant à déterminer u. Pour cela dans la première des équations (13) je remplace γ_1 et γ_2 par $\delta_1 u$ et $\delta_2 u$, il vient

$$\theta'_1 = u^m \theta''_1, \qquad \theta'_2 = u^m \theta''_2,$$

θ''_1 étant formé avec δ_1 et δ_2 comme θ'_1 avec γ_1 et γ_2; d'où

$$(15) \qquad \pm(a'\delta_1 + b'\delta_2) + \theta''_1 u^{m-1} = 0.$$

Cette équation doit déterminer u; si m est pair elle aura une racine réelle; si m est impair (et c'est d'ailleurs ce qui arrivera en général) elle aura deux racines réelles, ou pas de racine réelle; elle aura deux racines réelles si θ''_1 et $\pm(a'\delta_1 + b'\delta_2)$ sont de signe contraire; mais on peut toujours, grâce au double signe $\pm$, s'arranger pour qu'il en soit ainsi.

L'équation (15) admet donc au moins une racine réelle. De plus cette racine est simple. Il n'y aurait d'exception que si

$$a'\delta_1 + b'\delta_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta''_1 = 0.$$

Mais dans ce cas on remplacerait l'équation (15) par la suivante :

$$\pm(c'\delta_1 - a'\delta_2) + \theta''_2 u^{m-1} = 0.$$

Il n'y aurait donc plus de difficulté que si l'on avait à la fois

$$a'\delta_1 + b'\delta_2 = c'\delta_1 - a'\delta_2 = 0$$

ou bien

$$\theta''_1 = \theta''_2 = 0.$$

La première circonstance ne peut pas se produire à cause de l'inégalité

$$a'^2 + b'c' > 0.$$

La seconde circonstance pourrait au contraire se présenter. Il peut se faire que

l'équation (14) admette une racine telle que $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$. Mais je dis que dans ce cas l'équation (14) admettra encore au moins une racine pour laquelle cette circonstance ne se produira pas.

En effet on a identiquement

$$mf = \gamma_2 \theta'_1 - \gamma_1 \theta'_2.$$

Si donc

$$\theta'_1 = \theta'_2 = 0$$

on aura $f = 0$ et puisque f_1 n'est jamais nul

$$H = 0.$$

Il peut se faire en effet que l'expression H admette zéro comme maximum ou comme minimum. Mais cette expression n'est pas identiquement nulle puisque θ'_1 et θ'_2 ne sont pas tous deux identiquement nuls; de plus elle reste toujours finie; elle devient donc soit positive, soit négative; si elle devient positive, elle aura un maximum positif et différent de zéro; si elle devient négative elle aura un minimum négatif et différent de zéro.

Ainsi l'équation (14) admet toujours au moins une racine réelle d'ordre impair telle que θ''_1 et θ''_2 ne s'annulent pas à la fois.

Donc les équations (13) ont au moins une solution réelle d'ordre impair.

Donc on peut trouver des séries qui ne sont pas identiquement nulles, qui sont développables suivant les puissances fractionnaires positives de $\mu - \mu_0$ et qui satisfont aux équations (10) quand on les substitue à β_1 et β_2.

Donc il existe un système de solutions périodiques de période $2k\pi$ qui pour $\mu = \mu_0$ se confondent avec la solution

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \qquad x_2 = \varphi_2(y_1).$$

Ce sont les solutions périodiques du deuxième genre.

21. — Divergence des séries de M. Lindstedt.

Je voudrais terminer l'exposé des résultats généraux de ce Mémoire en appelant particulièrement l'attention sur les conclusions négatives qui en découlent. Ces conclusions sont pleines d'intérêt, non seulement parce qu'elles font mieux ressortir l'étrangeté des résultats obtenus, mais parce qu'elles peuvent, en vertu précisément de leur nature négative, s'étendre immédiatement aux cas plus généraux, tandis que les conclusions positives ne peuvent se généraliser sans une démonstration spéciale.

Je me propose d'abord de démontrer que les séries proposées par M. Lindstedt ne sont pas convergentes ; mais je veux auparavant rappeler en quoi consiste la méthode de M. Lindstedt. Je l'exposerai, il est vrai, avec des notations différentes de celles qu'avait adoptées ce savant astronome, car je désire, pour plus de clarté, conserver celles dont j'ai fait usage plus haut.

Mettons les équations de la Dynamique sous la même forme que dans la seconde partie du présent Mémoire et écrivons

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

F sera une fonction donnée des quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2 et nous aurons

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F_0 sera une fonction de x_1 et de x_2, indépendante de y_1 et de y_2; μ sera un coefficient très petit, de sorte que μF_1 sera la *fonction perturbatrice*.

C'est en effet sous cette forme que se présentent les problèmes de la Dynamique et en particulier les problèmes de la Mécanique céleste.

Si μ était nul, x_1 et x_2 seraient des constantes. Si μ n'est pas nul mais très petit, et qu'on appelle ξ_1 et ξ_2 les valeurs initiales de x_1 et de x_2, les différences $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$ seront du même ordre de grandeur que μ.

Si donc nous appelons n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et de $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, les différences $-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1$ et $-\frac{dF_0}{dx_1} - n_2$ seront du même ordre de grandeur que μ, ce qui nous permettra de poser

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 = \mu\varphi_1(x_1, x_2), \qquad -\frac{dF_0}{dx_2} - n_2 = \mu\varphi_2(x_1, x_2),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de x_1 et de x_2 qui ne sont pas très grandes.

Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu\frac{dF_1}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mu\frac{dF_1}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 + \mu\left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt} = n_2 + \mu\left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2}\right).$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, y_1, y_2 au lieu d'être regardés *directement* comme des fonctions de t soient regardés comme des fonctions de deux variables w_1 et w_2 et que l'on pose

$$w_1 = \lambda_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = \lambda_2 t + \varpi_2,$$

ϖ_1 et ϖ_2 seront des constantes d'intégration arbitraires; λ_1 et λ_2 seront des constantes que la suite du calcul déterminera complètement.

Les équations du mouvement deviennent alors

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{dx_1}{dw_1} + \lambda_2 \dfrac{dx_1}{dw_2} - \mu \dfrac{dF_1}{dy_1} = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{dx_2}{dw_2} + \lambda_2 \dfrac{dx_2}{dw_2} - \mu \dfrac{dF_1}{dy_2} = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{dy_1}{dw_1} + \lambda_2 \dfrac{dy_1}{dw_2} - n_1 - \mu\left(\varphi_1 - \dfrac{dF_1}{dx_1}\right) = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{dy_2}{dw_1} + \lambda_2 \dfrac{dy_2}{dw_2} - n_2 - \mu\left(\varphi_2 - \dfrac{dF_1}{dx_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \ldots, \\ x_2 = x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \ldots, \\ y_1 - w_1 = \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_2 - w_2 = \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 = \lambda_1^0 + \mu \lambda_1^1 + \mu^2 \lambda_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_2 = \lambda_2^0 + \mu \lambda_2^1 + \mu^2 \lambda_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Je suppose que les coefficients λ_i^k sont des constantes et que les coefficients y_i^k et x_i^k sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et de w_2.

Je supposerai d'ailleurs comme je l'ai toujours fait jusqu'ici que F_1 est une série trigonométrique dépendant des sinus et cosinus des multiples de y_1 et de y_2 et que les coefficients de cette série sont des fonctions holomorphes de x_1 et de x_2.

Dans ces conditions, si dans les premiers membres des équations (1) je substitue à la place de λ_1, λ_2, y_1, y_2, x_1 et x_2 leurs valeurs (2), j'aurai quatre fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ, et il est clair que les coefficients des diverses puissances de μ seront des séries ordonnées suivant les lignes trigonométriques des multiples de w_1 et w_2.

J'appelle Φ_1, Φ_2, Φ'_1 et Φ'_2 ces quatre fonctions.

Cela posé, le théorème de M. Lindstedt consiste en ceci :

Il est possible, quelque grand que soit q, de déterminer les $2q+2$ constantes

$$\lambda_1^0,\quad \lambda_1^1,\quad \ldots,\quad \lambda_1^q;\qquad \lambda_2^0,\quad \lambda_2^1,\quad \ldots,\quad \lambda_2^q,$$

et les $4q$ séries trigonométriques :

$$x_1^0,\quad \ldots,\quad x_1^q;\qquad x_2^0,\quad \ldots,\quad x_2^q;\qquad y_1^1,\quad \ldots,\quad y_1^q;\qquad y_2^1,\quad \ldots,\quad y_2^q,$$

de façon à annuler dans Φ_1, Φ_2, Φ'_1 et Φ'_2 les termes indépendants de μ et les coefficients des q premières puissances de μ, de façon, en d'autres termes, à satisfaire aux équations du mouvement aux quantités près de l'ordre de μ^{q+1}.

On trouve d'abord

$$\lambda_1^0 = n_1, \qquad \lambda_2^0 = n_2, \qquad x_1^0 = \xi_1 + \omega_1, \qquad x_2^0 = \xi_2 + \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant des constantes d'intégration que nous supposerons de l'ordre de μ.

Supposons que l'on ait déterminé par un calcul préalable :

$$\lambda_i^0, \quad \lambda_i^1, \quad \ldots, \quad \lambda_i^{q-1}; \qquad x_i^0, \quad x_i^1, \quad \ldots, \quad x_i^{q-1}; \qquad y_i^1, \quad \ldots, \quad y_i^{q-1},$$

et que l'on se propose de déterminer λ_1^q, λ_2^q, x_1^q, x_2^q, y_1^q, y_2^q. Pour cela, écrivons que le coefficient de μ^q est nul dans Φ_1, Φ_2 et Φ'_1, Φ'_2.

Il vient

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & n_1 \frac{dx_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_1^q}{dw_2} = X_1, \\ & n_1 \frac{dx_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_2^q}{dw_2} = X_2, \\ & n_1 \frac{dy_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_1^q}{dw_2} + \lambda_1^q = Y_1, \\ & n_1 \frac{dy_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_2^q}{dw_2} + \lambda_2^q = Y_2, \end{aligned} \right.$$

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 étant des fonctions connues.

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2.

Pour que l'intégration des équations (3) soit possible, il faut :

1° que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, ce qu'il est toujours permis de supposer ;

2° que dans les séries trigonométriques X_1 et X_2, les termes tout connus soient nuls. Il en est effectivement ainsi, mais la démonstration de ce fait important est délicate et ne saurait trouver place ici ; je me borne à dire qu'elle doit être fondée sur l'emploi des invariants intégraux ;

3° que dans les séries trigonométriques Y_1 et Y_2, les termes tout connus se réduisent à λ_1^q et λ_2^q ; comme λ_1^q et λ_2^q sont deux inconnues, nous déterminerons ces inconnues par cette condition.

L'intégration des équations (3) est alors possible. Leur intégration introduira quatre constantes arbitraires. A chaque approximation nouvelle, nous aurons

ainsi quatre constantes d'intégration de plus; nous leur donnerons des valeurs quelconques et nous ne conserverons d'autres constantes arbitraires que ω_1, ω_2, ω_1 et ω_2.

Ainsi les séries de M. Lindstedt sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2; elles sont développées suivant les puissances de μ et aussi suivant les puissances des deux constantes ω_1 et ω_2.

Ces séries, d'après le théorème de M. Lindstedt, satisfont *formellement* aux équations du mouvement. Si donc elles étaient uniformément convergentes, elles nous donneraient l'intégrale générale de ces équations.

Je dis que cela n'est pas possible.

En effet, supposons qu'il en soit ainsi et que nos séries convergent uniformément pour toutes les valeurs du temps et pour les valeurs suffisamment petites de μ, de ω_1 et ω_2.

Il est clair que λ_1 et λ_2 sont aussi des séries ordonnées suivant les puissances de μ, ω_1 et ω_2. Pour certaines valeurs de ω_1 et ω_2 le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est commensurable. Les solutions particulières qui répondent à ces valeurs des constantes d'intégration sont alors des solutions périodiques.

Nous avons vu plus haut que toute solution périodique admet un certain nombre *d'exposants caractéristiques*. Voyons comment on peut calculer ces exposants quand on possède l'intégrale générale des équations données.

Soit

$$x_1 = \psi_1(t, \omega_1, \omega_2, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2), \qquad x_2 = \psi_2(t, \omega_1, \omega_2, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2),$$
$$y_1 = \psi'_1(t, \omega_1, \omega_2, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2), \qquad y_2 = \psi'_2(t, \omega_1, \omega_2, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$$

cette intégrale générale.

Supposons qu'en donnant à ω_1, ω_2, $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ des valeurs déterminées ω_1^0, ω_2^0, $\overline{\omega}_1^0$, $\overline{\omega}_2^0$, les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_1^0, ψ_2^0 deviennent périodiques en t. Pour avoir les exposants caractéristiques de la solution périodique ainsi obtenue, nous formerons les seize dérivées partielles :

$$\frac{dx_1}{d\omega_1}, \quad \frac{dx_2}{d\omega_1}, \quad \frac{dy_1}{d\omega_1}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_1};$$
$$\frac{dx_1}{d\overline{\omega}_1}, \quad \frac{dx_2}{d\overline{\omega}_1}, \quad \frac{dy_1}{d\overline{\omega}_1}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_1};$$
$$\frac{dx_1}{d\omega_2}, \quad \frac{dx_2}{d\omega_2}, \quad \frac{dy_1}{d\omega_2}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_2};$$
$$\frac{dx_1}{d\overline{\omega}_2}, \quad \frac{dx_2}{d\overline{\omega}_2}, \quad \frac{dy_1}{d\overline{\omega}_2}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_2}$$

et nous y ferons ensuite

$$\omega_1 = \omega_1^0, \qquad \omega_2 = \omega_2^0, \qquad \omega_1 = \varpi_1^0, \qquad \omega_2 = \omega_2^0.$$

Alors $\frac{dx_1}{d\omega_1}$ par exemple prendra la forme suivante :

$$\frac{dx_1}{d\omega_1} = e^{\alpha_1 t}\theta_1(t) + e^{\alpha_2 t}\theta_2(t) + e^{\alpha_3 t}\theta_3(t) + e^{\alpha_4 t}\theta_4(t),$$

les α étant des constantes et les θ des fonctions périodiques.

Les α sont alors les exposants caractéristiques cherchés.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous avons

$$x_1 = \varphi_1(\omega_1, \omega_2, w_1, w_2),$$

φ_1 étant périodique en w_1 et en w_2.

Il vient alors

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1} = \frac{d\varphi_1}{dw_1}, \qquad \frac{dx_1}{d\omega_1} = \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} + \left(\frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}\right)t.$$

Les trois fonctions

$$\frac{d\varphi_1}{dw_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}$$

sont périodiques en w_1 et w_2 et par conséquent en t.

On trouverait pour $\frac{dx_1}{d\varpi_2}$ et $\frac{dx_1}{d\omega_2}$ des expressions analogues.

Cela prouve que les exposants caractéristiques sont nuls.

Donc, *si les séries de M. Lindstedt étaient convergentes, tous les exposants caractéristiques seraient nuls.*

Dans quel cas en est-il ainsi ?

Nous avons vu plus haut la manière de calculer les exposants caractéristiques (§ 10 et 12).

Dans ce dernier paragraphe nous avons vu que les exposants caractéristiques relatifs aux équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i} + \mu\frac{dF_1}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} - \mu\frac{dF_1}{dx_i}$$

pouvaient se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; nous avons appris à former l'équation qui donne le coefficient α_1 de $\sqrt{\mu}$.

Rappelons comment se forme cette équation :

Nous avions posé dans le paragraphe cité

$$C_{ik}^0 = -\frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_k}, \qquad B_{ik}^2 = \frac{d^2F_1}{dy_i\,dy_k}.$$

Dans ces dérivées secondes on suppose x_1 et x_2 remplacées par x_1^0 et x_2^0, pendant que y_1 et y_2 sont remplacées par $n_1 t + \omega_1$, $n_2 t + \varpi_2$ [1]. C_{ik}^0 est donc une constante et B_{ik}^2 une fonction périodique de t. J'appelle b_{ik} le terme tout connu de cette fonction périodique.

Posons ensuite

$$e_{11} = b_{11} C_{11}^0 + b_{12} C_{21}^0, \qquad e_{21} = b_{21} C_{11}^0 + b_{22} C_{21}^0,$$
$$e_{12} = b_{11} C_{12}^0 + b_{12} C_{22}^0, \qquad e_{22} = b_{21} C_{12}^0 + b_{22} C_{22}^0.$$

L'équation qui nous donne α_1 s'écrira alors

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines nulles, il faudrait que l'on eût

$$e_{11} + e_{22} = 0$$

et

$$(4) \qquad b_{11} C_{11}^0 + 2 b_{12} C_{12}^0 + b_{22} C_{22}^0 = 0.$$

Or on a, comme je l'ai démontré dans le paragraphe cité :

$$n_1 b_{11} + n_2 b_{12} = n_1 b_{21} + n_2 b_{22} = 0.$$

Il faut donc pour que l'identité (4) ait lieu ou bien que

$$(5) \qquad b_{11} = 0$$

ou bien que

$$(6) \qquad n_2^2 C_{11}^0 - 2 n_1 n_2 C_{12}^0 + n_1^2 C_{22}^0 = 0.$$

Occupons-nous d'abord de la relation (5). Si nous faisons dans la fonction perturbatrice F_1

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \omega_2,$$

F_1 deviendra une fonction périodique de t. Supposons cette fonction périodique développée en série trigonométrique, et soit ψ le terme tout connu; ψ sera une fonction périodique de ϖ_1 et ϖ_2 et il viendra

$$b_{ik} = \frac{d^2 \psi}{d\varpi_i d\omega_k}.$$

---

[1] Inutile de rappeler ici que ces valeurs de x_1^0, x_2^0, n_1, n_2 sont celles qui correspondent à la solution périodique étudiée; ce ne sont pas celles dont nous avons fait usage plus haut dans l'exposé de la méthode de M. Lindstedt. Le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est donc commensurable.

Nous devrons donc avoir

$$\frac{d^2\psi}{d\overline{\omega}_1^2} = 0. \tag{7}$$

Nous pourrons toujours supposer que l'origine du temps a été choisie de telle sorte que $\overline{\omega}_2$ soit nul et que ψ soit fonction périodique de $\overline{\omega}_1$ seulement.

De plus la relation (7) devrait être (si les séries de M. Lindstedt convergeaient) satisfaite identiquement. Et en effet, si l'on admettait la convergence de ces séries, il y aurait une infinité de solutions périodiques correspondant à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$.

Si la relation (7) est une identité et si ψ est une fonction périodique, cette fonction devra se réduire à une constante.

Voyons ce que cela veut dire :

La fonction perturbatrice F_1 étant périodique par rapport à y_1 et à y_2 pourra s'écrire

$$F_1 = \Sigma A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \Sigma B_{m_1 m_2} \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

les m_1 et les m_2 étant des entiers, pendant que $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ sont des fonctions données de x_1 et de x_2.

On aura alors

$$\psi = \mathbf{S} A^0_{m_1 m_2} \cos(m_1 \overline{\omega}_1 + m_2 \overline{\omega}_2) + \mathbf{S} B^0_{m_1 m_2} \sin(m_1 \omega_1 + m_2 \overline{\omega}_2),$$

la sommation représentée par le signe $\mathbf{S}$ s'étendant à tous les termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0,$$

et $A^0_{m_1 m_2}$ et $B^0_{m_1 m_2}$ représentant ce que deviennent $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ quand on y remplace x_1 et x_2 par x_1^0 et x_2^0.

Comme les termes périodiques doivent disparaître de ψ, on aura

$$A^0_{m_1 m_2} = B^0_{m_1 m_2} = 0.$$

Ainsi les coefficients $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ du développement de la fonction perturbatrice doivent s'annuler quand on y donne à x_1 et à x_2 des valeurs telles que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0.$$

Ou bien encore on doit pouvoir donner au rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des valeurs commensurables sans introduire dans la fonction perturbatrice F_1 des termes séculaires.

Il est clair qu'il n'en est pas ainsi dans le cas particulier du problème des

trois corps que nous avons examiné, et qu'on n'y peut donner au rapport des moyens mouvements une valeur commensurable sans introduire dans la fonction perturbatrice des termes séculaires.

Passons maintenant à la condition (6), qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dF_0}{dx_2}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_1^2} - 2\frac{dF_0}{dx_1}\frac{dF_0}{dx_2}\frac{d^2F_0}{dx_1\,dx_2} + \left(\frac{dF_0}{dx_1}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_2^2} = 0.$$

Elle exprime que la courbe $F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$ a un point d'inflexion au point $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$.

Comme cette condition doit être remplie pour toutes les valeurs de x_1^0 et de x_2^0 qui correspondent à un rapport $\frac{n_1}{n_2}$ commensurable, la courbe $F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$ devra se réduire à un système de droites.

C'est un cas particulier que nous laisserons de côté, car il est évident que rien de pareil n'arrive dans le problème des trois corps.

Ainsi, *dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons étudié et par conséquent aussi dans le cas général, les séries de M. Lindstedt ne convergent pas uniformément pour toutes les valeurs des constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent.*

22. — Non-existence des intégrales uniformes [1].

Reprenons nos équations de la Dynamique avec deux degrés de liberté

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Ces équations admettent une intégrale $F = \text{const.}$ Cette intégrale F est une fonction analytique et uniforme de x_1, x_2, y_1, y_2 et μ; périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2.

Je me propose de démontrer qu'il n'existe pas d'autre intégrale jouissant des mêmes propriétés.

Soit en effet $\Phi = \text{const.}$ une autre intégrale analytique uniforme par rapport aux x, aux y et à μ et périodique par rapport aux y.

Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = \varphi_3(t), \qquad y_2 = \varphi_4(t)$$

une solution périodique (de période T) de nos équations différentielles.

---

[1] *Voir* aux Notes, *Intégrales uniformes.*

Soit

$$x_1 = \varphi_1(t) + \xi_1, \qquad x_2 = \varphi_2(t) + \xi_2, \qquad y_1 = \varphi_3(t) + \xi_3, \qquad y_2 = \varphi_4(t) + \xi_4.$$

Soit β_i la valeur de ξ_i pour $t = 0$; soit $\beta_i + \psi_i$ la valeur de ξ_i pour $t = T$; nous savons que les ψ sont développables suivant les puissances croissantes des β. Considérons l'équation en S :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} - S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} - S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} - S & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation sont égales à $e^{\alpha T} - 1$, les α étant les exposants caractéristiques; deux de ces racines sont donc nulles, et dans le cas particulier du problème des trois corps que nous traitons, les deux autres racines doivent être différentes de zéro.

Je remarque d'abord que nous avons :

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i} = 0 \\ \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dans les dérivéee de F et de Φ, x_1, x_2, y_1 et y_2 doivent être remplacées par $\varphi_1(T)$, $\varphi_2(T)$, $\varphi_3(T)$, $\varphi_4(T)$.

On peut en conclure ou bien que l'on a

$$\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{d\Phi}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{d\Phi}{dx_2}} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{d\Phi}{dy_1}} = \frac{\frac{dF}{dy_2}}{\frac{d\Phi}{dy_2}},$$

ou bien que le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β est nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre.

D'autre part on a, en désignant par $\varphi'_i(t)$ la dérivée de $\varphi_i(t)$,

$$(3) \qquad \frac{d\psi_i}{d\beta_1}\varphi'_1(0) + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\varphi'_2(0) + \frac{d\psi_i}{d\beta_3}\varphi'_3(0) + \frac{d\psi_i}{d\beta_4}\varphi'_4(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{dF}{dx_1}\varphi'_1(0) + \frac{dF}{dx_2}\varphi'_2(0) + \frac{dF}{dy_1}\varphi'_3(0) + \frac{dF}{dy_2}\varphi'_4(0) = 0, \\ \frac{d\Phi}{dx_1}\varphi'_1(0) + \frac{d\Phi}{dx_2}\varphi'_2(0) + \frac{d\Phi}{dy_1}\varphi'_3(0) + \frac{d\Phi}{dy_2}\varphi'_4(0) = 0. \end{cases}$$

De ces équations on peut conclure, par un calcul très simple dont on trouvera plus loin le détail, que si les équations (2) ne sont pas satisfaites, on bien on aura

$$\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) = \varphi'_3(0) = \varphi'_4(0) = 0; \tag{5}$$

ou bien l'équation en S aura trois racines nulles (les quatre racines devraient même être nulles, puisque les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire).

Or nous savons que l'équation en S n'a que deux racines nulles; d'autre part les équations (5) ne peuvent être satisfaites que pour certaines solutions périodiques très particulières (je veux dire pour celles qui sont étudiées dans la *Mécanique céleste* de Laplace, Livre X, Chap. VI) et où le troisième corps décrit comme les deux premiers une circonférence.

Les équations (2) devront donc être satisfaites. Elles devront l'être pour

$$x_1 = \varphi_1(\mathrm{T}), \qquad x_2 = \varphi_2(\mathrm{T}), \qquad y_1 = \varphi_3(\mathrm{T}), \qquad y_2 = \varphi_4(\mathrm{T}).$$

Mais comme l'origine du temps est restée arbitraire, elles devront l'être également quel que soit t pour

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = \varphi_3(t), \qquad y_2 = \varphi_4(t).$$

En d'autres termes, elles le seront pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je dis maintenant que ces équations sont satisfaites identiquement. Posons par exemple :

$$f = \frac{d\Phi}{dx_2}\frac{d\mathrm{F}}{dx_1} - \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{d\mathrm{F}}{dx_2}.$$

Il est clair que f sera encore une fonction analytique et uniforme; on aura $f = 0$ pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je veux établir que f est identiquement nul; pour cela je vais montrer que l'on a identiquement pour $\mu = 0$:

$$0 = f = \frac{df}{d\mu} = \frac{d^2 f}{d\mu^2} = \ldots.$$

En effet, considérons une solution périodique quelconque du premier genre; soit

$$x_1 = \varphi_1(t, \mu), \qquad x_2 = \varphi_2(t, \mu), \qquad y_1 = \varphi_3(t, \mu), \qquad y_2 = \varphi_4(t, \mu)$$

cette solution; les fonctions φ seront développables suivant les puissances de μ et quand μ tendra vers zéro, elles tendront respectivement vers

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad n_1 t + \varpi_1, \quad n_2 t + \varpi_2,$$

$\left(x_1^0 \text{ et } x_2^0 \text{ étant des constantes telles que } \frac{n_1}{n_2} \text{ soit commensurable et } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ les quantités définies dans le paragraphe 11}\right)$. Tant que μ n'est pas nul on aura

$$f[\varphi_1(t, \mu), \varphi_2(t, \mu), \varphi_3(t, \mu), \varphi_4(t, \mu)] = 0.$$

Mais la fonction f étant analytique et par conséquent continue, on aura encore pour $\mu = 0$ (bien que pour $\mu = 0$ les exposants caractéristiques s'annulent) :

$$f(x_1^0, x_2^0, n_1 t + \varpi_1, n_2 t + \varpi_2) = 0.$$

Mais si l'on considère un système quelconque de valeurs de x_1 et de x_2 on pourra toujours trouver un système x_1^0 et x_2^0 qui en différera aussi peu que l'on voudra et qui correspondra à une valeur commensurable de $\frac{n_1}{n_2}$. Soit alors

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

λ_1 et λ_2 étant deux entiers premiers entre eux. Nous choisirons t de façon que

$$n_1 t + \varpi_1 = y_1 + 2k\pi \qquad (k \text{ entier}).$$

On aura alors

$$n_2 t + \varpi_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_1 + 2k\pi - \omega_1) + \omega_2.$$

Si nous posons

$$n_2 t + \varpi_2 = y_2^0 + 2k'\pi \qquad (k \text{ entier}),$$

on devra avoir

$$f(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0.$$

Étant donnée une valeur quelconque de y_2, on peut choisir les entiers k et k' de telle façon que la différence $y_2 - y_2^0$ soit plus petite en valeur absolue que $\frac{2\pi}{\lambda_1}$. Mais nous pouvons toujours choisir x_1^0 et x_2^0 de façon que ce système de valeurs diffère aussi peu que l'on veut de x_1 et de x_2, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ tout en étant commensurable soit tel que le nombre entier λ_1 soit aussi grand que l'on veut. Par conséquent, étant donné un système quelconque de valeurs de x_1, x_2, y_1 et y_2, on pourra trouver un système de valeurs qui en différera aussi peu qu'on voudra et pour lequel f sera nul. Comme la fonction f est analytique, elle devra donc être identiquement nulle pour $\mu = 0$.

Cela posé, comme $f[\varphi_i(t, \mu)] = 0$ quels que soient t et μ, il vient, pour tous les points de la solution périodique,

$$\frac{df}{d\mu} + \frac{df}{dx_1}\frac{d\varphi_1}{d\mu} + \frac{df}{dx_2}\frac{d\varphi_2}{d\mu} + \frac{df}{dy_1}\frac{d\varphi_3}{d\mu} + \frac{df}{dy_2}\frac{d\varphi_4}{d\mu} = 0.$$

Cette relation sera vraie en particulier pour

$$\mu = 0, \qquad x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2.$$

Mais, quand μ est nul, f est identiquement nul, par conséquent ses dérivées par rapport aux x et aux y sont nulles. On a donc

$$\frac{df}{d\mu} = 0 \qquad \text{pour} \quad \mu = 0, \qquad x_i = x_i^0, \qquad y_i = n_i t + \varpi_i;$$

et l'on en conclurait comme plus haut que $\frac{df}{d\mu}$ est identiquement nul pour $\mu = 0$.

On démontrerait de la même manière que $\frac{d^2 f}{d\mu^2}$, et les autres dérivées de f par rapport à μ sont nulles pour $\mu = 0$.

Donc la fonction f est identiquement nulle et les équations (2) sont des identités.

Mais, s'il en est ainsi, cela veut dire que Φ est une fonction de F, et que les deux intégrales Φ et F ne sont pas distinctes.

Nos équations ne comportent donc pas d'autre intégrale analytique et uniforme que F = const.

Quand je dis que ces équations n'admettent pas d'intégrale uniforme, je ne veux pas dire seulement qu'elles n'ont pas d'intégrale qui reste analytique et uniforme pour toutes les valeurs de x, de y et de μ.

Je veux dire qu'en dehors de l'intégrale F, ces équations n'admettent pas d'intégrale qui reste analytique, uniforme (et périodique de y_1 et y_2) pour toutes les valeurs de y_1 et de y_2 et pour les valeurs suffisamment petites de μ, quand x_1 et x_2 parcourent un domaine quelconque, si petit d'ailleurs que soit ce domaine.

On sait que Bruns a démontré qu'en dehors des intégrales connues, le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale algébrique. Ce résultat se trouve donc confirmé par une voie entièrement différente.

J'ai annoncé plus haut que les équations (1), (3) et (4) entraînent forcément une des trois conséquences suivantes : ou bien les équations (2) sont satisfaites, ou bien ce sont les équations (5), ou bien l'équation en S a au moins trois racines nulles.

En effet, formons la matrice suivante à quatre lignes et cinq colonnes :

$$(6) \qquad \left\| \frac{d\psi_i}{d\beta_1} \quad \frac{d\psi_i}{d\beta_2} \quad \frac{d\psi_i}{d\beta_3} \quad \frac{d\psi_i}{d\beta_4} \quad \varphi_i'(0) \right\| \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Si les équations (1) et (4) sont satisfaites sans que les équations (2) le soient,

nous devons conclure que tous les déterminants obtenus en supprimant dans cette matrice deux colonnes et une ligne sont nuls.

Si maintenant l'on fait subir à x_1, x_2, y_1 et y_2 un changement linéaire de variables, les ψ et les β subiront ce même changement linéaire et la matrice (6) pourra être simplifiée.

On peut toujours supposer qu'on a choisi ce changement linéaire de telle sorte que

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k} = 0 \qquad \text{pour} \quad i < k.$$

Alors les produits trois à trois des quatre quantités $\frac{d\psi_1}{d\beta_1}$, $\frac{d\psi_2}{d\beta_2}$, $\frac{d\psi_3}{d\beta_3}$, $\frac{d\psi_4}{d\beta_4}$ sont tous nuls, d'où il suit que deux au moins de ces quantités sont nulles. On peut toujours supposer que le changement linéaire a été choisi de telle sorte que ce soient $\frac{d\psi_3}{d\beta_3}$ et $\frac{d\psi_4}{d\beta_4}$ qui soient nuls.

Si en outre une des deux quantités $\frac{d\psi_1}{d\beta_1}$ et $\frac{d\psi_2}{d\beta_2}$ est encore nulle, l'équation en S aura trois racines nulles.

Si, au contraire, aucune de ces deux quantités n'est nulle, les équations (3) permettent de conclure que

$$\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) = 0.$$

En supprimant dans la matrice (6) la troisième et la quatrième colonne et la troisième ligne, ou bien la troisième et la quatrième colonne et la quatrième ligne, il vient

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi'_3(0) = \frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi'_4(0) = 0;$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) = \varphi'_3(0) = \varphi'_4(0) = 0,$$

c'est-à-dire si les équations (5) sont satisfaites; ou bien si

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0 \qquad \text{ou} \quad \frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0,$$

c'est-à-dire si l'équation en S a trois racines nulles. C. Q. F. D.

CHAPITRE IV.

TENTATIVES DE GÉNÉRALISATION.

23. — Problème des n corps.

Est-il permis d'espérer qu'on puisse étendre les résultats précédents aux cas où les équations de la Dynamique comportent plus de deux degrés de liberté et par conséquent au cas général du problème des n corps?

C'est possible, mais ce ne sera pas sans un nouvel effort.

Je croyais, en commençant ce travail, que la solution du problème, une fois trouvée pour le cas particulier que j'ai traité, se généraliserait immédiatement sans qu'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle en dehors de celles qui sont dues au nombre plus grand des variables et à l'impossibilité d'une représentation géométrique. Je me trompais.

Aussi crois-je devoir insister un peu ici sur la nature des obstacles qui s'opposent à cette généralisation.

S'il y a p degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace à $2p-1$ dimensions. La plupart des conclusions de la première Partie sont encore vraies et n'ont à subir aucun changement. Il existe donc une infinité de solutions périodiques représentées par des trajectoires fermées et se classant en stables et en instables, ou même en catégories plus nombreuses, d'après la nature de leurs exposants caractéristiques. Il existe aussi une infinité de solutions asymptotiques.

J'ai cherché également à étendre au cas général le calcul du paragraphe 17 en laissant de côté la question de convergence. Les séries qu'on obtient de la sorte peuvent en effet, même lorsqu'elles divergent, être utiles dans certains cas aux astronomes et peut-être guider les géomètres vers la solution définitive.

Supposons trois degrés de liberté et reprenons les équations (1) du paragraphe 11 en faisant les mêmes hypothèses que dans ce paragraphe.

Cherchons ensuite trois fonctions de y_1, y_2, y_3 :

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2, y_3), \qquad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2, y_3), \qquad x_3 = \Phi_3(y_1, y_2, y_3),$$

satisfaisant aux équations

$$\frac{dx_1}{dy_1}\frac{dF}{dx_1}+\frac{dx_1}{dy_2}\frac{dF}{dx_2}+\frac{dx_1}{dy_3}\frac{dF}{dx_3}+\frac{dF}{dy_1}=0,$$
$$\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dF}{dx_1}+\frac{dx_2}{dy_2}\frac{dF}{dx_2}+\frac{dx_2}{dy_3}\frac{dF}{dx_3}+\frac{dF}{dy_2}=0,$$
$$\frac{dx_3}{dy_1}\frac{dF}{dx_1}+\frac{dx_3}{dy_2}\frac{dF}{dx_2}+\frac{dx_3}{dy_3}\frac{dF}{dx_3}+\frac{dF}{dy_3}=0.$$

ou, ce qui revient au même, aux équations

$$F=C,\qquad \frac{dx_1}{dy_2}=\frac{dx_2}{dy_1},\qquad \frac{dx_3}{dy_2}=\frac{dx_2}{dy_3},\qquad \frac{dx_1}{dy_3}=\frac{dx_3}{dy_1}.$$

Nous supposerons que x_1, x_2, x_3 peuvent se développer suivant les puissances de μ ou de $\sqrt{\mu}$ et que pour $\mu=0$, elles se réduisent à des constantes x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Nous poserons ensuite comme plus haut :

$$\frac{dF_0}{dx_1^0}=-n_1,\qquad \frac{dF_0}{dx_2^0}=-n_2,\qquad \frac{dF_0}{dx_3^0}=-n_3.$$

Si entre n_1, n_2, n_3, il n'y a aucune relation linéaire à coefficients entiers, on peut développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de μ; chaque terme est périodique à la fois par rapport à y_1, à y_2 et à y_3. Mais il s'introduit de petits diviseurs.

Si entre n_1, n_2 et n_3, il y a une relation linéaire et une seule à coefficients entiers

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0,$$

les calculs peuvent se poursuivre absolument comme dans le paragraphe 18. Les trois fonctions x_1, x_2 et x_3 se développent suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et elles sont au moins doublement périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π de telle façon que $m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3$ ne change pas; il y a encore de petits diviseurs.

Il reste un troisième cas, le plus intéressant de tous, qui est celui où il y a entre n_1, n_2, n_3 deux relations linéaires à coefficients entiers :

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0,\qquad m'_1n_1+m'_2n_2+m'_3n_3=0.$$

On peut alors développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et de façon que ces fonctions soient périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π, et de telle sorte que

$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ et $m'_1 y_1 + m'_2 y_2 + m'_3 y_3$ ne changent pas. Il n'y a plus de petits diviseurs, mais le calcul de ces fonctions n'est pas sans certaines difficultés.

En première approximation, la détermination de ces fonctions dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles qui ont la forme canonique des équations de la Dynamique, *mais avec deux degrés de liberté seulement*. Dans presque toutes les applications, ces équations dépendront d'un paramètre très petit par rapport auquel on pourra développer, de manière qu'on pourra leur appliquer les conclusions des Chapitres I et II (Ire Partie).

Dans les approximations suivantes, on n'aura plus à effectuer que des quadratures.

Ce n'est pas tout; le problème des n corps présente des difficultés spéciales qu'on ne rencontre pas dans le cas général. Sans doute ces difficultés ne sont pas aussi essentielles que celles dont j'ai signalé plus haut l'existence, et un peu d'attention doit permettre d'en triompher.

Mais j'en dois dire ici quelques mots.

Dans le problème des n corps, F_0 ne dépend pas de toutes les variables linéaires x_i; par conséquent, non seulement le hessien de F_0 par rapport aux variables x_i est nul, mais le hessien d'une fonction arbitraire de F_0 est encore nul (*Cf.* p. 359). Cela vient du fait suivant : si $\mu = 0$, c'est-à-dire dans le mouvement képlerien, les périhélies sont fixes.

Cette difficulté n'existait pas dans le cas que nous avons traité (premier exemple, § 15), parce que nous avions pris pour variable non pas g longitude du périhélie, mais $g - t$. Elle n'existerait pas non plus avec une loi d'attraction autre que la newtonienne.

Voici quelles en sont les étranges conséquences :

Nous avons vu qu'il y a deux sortes de solutions périodiques : les solutions du premier genre, dont nous avons parlé dans le Chapitre III (Ire Partie) et qui subsistent quelque petit que soit μ, et les solutions du deuxième genre dont nous avons parlé dans le paragraphe 20 et qui disparaissent l'une après l'autre quand on fait décroître μ.

Dans le cas du problème des trois corps, si l'on fait $\mu = 0$, les orbites des deux petits corps se réduisent à deux ellipses képleriennes. Que deviennent alors les solutions périodiques du premier genre quand on fait $\mu = 0$? En d'autres termes quelles sont les solutions périodiques des équations du mouve-

ment képlerien? Les unes correspondent au cas où les deux moyens mouvements sont commensurables. Mais il en est d'autres qu'il est plus malaisé d'apercevoir et sur lesquelles je dois insister.

Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, *à moins d'être à une distance infiniment petite l'une de l'autre.* Mais si ces planètes passent infiniment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle façon que ces chocs se produisent périodiquement et l'on obtient ainsi des solutions discontinues [1] qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouvement képlerien et *que nous n'avons pas le droit de laisser de côté.*

Telles sont les raisons pour lesquelles j'ai renoncé, au moins momentanément, à étendre au cas général les résultats obtenus. Non seulement le temps me fait défaut, mais je crois qu'une pareille tentative serait prématurée.

En effet, je n'ai pu faire encore du cas particulier même auquel je me suis restreint une étude suffisamment approfondie. Ce n'est qu'après bien des recherches et des efforts que les géomètres connaîtront complètement ce domaine, où je n'ai pu faire qu'une simple reconnaissance, et qu'ils y trouveront un terrain solide d'où ils puissent s'élancer à de nouvelles conquêtes.

---

[1] Ce sont les solutions que H. Poincaré a appelées *de deuxième espèce* et a étudiées au Chapitre XXXII des *Méthodes Nouvelles*. *Voir* à ce sujet, aux Notes, *Solutions périodiques*.

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

Bulletin Astronomique, t. 8, p. 12-24 (janvier 1891).

J'ai publié dans le Tome 13 des *Acta Mathematica* [1] un Mémoire où j'obtiens quelques résultats relatifs à un cas particulier du problème des trois corps et à divers problèmes de Dynamique; je crois qu'il ne sera pas inutile de reproduire ici sans démonstration quelques-uns de ces résultats pour les lecteurs du *Bulletin astronomique* qui n'auraient pas le temps de lire *in extenso* le Mémoire original, qui est assez volumineux.

Je ne parlerai ici que de ce cas particulier du problème des trois corps que je viens de mentionner et qui est le suivant.

Supposons trois masses A, B et C *se mouvant dans un même plan*. Je suppose que la masse A soit très grande, la masse B très petite, la masse C *infiniment* petite et incapable, par conséquent, de troubler les deux autres. Alors A et B se mouvront suivant les lois de Képler. Je suppose de plus que *les excentricités de* A *et de* B *sont nulles*, de telle sorte que ces deux masses A et B décrivent des circonférences concentriques, et je me propose d'étudier le mouvement de C sous l'attraction de A et de B dans le plan de ces deux circonférences. Tel serait le cas du Soleil, de Jupiter et d'une petite planète, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tous les résultats que je vais énoncer se rapportent à ce cas particulier. Depuis j'ai cherché à les étendre au cas général du problème des trois corps; tel a été le principal objet des leçons que j'ai professées à la Sorbonne de novembre 1889 à mars 1890 et qui seront publiées prochainement chez MM. Gauthier-Villars et fils; mais je ne m'occuperai pas pour le moment de cette extension.

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 262.

Voici d'abord les notations que je compte employer.

Je définirai la position du point C par ses éléments osculateurs. Je désignerai par a, e et n le grand axe, l'excentricité et le moyen mouvement, par y_2 l'anomalie moyenne et par g la longitude du périhélie.

Je désignerai par 1 la masse de A et par μ celle de B; μ sera donc une quantité très petite. Je choisirai les unités et l'origine du temps de façon que la constante de Gauss soit égale à 1; que le moyen mouvement de B soit égal à 1, et la longitude de B égale à t.

Je poserai

$$x_1 = \sqrt{a(1-e^2)}, \qquad x_2 = \sqrt{a}, \qquad y_1 = g - t,$$

F sera la fonction perturbatrice augmentée de $x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$; les équations prendront alors la forme symétrique

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

La fonction F sera susceptible d'être développée suivant les puissances de μ, et nous écrirons

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots;$$

on aura d'ailleurs

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

Enfin F sera fonction de x_1, x_2, y_1 et y_2 seulement et sera périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2.

Les équations (1) admettent, comme intégrale, $F = C$; cette intégrale, connue sous le nom d'intégrale de Jacobi, peut être obtenue en combinant celle des forces vives avec celle des aires.

On peut aussi la regarder comme l'intégrale des forces vives dans le dans le mouvement relatif du point C par rapport à deux axes mobiles tournant d'un mouvement uniforme; à savoir la droite AB et une perpendiculaire à AB menée par le centre de gravité du système supposé fixe.

C'est pourquoi je conserverai à la constante C le nom de *constante des forces vives*.

Solutions périodiques.

Les premiers résultats sur lesquels je veux appeler l'attention sont relatifs à certaines solutions particulières remarquables des équations (1). Je citerai

d'abord les solutions de la forme suivante, que j'appellerai solutions périodiques :

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t), \qquad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t).$$

Les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 sont des fonctions périodiques de période T et sont, par conséquent, développables suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. De plus, $n_1 T$ et $n_2 T$ sont des multiples de 2π.

Je distingue les solutions périodiques du premier genre, pour lesquelles les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 sont développables suivant les puissances de μ.

A chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, commensurables entre elles, correspondent au moins deux solutions périodiques du premier genre.

J'enseigne à former les coefficients des séries φ, qui sont absolument convergentes.

Solutions périodiques du deuxième genre.

Il existe également des solutions périodiques pour lesquelles les séries φ ne sont pas développables suivant les puissances de μ et que j'appellerai *solutions du deuxième genre*. Voici sous quelle forme elles se présentent d'ordinaire :

Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t), \qquad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t),$$

une solution périodique du premier genre, c'est-à-dire développable suivant les puissances de μ; soit T la période. Soit

$$x_1 = \psi_1^0(t), \qquad x_2 = \psi_2^0(t), \qquad y_1 = n_1 t + \psi_3^0(t), \qquad y_2 = n_2 t + \psi_4^0(t)$$

ce que devient cette solution quand on y donne à μ une certaine valeur μ_0. Alors les fonctions ψ_i^0 sont développables suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$.

Il existera dans certains cas une solution périodique de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \psi_1^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_1^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_1^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_1^{(3)}(t) + \ldots,\\
x_2 &= \psi_2^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_2^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_2^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_2^{(3)}(t) + \ldots,\\
y_1 &= n_1 t + \psi_3^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_3^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_3^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_3^{(3)}(t) + \ldots,\\
y_2 &= n_2 t + \psi_4^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_4^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_4^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_4^{(3)}(t) + \ldots.
\end{aligned}$$

Les fonctions $\psi_i^{(1)}(t)$, $\psi_i^{(2)}(t)$, $\psi_i^{(3)}(t)$ sont périodiques par rapport à t; mais la période n'est pas égale à T comme pour les fonctions $\psi_i^0(t)$, mais à kT, k étant un nombre entier. Par conséquent, x_1, x_2, $y_1 - n_1 t$ et $y_2 - n_2 t$ sont dévelop-

pables suivant les puissances de $\sqrt{\mu - \mu_0}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{kT}$.

Pour $\mu > \mu_0$, on a deux solutions périodiques du deuxième genre réelles et distinctes; pour $\mu = \mu_0$, elles se confondent entre elles et avec la solution du premier genre

$$x_i = \psi_i^0(t), \qquad y_i = n_i t + \psi_{i+2}^0(t);$$

pour $\mu < \mu_0$, elles deviennent imaginaires.

Dans certains cas le contraire peut avoir lieu, et il peut arriver que les deux solutions soient réelles pour $\mu < \mu_0$ et imaginaires pour $\mu > \mu_0$.

Exposants caractéristiques.

Les solutions périodiques semblent d'abord sans aucun intérêt pour la pratique. La probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une pareille solution est évidemment nulle. Mais il peut très bien arriver qu'elles en diffèrent fort peu : la solution périodique pourra jouer alors le rôle de première approximation d' « orbite intermédiaire ». Il peut donc y avoir intérêt à étudier les solutions qui diffèrent peu d'une solution périodique. Voici comment on opérera :

Soit

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t), \qquad (i = 1, 2)$$

une solution périodique quelconque.

Considérons une solution peu différente et posons

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + \eta_i.$$

Si les ξ_i et les η_i sont des quantités assez petites pour qu'on puisse en négliger les carrés, les équations deviendront

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \displaystyle\sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k}\eta_k \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\displaystyle\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k}\eta_k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Dans les dérivées secondes de F qui figurent dans les équations (2), on doit remplacer x_i et y_i par $\varphi_i(t)$ et $n_i t + \varphi_{i+2}(t)$; les coefficients de ξ_k et de η_k dans les seconds membres de ces équations (2) sont donc des fonctions périodiques données de t.

L'intégrale générale des équations (2) s'écrit

$$\begin{aligned} \xi_i &= A e^{\alpha t} S_i + B e^{-\alpha t} S'_i + (C + tD) S''_i + D S'''_i \\ \eta_i &= A e^{\alpha t} T_i + B e^{-\alpha t} T'_i + (C + tD) T''_i + D T'''_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2).$$

A, B, C, D sont quatre constantes d'intégration; α est une constante non arbitraire. S_i, S'_i, S''_i, S''', T_i, T'_i, T''_i, T'''_i sont des fonctions périodiques de t développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$.

La constante α et les coefficients de S_i, S'_i, T_i et T'_i sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, ceux de S''_i, S'''_i, T''_i et T'''_i suivant les puissances de μ. J'enseigne à former toutes ces séries qui sont absolument convergentes.

L'exposant α s'appelle exposant *caractéristique*. Il est réel ou purement imaginaire. Dans le premier cas, la solution périodique sera dite instable, dans le second cas elle sera dite stable. Cette dénomination se justifie aisément, bien qu'elle ne doive pas être prise dans un sens absolu, puisque nous avons négligé les carrés des ξ et des η.

Nous avons vu qu'il y aura au moins deux solutions périodiques du premier genre correspondant à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, commensurables entre elles. J'ajouterai qu'il y en aura toujours un nombre pair et précisément autant de stables que d'instables.

Solutions asymptotiques.

Soit

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) \qquad (i = 1, 2)$$

une solution périodique quelconque *instable*. Il existe deux séries de solutions particulières remarquables que j'appellerai *solutions asymptotiques*.

Les solutions asymptotiques de la première série seront de la forme suivante :

$$(3) \quad \begin{cases} x_i = \varphi_i(t) + A e^{-\alpha t} \theta_i^{(1)}(t) + A^2 e^{-2\alpha t} \theta_i^{(2)}(t) + A^3 e^{-3\alpha t} \theta_i^{(3)}(t) + \ldots \\ y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + A e^{-\alpha t} \theta_{i+2}^{(1)}(t) + A^2 e^{-2\alpha t} \theta_{i+2}^{(2)}(t) + \ldots \end{cases} \qquad (i = 1, 2).$$

A est une constante arbitraire d'intégration, α est l'exposant caractéristique (que je suppose positif), les fonctions $\theta_i^{(1)}(t)$, $\theta_i^{(2)}(t)$, ..., $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont périodiques de période T et développables par conséquent comme les $\varphi_i(t)$ par rapport aux sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients du développement sont eux-mêmes des séries dont les termes sont rationnels en $\sqrt{\mu}$.

Inutile de faire remarquer que, si l'on reprend les notations du paragraphe précédent, on a

$$\theta_i^{(1)}(t) = S'_i, \qquad \theta_{i+2}^{(1)}(t) = T'_i.$$

Les séries (3) sont convergentes pour les valeurs de t suffisamment grandes. On voit que, quand t croît indéfiniment, les solutions représentées par les équations (3) se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique.

Les solutions asymptotiques de la seconde série seront de la forme suivante :

$$(3\,bis)\qquad \begin{cases} x_i = \varphi_i(t) + Be^{\alpha t}\omega_i^{(1)}(t) + B^2 e^{2\alpha t}\omega_i^{(2)}(t) + \ldots, \\ y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + Be^{\alpha t}\omega_{i+2}^{(1)}(t) + B^2 e^{2\alpha t}\omega_{i+2}^{(2)}(t) + \ldots. \end{cases}$$

B est une nouvelle constante d'intégration, α est encore l'exposant caractéristique; les fonctions ω sont de même forme que les fonctions θ qui entrent dans les équations (3). On obtient d'ailleurs les fonctions ω si dans les fonctions θ on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Les séries (3 *bis*) convergent pour les valeurs de t *négatives* et suffisamment grandes. Quand t tend vers $-\infty$, les solutions qu'elles représentent se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique.

Solutions doublement asymptotiques.

Il existe une infinité de solutions qui appartiennent à la fois aux deux séries et qui sont, par conséquent, représentées par les équations (3 *bis*) pour les valeurs de t négatives et très grandes, et par les équations (3) pour les valeurs de t positives et très grandes.

L'orbite, d'abord très peu différente de celle qui correspond à une solution périodique, s'en éloigne peu à peu, et après s'en être écartée beaucoup finit par s'en rapprocher asymptotiquement.

L'existence des solutions doublement asymptotiques est un point d'une démonstration très délicate et qui m'a donné beaucoup de peine. En effet, les séries (3 *bis*) ne convergent que pour les valeurs de t négatives et très grandes, les séries (3) pour les valeurs de t positives et très grandes. Il y a généralement un intervalle où aucune des deux séries ne converge.

Divergence des séries.

Les considérations qui précèdent peuvent permettre d'établir que les séries habituelles de la Mécanique céleste sont divergentes; ce n'est pas qu'elles ne

puissent néanmoins être utilement employées; en effet, il peut arriver que les termes d'une série décroissent d'abord très rapidement pour croître ensuite indéfiniment, et par conséquent que cette série, quoique divergente, puisse servir à représenter une fonction avec une approximation très grande, mais non indéfinie. Tel est le cas de la série célèbre de Stirling et de quelques développements usités en Physique mathématique. Tel est aussi celui des séries de la Mécanique céleste, et l'approximation qu'elles fournissent est très suffisante pour les besoins de la pratique. Ce que je veux dire de leur divergence n'est donc pas une raison pour en proscrire l'usage.

Les séries de M. Lindstedt ne peuvent pas converger uniformément pour toutes les valeurs de la constante d'intégration qui y entre; on démontre, en effet, que, s'il en était ainsi, il n'y aurait pas de solutions asymptotiques.

Je prendrai comme second exemple certaines séries dérivées des séries (3) et (3 *bis*). La série (3) converge; mais nous avons vu que ses coefficients peuvent eux-mêmes se développer en séries convergentes dont les termes sont rationnels en $\sqrt{\mu}$; quand on a fait ce développement, la série (3) reste encore convergente.

Supposons maintenant que l'on développe ces fonctions rationnelles de $\sqrt{\mu}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, ce développement est possible pour chacune d'elles. Mais si l'on ordonne ensuite la série (3) suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, la série ainsi obtenue devient divergente; on démontre, en effet, que si elle convergeait, toute solution asymptotique serait doublement asymptotique, ce qui n'a pas lieu.

Le développement auquel on parvient de la sorte et qui, bien que divergent, peut rendre des services au même titre que ceux de M. Lindstedt, se met sous forme élégante si l'on élimine t et A entre les quatre équations (3) par les règles ordinaires du calcul. On trouve, en effet, que x_1 et x_2 s'expriment en séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{y_1}{x}$ et $\frac{y_2}{x}$.

Non-existence des intégrales uniformes.

Les équations (1) admettent une intégrale qui s'écrit

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C;$$

c'est l'intégrale des forces vives; le premier membre F est uniforme par rapport

à x_1, x_2, y_1 et y_2, périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2, développable suivant les puissances de μ.

Je dis qu'il n'y a pas d'autre intégrale de la même forme; c'est-à-dire que les équations (1) ne peuvent admettre une intégrale

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C$$

distincte de la première et où Φ soit périodique en y_1 et y_2, développable suivant les puissances de μ, et uniforme pour toutes les valeurs réelles de y_1 et y_2, pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les valeurs de x_1 et de x_2 comprises dans un certain domaine.

On démontre, en effet, que, s'il en était ainsi, les séries de M. Lindstedt convergeraient. Ce résultat est d'ailleurs susceptible d'être généralisé de diverses manières.

Formes des orbites.

On peut se proposer de dessiner les orbites correspondant aux diverses solutions particulières dont je viens de parler, et j'ai l'intention de revenir sur ce point dans un autre article. Pour cela, le mieux est de considérer deux axes mobiles, à savoir : la droite AB et une perpendiculaire à AB menée par le centre de gravité du système, et de chercher à dessiner la trajectoire relative du corps C par rapport à ces axes mobiles.

Dans le cas des solutions périodiques, cette orbite relative est une courbe fermée; dans le cas des solutions asymptotiques, c'est une courbe en spirale se rapprochant asymptotiquement d'une courbe fermée. Il convient d'ajouter que les diverses spires se recoupent mutuellement.

Considérons une orbite fermée correspondant à une solution périodique et les deux séries d'orbites asymptotiques afférentes à cette même solution. Par un point M du plan passeront, en général, une ou plusieurs orbites asymptotiques de la première série, ainsi qu'une ou plusieurs orbites de la deuxième série. Soit T_1 une orbite de la première série passant par M; soit β l'angle sous lequel elle coupe une orbite T_2 de la deuxième série passant par M. Si β est nul, les deux orbites se confondent en une seule et deviennent ainsi doublement asymptotiques; il y a une infinité de points pour lesquels il en est ainsi.

Mais, en général, β n'est pas nul; cependant, si la masse μ est regardée comme un infiniment petit du premier ordre, on démontre que, parmi les angles β (sous lesquels T_1 coupe les diverses orbites asymptotiques de la

deuxième série qui passent par M), il y en a un qui est infiniment petit d'ordre infini; je veux dire qu'il est du même ordre de grandeur que l'exponentielle $e^{-\frac{a}{\sqrt{\mu}}}$, a étant une constante positive.

Il est encore un autre point sur lequel je désire attirer l'attention.

Les séries (3) ne changent pas, si j'y change A en $Ae^{\alpha+T}$ et t en $t+T$; si donc on change A en $Ae^{\alpha T}$, l'orbite asymptotique correspondante ne change pas; la seule différence est que le mobile C passe en un même point de cette orbite à des époques différentes.

Ainsi les valeurs suivantes de la constante d'intégration A, $Ae^{\pm\alpha T}$, $Ae^{\pm 2\alpha T}$, $Ae^{\pm 3\alpha T}$, ... correspondent à une seule et même orbite asymptotique.

Il est donc toujours permis, s'il ne s'agit que de définir cette orbite, de choisir la constante A entre 1 et $e^{\alpha T}$.

Cela posé, considérons n orbites doublement asymptotiques quelconques; pour des valeurs suffisamment grandes de t, les équations de ces orbites pourront se mettre sous la forme (3). A ces n orbites correspondront n valeurs de la constante A que j'appelle A_1, A_2, ..., A_n et que je puis toujours supposer comprises entre 1 et $e^{\alpha T}$.

Pour des valeurs de t négatives et très grandes, les équations de ces mêmes orbites (en changeant au besoin l'origine du temps) pourront se mettre sous la forme (3 *bis*). A ces n orbites correspondront alors n valeurs de la constante B que j'appellerai B_1, B_2, ..., B_n et que je pourrai toujours supposer comprises entre 1 et $e^{\alpha T}$.

Et bien, ce qu'il importe de remarquer et ce qui met bien en évidence la complication du problème des trois corps, c'est que si A_1, A_2, ..., A_n sont rangés par ordre de grandeur croissante, les constantes, B_1, B_2, ..., B_n seront, en général, rangées dans un ordre tout différent.

Invariants intégraux.

Une notion nouvelle, celle des invariants intégraux, m'a été très utile pour démontrer les résultats qui précèdent. Je me bornerai ici à énoncer quelques propositions saillantes relatives à cette théorie.

Considérons le problème des trois corps; pour définir la situation du système, nous nous donnerons dix-huit variables : ce seront d'abord les trois coordonnées x_1, x_2, x_3 du premier corps, les projections y_1, y_2, y_3 de la

quantité de mouvement de ce premier corps sur les trois axes. Ensuite x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6 seront les quantités analogues pour le deuxième corps, x_7, x_8, x_9, y_7, y_8, y_9 les quantités analogues pour le troisième corps.

Nous envisagerons alors neuf points dans un plan que j'appellerai M_1, M_2, ..., M_9 et dont les coordonnées seront respectivement (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_9, y_9). Cela posé, considérons une solution des équations différentielles du mouvement dépendant de deux constantes arbitraires α et β. Alors les x_i et les y_i seront des fonctions du temps t, de α et de β. Soit μ le point dont les coordonnées sont α et β; si le point μ reste intérieur à une certaine aire σ, les points M_1, M_2, ..., M_9 resteront intérieurs à certaines aires S_1, S_2, ..., S_9. Ces neuf aires se déformeront et se déplaceront, puisque les coordonnées du point M_i dépendent non seulement de α et β, mais encore du temps t; mais *la somme algébrique de ces neuf aires demeurera constante.* Il est à peine utile de faire observer que certaines de ces aires pourront avoir des parties positives et des parties négatives; c'est ainsi que, au point de vue analytique, l'aire totale de la lemniscate est nulle parce qu'une des boucles doit être regardée comme positive et l'autre comme négative.

Supposons maintenant que l'on envisage une solution ne contenant plus qu'une seule constante arbitraire α. Si cette constante α varie depuis α_0 jusqu'à α_1, les neuf points M_1, M_2, ..., M_9 vont décrire certains arcs λ_1, λ_2, ..., λ_9 qui se déplaceront et se déformeront avec le temps, puisque les coordonnées de M_i dépendent non seulement de α, mais encore de t. Soit U_i l'intégrale $\int (2x_i\,dy_i + y_i\,dx_i)$ prise le long de l'arc λ_i. U_i sera une fonction du temps puisque l'arc λ_i se déplace. Soit c_0 la valeur de la constante des forces vives correspondant à $\alpha = \alpha_0$, et c_1 la valeur de la constante correspondant à $\alpha = \alpha_1$, on aura

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_9 + 3(c_1 - c_0)t = K,$$

K étant une constante indépendante du temps.

Stabilité.

Revenons au cas particulier dont nous nous sommes occupés presque exclusivement dans ce travail. Dans ce cas, MM. Hill et Bohlin ont démontré que le rayon vecteur CA ne peut croître au delà de toute limite; mais il reste pour établir complètement la stabilité un dernier point à démontrer. Il faut faire

voir que les trois corps se retrouveront une infinité de fois aussi près qu'on voudra de leur position initiale.

L'existence même des solutions asymptotiques montre suffisamment qu'il existe une infinité de solutions particulières qui ne satisfont pas à cette condition. Mais, d'autre part, j'ai démontré, par la méthode des invariants intégraux, qu'il y en a aussi une infinité qui y satisfont. On peut donc, à ce point de vue, dire qu'il y a une infinité de solutions particulières instables, et une infinité de solutions particulières stables.

Mais il y a plus, on peut dire que les premières sont l'exception et que les secondes sont la règle, au même titre que les nombres rationnels sont l'exception et que les nombres incommensurables sont la règle. Je démontre, en effet, que la probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable, que cette probabilité, dis-je, est nulle. Ce mot n'a par lui-même aucun sens : j'en donne dans mon Mémoire une définition précise que je ne crois pas utile de reproduire ici ; mais je dois ajouter que le même résultat subsisterait, quelle que soit la définition adoptée, pourvu qu'il n'entre dans cette définition que des fonctions continues.

SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE M. LINDSTEDT AU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 114, p. 1305-1309 (7 juin 1892).

Dans une Communication que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie, il y a quelques années (*C. R. Acad. Sc.*, t. 108, p. 21) [1], j'ai exposé la méthode de M. Lindstedt sous une forme nouvelle, fondée sur les principes des *Vorlesungen über Dynamik*.

Le but de la présente Note est de montrer d'abord que cette méthode peut être appliquée à l'étude des variations séculaires des éléments des planètes, mais qu'elle ne peut, sans modification, s'étendre au problème des trois corps, et quelles sont les modifications à faire pour que cela devienne possible.

Voici les notations que j'adopterai; je rapporterai la première planète au Soleil, et la seconde au centre de gravité du système formé par le Soleil et la première planète. Je désigne par μ, β et β' trois coefficients dépendant des masses : le premier très petit, les deux autres finis.

J'appelle a le demi-grand axe de la première planète, $\sin\varphi$ l'excentricité, i l'inclinaison, λ la longitude moyenne, θ la longitude du nœud, ϖ celle du périhélie, et je pose $\Lambda = \beta\sqrt{a}$:

$$\xi = 2\sqrt{\Lambda}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varpi, \qquad \eta = -2\sqrt{\Lambda}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varpi,$$

$$p = 2\sqrt{\Lambda\cos\varphi}\sin\frac{i}{2}\cos\theta, \qquad q = -2\sqrt{\Lambda\cos\varphi}\sin\frac{i}{2}\sin\theta.$$

(1) *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 551.

Je désignerai les éléments correspondants de la seconde planète par les mêmes lettres accentuées, de sorte que nos douze variables seront les suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} \Lambda, & \Lambda', & \xi, & \xi', & p, & p', \\ \lambda, & \lambda', & \eta, & \eta', & q, & q'. \end{cases}$$

J'appelle μF l'énergie totale du système. F sera développable suivant les puissances de μ, de sorte que j'écrirai

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

F_0 ne dépendra que de Λ et Λ'; F_1, F_2, ... seront développables suivant les puissances des variables ξ, η, p et q et suivant les cosinus et sinus des multiples de λ et de λ'. Je désigne par R la valeur moyenne de F_1 considérée comme fonction périodique de λ et λ'.

Si alors je désigne par x_i une quelconque des variables de la première ligne du tableau (1), et par y_i la variable correspondante de la deuxième ligne, les équations du mouvement pourront s'écrire

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Les fondateurs de la Mécanique céleste ont été conduits à envisager les équations suivantes :

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \mu\frac{dR}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\mu\frac{dR}{dx_i}.$$

Dans ces équations, nous ne désignons par x_i et y_i que les variables des quatre dernières colonnes du tableau (1). R ne dépend ni de λ, ni de λ' et nous regardons momentanément Λ et Λ' comme des constantes. L'importance des équations (3) provient de ce qu'elles nous font connaître les plus considérables des variations que peuvent subir ξ, η, p, q, ..., de ce qu'elles peuvent, en d'autres termes, nous fournir une première approximation pour le calcul des variations séculaires de ces quantités.

Pour rendre la méthode de la Communication citée applicable aux équations (3), il faut profiter de la petitesse des quantités ξ, η, ...; soit ε un coefficient très petit et posons

$$\xi = \varepsilon\xi_1, \qquad \eta = \varepsilon\eta_1, \qquad p = \varepsilon p_1, \qquad q = \varepsilon q_1, \qquad \xi' = \varepsilon\xi'_1, \qquad \ldots.$$

R devient développable suivant les puissances croissantes de ε^2 et nous pouvons écrire

$$R = R_0 + \varepsilon^2 R_2 + \varepsilon^4 R_4 + \ldots$$

et poser

$$R' = \frac{\mu}{\varepsilon^2}(R - R_0) = \mu R_2 + \varepsilon^2 \mu R_4 + \ldots.$$

Prenons ensuite de nouvelles variables ρ_i, ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) définies de la façon suivante : ξ, η, p, q, ... sont des fonctions linéaires convenablement choisies des $\sqrt{\rho_i}\cos\omega_i$ et des $\sqrt{\rho_i}\sin\omega_i$; le choix doit être fait de telle façon que R_2 ne dépende plus que des ρ_i et non des ω_i. Les équations (3) deviennent alors

$$(3\ bis) \qquad \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{dR'}{d\omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{dt} = -\frac{dR'}{d\rho_i},$$

et la méthode de la Communication citée leur est directement applicable, puisque R' est développable suivant les puissances de ε^2 et que R_2 ne dépend pas des ω_i. D'où cette conséquence : les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons calculées par les équations (3) peuvent se mettre sous la forme d'une somme de termes périodiques. Lagrange et Laplace avaient démontré ce résultat en négligeant les cubes des excentricités; Le Verrier et Cellérier en en négligeant les cinquièmes puissances. On voit qu'il est vrai, quelque loin que l'on pousse l'approximation.

L'intégration des équations (3) mises sous la forme (3 *bis*) revient à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(4) \qquad R\left(\frac{dT}{d\omega_i}, \omega_i\right) = \text{const.}$$

Je suppose que R ait été exprimé en fonction de ρ_i et de ω_i et que ρ_i y ait été ensuite remplacé par la dérivée correspondante $\frac{dT}{d\omega_i}$ de la fonction inconnue T. La méthode de la Communication citée nous fournit une intégrale de l'équation (4) dépendant de quatre constantes arbitraires V_i. Si l'on pose alors

$$(5) \qquad \rho_i = \frac{dT}{d\omega_i}, \qquad v_i = \frac{dT}{dV_i},$$

on peut considérer les équations (5) comme définissant un changement de variables, les variables nouvelles étant les V_i et les v_i et les anciennes les ρ_i et les ω_i. Le théorème de Jacobi nous apprend alors qu'on obtiendra les intégrales des équations (3) en égalant les V_i et les $\frac{dv_i}{dt}$ à des constantes.

Passons maintenant au problème des trois corps proprement dit, c'est-à-dire aux équations (2). Pour que la méthode de M. Lindstedt telle que je l'ai

exposée fût applicable à ces équations, il faudrait que F_0 dépendît à la fois *de tous les* x_i; elle le serait encore sans modification sensible bien que F_0 ne dépende que de Λ et Λ' et non de tous les x_i, si F était périodique par rapport aux y_i et si R ne dépendait pas des y_i.

Ces conditions ne sont pas remplies d'elles-mêmes, mais on peut arriver à y satisfaire par un changement de variables convenable.

Reprenons les variables V_i et v_i définies par les équations (5). Soient ensuite λ_2 et λ'_2 deux variables nouvelles telles que

$$\lambda_2 = \lambda + \psi, \qquad \lambda'_2 = \lambda' + \psi',$$

ψ et ψ' étant deux fonctions convenablement choisies de Λ, Λ', V_i, v_i. Prenons alors pour variables nouvelles

$$(6) \qquad \begin{cases} \Lambda, & \Lambda', & V_i, \\ \lambda_2, & \lambda'_2, & v_i. \end{cases}$$

Les équations conserveront la forme (2), à la condition que x_i désigne une variable quelconque de la première ligne du tableau (6) et y_i la variable correspondante de la seconde ligne. F_0 ne dépend encore que de Λ et Λ', mais F est périodique par rapport aux y_i et R ne dépend pas des y_i. La méthode est donc applicable.

Une difficulté subsiste encore cependant. Cette méthode nous permet de développer nos inconnues suivant les puissances de μ; mais les coefficients de ce développement contiennent des termes qui ont au dénominateur certaines puissances des excentricités; la méthode pourrait donc devenir illusoire si les excentricités étaient très petites, comparables par exemple aux masses ou à leurs racines carrées.

L'origine de cette difficulté est la suivante. J'ai dit que F est développable suivant les puissances des ξ, η, p, q, ...; de plus F contient des termes du premier degré par rapport à ces variables. Si ces termes du premier degré n'existaient pas, on n'aurait pas à craindre de voir apparaître des puissances négatives des excentricités.

J'ai donc été conduit à faire dans certains cas un changement de variables préalable. Mes variables nouvelles s'appelleront

$$(7) \qquad \begin{cases} \Lambda_1, & \Lambda'_1, & \xi_1, & \xi'_1, & p, & p', \\ \lambda_1, & \lambda'_1, & \eta_1, & \eta'_1, & q, & q', \end{cases}$$

et je choisirai ces variables de telle sorte :

1° que les équations conservent la forme (2);

2° que pour les solutions périodiques que j'appelle de la première sorte, et que j'ai étudiées dans mon Ouvrage intitulé *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, on ait

$$\xi_1 = \xi'_1 = \eta_1 = \eta'_1 = 0.$$

Alors l'expression de F avec les variables (7) a la même forme qu'avec les variables (1), mais avec cette différence que F ne contient plus de termes du premier degré par rapport aux ξ_1, η_1, p, q, ... La difficulté a donc disparu.

Inutile d'ajouter que, comme dans la méthode ordinaire de M. Lindstedt, les séries ne sont pas convergentes, mais seulement semi-convergentes au sens de Stirling, ce qui limite les conditions dans lesquelles on peut s'en servir. Je n'insisterai pas sur certains procédés de détail qui permettent d'éviter quelques-uns de ces changements de variables, ni sur les avantages que présente la méthode exposée dans cette Note sur celle que M. Lindstedt avait proposée, il y a longtemps déjà, pour un problème analogue, dans le tome 97 des *Comptes rendus*. J'avais déjà, il y a quelques années, développé quelques-unes des considérations qui précèdent dans mon enseignement à la Sorbonne.

SUR

UNE FORME NOUVELLE DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 1031-1035 (14 décembre 1896).

Soient trois corps A, B, C s'attirant d'après la loi de Newton; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées de A; x_4, x_5, x_6 celles de B; x_7, x_8, x_9 celles de C; soit $m_1 = m_2 = m_3$ la masse de A, $m_4 = m_5 = m_6$ celle de B, $m_7 = m_8 = m_9$ celle de C; soit

$$U = \frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}, \qquad F = \sum \frac{y_i^2}{2 m_i} - U.$$

On sait que les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}$$

ou encore sous la forme canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

On ne restreint pas la généralité en supposant le centre de gravité fixe, et l'on peut profiter de cette circonstance pour abaisser le nombre des degrés de liberté. Cette réduction peut s'opérer de plusieurs manières. Voici les deux manières qui ont été proposées :

1° On peut faire le changement de variables que j'appellerai (γ) et qui est le plus usuel. Il consiste à poser

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_2 = x_2 - x_8, \qquad x'_3 = x_3 - x_9,$$
$$x'_4 = x_4 - x_7, \qquad x'_5 = x_5 - x_8, \qquad x'_6 = x_6 - x_9,$$
$$y'_i = m_i \frac{dx'_i}{dt}.$$

Les équations ne conservent plus alors la forme canonique; mais elles deviennent

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF_1}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF_2}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF_2}{dx_i} \qquad (i = 4, 5, 6),$$

où

$$F_1 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - \frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_1(m_4 + m_7)}{AC} + \frac{m_1 m_4}{(BC)^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6),$$
$$F_2 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - \frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_4(m_4 + m_7)}{BC} + \frac{m_1 m_4}{(AC)^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

2° On peut faire le changement de variables que j'appellerai (β), et qui consiste à poser (en appelant ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées du centre de gravité des deux corps A et C),

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_2 = x_2 - x_8, \qquad x'_3 = x_3 - x_9,$$
$$x'_4 = x_4 - \xi_1, \qquad x'_5 = x_5 - \xi_2, \qquad x'_6 = x_6 - \xi_3,$$
$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt},$$
$$m'_1 = m'_2 = m'_3 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = m'_5 = m'_6 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}.$$

Les équations conservent alors leur forme canonique et s'écrivent

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}, \qquad \text{où} \quad F = \sum \frac{y_i'^2}{2m'_i} - U.$$

La forme des intégrales des aires n'est pas non plus altérée.

Le changement (β) paraît donc très avantageux, mais cependant il n'a pas été adopté jusqu'ici dans la pratique, sans doute parce que la forme de la fonction perturbatrice y est plus compliquée.

3° C'est pourquoi je crois devoir appeler l'attention sur un troisième changement de variables que j'appellerai (α). Posons

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_2 = x_2 - x_8, \qquad x'_3 = x_3 - x_9,$$
$$x'_4 = x_4 - x_7, \qquad x'_5 = x_5 - x_8, \qquad x'_6 = x_6 - x_9,$$
$$y'_i = m_i \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Avec ce changement de variables :

1° la forme canonique des équations ne sera pas altérée;

2° la forme des intégrales des aires ne sera pas non plus altérée;

3° la fonction F deviendra

$$F = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i'} - U + \frac{y'_1 y'_4 + y'_2 y'_5 + y'_3 y'_6}{m_7},$$

en posant, pour abréger,

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}.$$

La forme de la fonction perturbatrice est donc tout aussi simple que dans le cas du changement de variables (γ).

Pour mieux nous en rendre compte, exprimons tout en fonction des éléments osculateurs. Soient

$$x_1 = \varphi_1(L, G, \Theta, l, g, \theta), \qquad x_2 = \varphi_2(L, G, \Theta, l, g, \theta), \qquad x_3 = \varphi_3(L, G, \Theta, l, g, \theta)$$

les équations du mouvement elliptique, où x_1, x_2, x_3 désignent les coordonnées rectangulaires du point mobile, l l'anomalie moyenne, θ la longitude du nœud, $g + \theta$ celle du périhélie, et où, a, e, i désignant le grand axe, l'excentricité et l'inclinaison, on a

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \qquad \Theta = G \cos i.$$

Posons alors (en appelant β et β' deux coefficients)

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \varphi_1(L), & x'_2 &= \varphi_2(L), & x'_3 &= \varphi_3(L),\\
y'_1 &= \frac{\beta\, d\varphi_1}{L^3\, dl}, & y'_2 &= \frac{\beta\, d\varphi_2}{L^3\, dl}, & y'_3 &= \frac{\beta\, d\varphi_3}{L^3\, dl},\\
x'_4 &= \varphi_1(L'), & x'_5 &= \varphi_2(L'), & x'_6 &= \varphi_3(L'),\\
y'_4 &= \frac{\beta'\, d\varphi_1}{L'^3\, dl'}, & y'_5 &= \frac{\beta'\, d\varphi_2}{L'^3\, dl'}, & y'_6 &= \frac{\beta'\, d\varphi_3}{L'^3\, dl'}.
\end{aligned}$$

Dans les équations de la première ligne, les fonctions φ dépendent des six variables L, G, Θ, l, g, θ; dans celles de la seconde ligne, elles dépendent de six variables analogues L', G', Θ', l', g', θ'. Ces équations définissent ces douze variables que l'on peut appeler les éléments osculateurs et qui sont très peu différents sans être exactement les mêmes avec les trois changements de variables (α), (β) et (γ).

La forme canonique des équations n'est pas altérée par ce nouveau changement de variables. On a d'abord

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dF}{\beta\, dL}, \qquad \frac{dL}{dt} = -\frac{dF}{\beta\, dl},$$

ainsi que deux équations analogues que l'on obtient en changeant L et l en G et g, et deux autres qu'on obtient en changeant L et l en Θ et θ.

Avec le changement de variables (γ), il faut, dans ces six équations, changer en F_1.

On a ensuite

$$\frac{dl'}{dt} = -\frac{dF}{\beta' dL'}, \qquad \frac{dL'}{dt} = -\frac{dF}{\beta' dl},$$

ainsi que deux équations analogues que l'on obtient en changeant L' et l' en G' et g', et deux autres que l'on obtient en changeant L' et l' en Θ' et θ'.

Dans le cas où l'on adopte le changement de variables (γ), il faut dans ces six équations remplacer F par F_2.

Il convient de prendre : avec le changement (α) :

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \qquad \beta' = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}},$$

avec le changement (β) :

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \qquad \beta' = m_4 \sqrt{\frac{m_7 (m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}},$$

avec le changement (γ) :

$$\beta = m_1 \sqrt{m_1 + m_7}, \qquad \beta' = m_4 \sqrt{m_4 + m_7}.$$

Il est aisé alors de comparer la forme des différentes fonctions perturbatrices. Pour cela, je poserai, pour abréger,

$$x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6 = \psi.$$

et je supposerai ψ exprimé en fonction des douze éléments osculateurs.

La fonction perturbatrice se composera alors d'une partie principale $-\frac{m_1 m_4}{AB}$, qui sera la même avec les deux changements (α) et (γ), et d'un terme complémentaire qui sera $\frac{\beta\beta'}{m_7 L^3 L'^3} \frac{d^2\psi}{dl\, dl'}$ avec le changement (α), $\frac{m_1 m_4}{L'^6} \frac{d^2\psi}{dl'^2}$ pour F_1 avec le changement (γ), $\frac{m_1 m_4}{L^6} \frac{d^2\psi}{dl^2}$ pour F_2 avec le changement (γ).

On voit que ces trois termes complémentaires peuvent se déduire facilement de l'un d'entre eux.

SUR

UNE FORME NOUVELLE DES ÉQUATIONS

DU PROBLÈME DES TROIS CORPS [1]

Bulletin Astronomique, t. 14, p. 53-67 (février 1897).

Soient A, B, C les trois corps; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées du point A; x_4, x_5, x_6 celles du point B; x_7 x_8, x_9 celles du point C.

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment la masse du corps A par m_1, m_2, m_3; et de même la masse du corps B par m_4, m_5 ou m_6; et celle du corps C par m_7, m_8 ou m_9.

Je poserai

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}$$

de telle façon que par exemple y_1, y_2 et y_3 soient les composantes de la quantité de mouvement du corps A.

La force vive T sera alors

$$T = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum \frac{y_i^2}{2m_i}.$$

D'autre part, si l'on choisit les unités de telle façon que la constante de Gauss soit égale à 1, la fonction des forces U s'écrira

$$U = \frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}.$$

[1] Ce Mémoire est reproduit dans le Tome 21 des *Acta Mathematica*, p. 83-97.

Si nous posons $F = T - U$, la fonction F dépendra des x et des y et les équations du mouvement pourront se mettre sous la forme canonique

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9).$$

Supposons maintenant que l'on change de variables et soient x'_i, y'_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$) les dix-huit variables nouvelles. Quelle est la condition pour qu'après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique ?

La condition nécessaire et suffisante est que $\Sigma x'_i\, dy'_i - \Sigma x_i\, dy_i$ *soit une différentielle exacte* (¹).

Si cette condition est remplie, les équations deviendront

$$(1\ bis) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}.$$

Examinons en particulier le cas où les x'_i sont des fonctions linéaires des x_i et les y'_i des fonctions linéaires des y_i.

La condition précédente peut alors s'énoncer d'une autre manière : la condition nécessaire et suffisante pour que la forme canonique des équations ne soit pas altérée est qu'on ait identiquement

$$(2) \qquad \Sigma y'_i x'_i = \Sigma y_i x_i.$$

Faisons une hypothèse plus particulière encore et supposons :

1° Que

x'_1,	x'_4,	x'_7	dépendent seulement de	x_1,	x_4,	x_7
x'_2,	x'_5,	x'_8	»	x_2,	x_5,	x_8
x'_3,	x'_6,	x'_9	»	x_3,	x_6,	x_9
y'_1,	y'_4,	y'_7	»	y_1,	y_4,	y_7
y'_2,	y'_5,	y'_8	»	y_2,	y_5,	y_8
y'_3,	y'_6,	y'_9	»	y_3,	y_6,	y_9

2° Que les relations linéaires qui lient x'_2, x'_5, x'_8 à x_2, x_5, x_8, et celles qui lient x'_3, x'_6, x'_9 à x_3, x_6, x_9 soient les mêmes que celles qui lient x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7 ;

3° Que de même les relations linéaires qui lient y'_2, y'_5, y'_8 à y_2, y_5, y_8 et celles qui lient y'_3, y'_6, y'_9 à y_3, y_6, y_9 soient les mêmes que celles qui lient y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7.

(¹) *Voir* aux Notes, *Principes de Mécanique analytique*.

Cette troisième hypothèse est d'ailleurs une conséquence nécessaire des deux premières et de l'identité (2).

Dans ces conditions, l'identité (2) peut être remplacée par la suivante :

$$(2\ bis)\qquad y'_1x'_1+y'_4x'_4+y'_7x'_7=y_1x_1+y_4x_4+y_7x_7.$$

Si en effet l'identité (2 *bis*) a lieu, on en déduira une seconde en augmentant tous les indices d'une unité et une troisième en augmentant encore une fois tous les indices d'une unité. La somme de ces trois identités ne sera autre chose que l'identité (2).

Mais ce n'est pas tout : nous avons supposé que x'_3, x'_6, x'_9 sont liés à x_3, x_6, x_9, par les mêmes relations que x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7, et y'_2, y'_5, y'_8 liés à y_2, y_5, y_8, par les mêmes relations que y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7.

L'identité (2 *bis*) subsistera donc quand on y changera

$$x_1,\quad x_4,\quad x_7;\qquad x'_1,\quad x'_4,\quad x'_7;\qquad y_1,\quad y_4,\quad y_7;\qquad y'_1,\quad y'_4,\quad y'_7$$

en

$$x_3,\quad x_6,\quad x_9;\qquad x'_3,\quad x'_6,\quad x'_9;\qquad y_2,\quad y_5,\quad y_8;\qquad y'_2,\quad y'_5,\quad y'_8.$$

On aura donc

$$y'_2x'_3+y'_5x'_6+y'_8x'_9=y_2x_3+y_5x_6+y_8x_9$$

et de même

$$y'_3x'_2+y'_6x'_5+y'_9x'_8=y_3x_2+y_6x_5+y_9x_8$$

et en retranchant

$$y'_2x'_3-y'_3x'_2+y'_5x'_6-y'_6x'_5+y'_8x'_9-y'_9x'_8=y_2x_3-y_3x_2+y_5x_6-y_6x_5+y_8x_9-y_9x_8.$$

Or le second membre n'est autre chose que le premier *moment de rotation* du système, qui doit être constant en vertu de l'équation des aires. On voit que l'expression de ce moment de rotation en fonction des x' et des y' a la même forme que son expression en fonction des x et des y.

La forme de l'équation des aires n'est donc pas altérée par notre changement de variables.

Premier exemple. — Nous satisferons à l'identité (2 *bis*) en faisant

$$y_1=y'_1,\qquad y_4=y'_4,\qquad x_7=x'_7,\qquad x_1-x_7=x'_1,\qquad x_4-x_7=x'_4,$$
$$y'_7=y_1+y_4+y_7.$$

Ce changement de variables, dont nous ferons un fréquent usage dans la suite et que nous appellerons *le changement* (α), a une signification géométrique, très simple.

Les variables nouvelles $x'_1, x'_2, \ldots, x'_6$ sont les coordonnées *relatives* des points A et B par rapport à des axes mobiles passant par le point C.

Les variables $\frac{y'_1}{m_1}, \frac{y'_2}{m_2}, \ldots, \frac{y'_6}{m_6}$ sont les composantes des vitesses *absolues* de ces deux points A et B.

Deuxième exemple. — Un deuxième exemple qui ne diffère pas essentiellement du premier est le suivant :

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_4 = x_4 - x_7, \qquad x'_7 = \frac{m_1 x_1 + m_4 x_4 + m_7 x_7}{m_1 + m_4 + m_7},$$

$$y'_1 = y_1 - \frac{m_1 y'_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \qquad y'_4 = y_4 - \frac{m_4 y'_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \qquad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

J'ai dit que ce second changement de variables ne diffère pas essentiellement du premier, voici pourquoi :

On ne restreint pas la généralité en supposant que le centre de gravité du système est fixe, c'est-à-dire que

$$y_1 + y_4 + y_7 = 0.$$

Si l'on fait cette hypothèse, les valeurs de x'_1, x'_4, y'_1, y'_4, y'_7 sont les mêmes dans les deux systèmes; les valeurs de x'_7 seules diffèrent; mais cette différence n'a rien d'essentiel. La fonction F dépend en effet des *différences* des coordonnées des trois points A, B, C. Elle dépend donc de $x'_1 = x_1 - x_7$ et de $x'_4 = x_4 - x_7$; *mais elle ne dépend pas de* x'_7,

Troisième exemple. — Avec le troisième exemple je retombe sur un changement de variables connu et que j'appellerai le *changement* (β).

Soient

$$m'_1 = m'_2 = m'_3, \qquad m'_4 = m'_5 = m'_6, \qquad m'_7 = m'_8 = m'_9,$$

trois coefficients constants analogues aux masses. On voit que, pour conserver la symétrie des notations, je représente indifféremment le premier de ces coefficients par m'_1, m'_2 ou m'_3 de même que j'avais représenté indifféremment la masse du corps A par m_1, m_2 ou m_3.

Soit

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}.$$

Dans ces conditions, les y'_i sont liés aux y_i par les mêmes relations que les

$m'_i x'_i$ aux $m_i x_i$ et les identités (2) et (2 *bis*) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\Sigma m'_i x'^2_i = \Sigma m_i x_i^2, \tag{3}$$

$$m'_1 x'^2_1 + m'_4 x'^2_4 + m'_7 x'^2_7 = m_1 x_1^2 + m_4 x_4^2 + m_7 x_7^2. \tag{3 bis}$$

L'identité (3) nous montre en outre que la force vive T, exprimée en fonction des nouvelles variables, s'écrira

$$T = \sum \frac{m'_i}{2}\left(\frac{dx'_i}{dt}\right)^2 = \sum \frac{y'^2_i}{2m'_i}.$$

Ainsi, non seulement avec le changement de variables (β) la forme canonique des équations n'est pas altérée de même que la forme des intégrales des aires, mais il en est de même de la forme de l'équation des forces vives.

Il reste à voir comment on pourra satisfaire à l'identité (3 *bis*). Cela peut se faire d'une infinité de manières. Voici celle qui est ordinairement usitée et que nous adopterons.

Soit G le centre de gravité des trois corps; D celui des deux corps A et C.

Nous appellerons x'_7, x'_8, x'_9 les coordonnées du point G; ξ, η, ζ celles du point D et nous poserons

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_4 = x_4 - \xi,$$

de telle sorte que x'_1, x'_2, x'_3 soient les coordonnées du point A par rapport à des axes mobiles passant par le point C; et x'_4, x'_5, x'_6 celles du point B par rapport à des axes mobiles passant par le point D.

Nous poserons d'ailleurs

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}, \qquad m'_7 = m_1 + m_4 + m_7.$$

Les propriétés du changement de variables (β) ainsi défini ont été étudiées par M. Radau (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. V).

Les deux changements de variables (α) et (β) ont d'ailleurs en commun la propriété de ne pas altérer la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires; de plus, ils permettent d'abaisser de 9 à 6 le nombre des degrés de liberté.

En effet, dans l'un et l'autre cas, la fonction F ne dépend que des y' et des six premières variables x'_i ; mais elle est indépendante de x'_7, x'_8, et x'_9. D'autre part, on ne restreint pas la généralité en supposant le centre de gravité fixe, ce qui entraîne les égalités

$$y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0.$$

Si l'on annule donc y'_7, y'_8, y'_9, F ne dépend plus que des douze variables x'_i et y'_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) et les équations (1 *bis*) peuvent s'écrire

$$(1\ ter)\qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

avec six degrés de liberté seulement.

Méthode usuelle.

Malgré les avantages que présente le changement (β) et bien qu'il soit connu depuis longtemps, on sait qu'il n'est pas le plus usité dans la pratique. On lui préfère d'ordinaire un changement de variables que j'appellerai *le changement* (γ) et dont les propriétés sont loin d'être aussi élégantes. On pose

$$m'_7 = m_1 + m_4 + m_7, \qquad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7 = m'_7 \frac{dx'_7}{dt}, \qquad m'_7 x'_7 = m_1 x_1 + m_4 x_4 + m_7 x_7,$$

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_2 = x_2 - x_8, \qquad x'_3 = x_3 - x_9,$$
$$x'_4 = x_4 - x_7, \qquad x'_5 = x_5 - x_8, \qquad x'_6 = x_6 - x_9,$$
$$m'_i = m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6), \qquad y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \ldots, 9).$$

On voit que x'_7, x'_8, x'_9 sont les coordonnées du centre de gravité G; que x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6 sont, comme dans le changement (α), les coordonnées *relatives* des points A et B par rapport à des axes mobiles passant par le point C. Mais les variables $\frac{y'_i}{m_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$), au lieu de représenter, comme dans le changement (α), les composantes des vitesses *absolues* des points A et B, représentent les composantes des vitesses *relatives* de ces deux points par rapport aux axes mobiles.

Il est aisé de voir que le changement (γ) ne satisfait pas aux identités (2), (2 *bis*), (3) et (3 *bis*); il ne conservera donc ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires.

Supposons cependant que le centre de gravité soit fixe; de telle sorte que $y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0$; on sait que les équations pourront se mettre sous la forme suivante, que l'on pourrait appeler *semi-canonique* :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx'_i}{dt} = \dfrac{dF_1}{dy'_i}, \qquad \dfrac{dy'_i}{dt} = -\dfrac{dF_1}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \\[2ex] \dfrac{dx'_i}{dt} = \dfrac{dF_2}{dy'_i}, \qquad \dfrac{dy'_i}{dt} = -\dfrac{dF_2}{dx'_i} \qquad (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

où

$$F_1 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{(BC)^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6),$$

$$F_2 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{(AC)^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

On voit en quoi les douze équations (4) diffèrent des équations canoniques.

La fonction qui joue le rôle de la fonction F n'est pas la même dans ces douze équations; elle est égale à F_1 dans six d'entre elles et à F_2 dans les six autres. C'est ce que l'on exprime quelquefois en disant que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour les deux planètes.

Élimination des nœuds.

Ce qu'on doit appeler l'*orbite osculatrice* du point A ou du point B n'est pas la même chose suivant que l'on adopte le changement (α) ou l'un des changements (β) ou (γ).

Dans l'hypothèse (α), le plan de l'orbite A passe par la droite AC et par la vitesse *absolue* du point A et le plan de l'orbite de B passe par la droite BC et par la vitesse *absolue* du point B (je suppose toujours le centre de gravité fixe).

Dans l'hypothèse (β), le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *relative* du point A par rapport à C; le plan de l'orbite de B passe par la droite BD et par la vitesse *relative* du point B par rapport à D.

Dans l'hypothèse (γ), le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *relative* du point A par rapport à C; le plan de l'orbite de B passe par la droite BC et par la vitesse *relative* du point B par rapport à C.

Nous avons vu que les changements (α) et (β) conservent la forme des intégrales des aires, mais il n'en est pas de même du changement (γ). Il en résulte une importante propriété des orbites.

Dans l'hypothèse (α) comme dans l'hypothèse (β), l'intersection des plans des deux orbites est dans le plan invariable, mais il n'en est plus de même dans l'hypothèse (γ).

Il semble que tous ces avantages auraient dû faire substituer le changement (β) au changement (γ). Si l'on ne l'a pas fait, c'est sans doute parce que le développement de la fonction perturbatrice est un peu plus compliqué dans l'hypothèse (β). C'est pour cette raison que je crois devoir attirer l'attention sur le

changement (α) qui n'a pas encore été proposé, *qui n'altère ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires et qui conduit à un développement de la fonction perturbatrice tout aussi simple que le changement* (β). C'est ce dont nous nous rendrons mieux compte en comparant dans les trois cas la forme du développement.

Mouvement elliptique.

Soit une masse mobile m attirée par une masse fixe M située à l'origine, son mouvement sera képlérien.

Soient a, e, i, l, $g+\theta$, et θ le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, l'anomalie moyenne, la longitude du périhélie et celle du nœud. Soit

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1-e^2)}, \qquad \Theta = G\cos i.$$

Nous pouvons exprimer les trois coordonnées x_1, x_2, x_3 de la masse mobile m en fonction des six variables, L, G, Θ, l, g, θ; écrivons donc

$$x_i = \varphi_i(L, G, \Theta, l, g, \theta) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Posons d'autre part, en appelant n le moyen mouvement,

$$y_i = m\frac{dx_i}{dt} = nm\frac{d\varphi_i}{dl} = \frac{m\sqrt{M}}{L^3}\frac{d\varphi_i}{dl}.$$

Les fonctions φ_i jouissent de deux propriétés qui nous seront utiles dans la suite; elles satisfont d'abord à l'intégrale des forces vives

$$\frac{\Sigma y^2}{2m} - \frac{mM}{\sqrt{\Sigma x^2}} = -\frac{mM}{2L^2}.$$

D'autre part, l'expression

$$\Sigma y\,dx - m\sqrt{M}(L\,dl + G\,dg + \Theta\,d\theta)$$

est une différentielle exacte.

Emploi des variables képlériennes.

Considérons les variables x'_i et y'_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) définies par l'un des trois changements (α), (β) ou (γ); nous allons faire un nouveau changement de variables en remplaçant ces douze variables par douze variables nouvelles

$$\begin{array}{cccccc} L, & G, & \Theta, & l, & g, & \theta, \\ L', & G', & \Theta', & l', & g', & \theta'. \end{array}$$

Ces douze variables nouvelles seront définies de la manière suivante; nous poserons

$$(5)\quad \begin{cases} x'_k = \varphi_k(\mathrm{L}, \mathrm{G}, \Theta, l, g, \theta), & \\ y'_k = \dfrac{\beta}{\mathrm{L}^3}\dfrac{d\varphi_k}{dl} & (k = 1, 2, 3), \\ x'_k = \varphi_{k-3}(\mathrm{L}', \mathrm{G}', \Theta', l', g', \theta') & \\ y'_k = \dfrac{\beta'}{\mathrm{L}'^3}\dfrac{d\varphi_{k-3}}{dl'} & (k = 4, 5, 6). \end{cases}$$

Les douze variables définies par ces équations (5) pourront s'appeler *variables képlériennes*, ou bien *éléments osculateurs des deux corps* A et B.

Il importe de remarquer que ces éléments osculateurs ne sont pas les mêmes selon qu'on adopte le changement (α) ou l'un des changements (β) ou (γ). J'ajouterai même que, si l'on adopte l'un de ces changements, le changement (α) par exemple, la définition des éléments osculateurs dépend encore du choix des deux constantes β et β', choix que nous ferons dans la suite de façon à simplifier les équations autant que possible.

Dans tous les cas, les expressions

$$y'_1\,dx'_1 + y'_2\,dx'_2 + y'_3\,dx'_3 - \beta\,(\mathrm{L}\,dl + \mathrm{G}\,dg + \Theta\,d\theta),$$
$$y'_4\,dx'_4 + y'_5\,dx'_5 + y'_6\,dx'_6 - \beta'(\mathrm{L}'\,dl' + \mathrm{G}'\,dg' + \Theta'\,d\theta')$$

sont des différentielles exactes, de sorte qu'après ce nouveau changement de variables, les équations du mouvement conserveront la forme canonique dans les hypothèses (α) et (β) et la forme semi-canonique dans l'hypothèse (γ).

Dans les hypothèses (α) et (β) les équations s'écriront

$$(6)\qquad \frac{dl}{dt} = \frac{d\mathrm{F}}{\beta\,dl}, \qquad \frac{d\mathrm{L}}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{\beta\,dl}, \qquad \frac{dl'}{dt} = \frac{d\mathrm{F}}{\beta'\,d\mathrm{L}'}, \qquad \frac{d\mathrm{L}'}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{\beta'\,dl'}.$$

Dans l'hypothèse (γ) elles s'écriront

$$(6\,bis)\qquad \frac{dl}{dt} = \frac{d\mathrm{F}_1}{\beta\,d\mathrm{L}}, \qquad \frac{d\mathrm{L}}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}_1}{\beta\,dl}, \qquad \frac{dl'}{dt} = \frac{d\mathrm{F}_2}{\beta'\,d\mathrm{L}'}, \qquad \frac{d\mathrm{L}'}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}_2}{\beta'\,dl'}.$$

Aux quatre équations (6), comme aux quatre équations (6 *bis*), il faut adjoindre celles qu'on en déduirait en changeant L, l, L', l' en G, g, G', g' et celles qu'on en déduirait en changeant L, l, L', l' en Θ, θ, Θ', θ'.

D'autre part, on aura

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3}{2} - \dfrac{\beta^2}{\sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}} = -\dfrac{\beta^2}{2\,\mathrm{L}^2}. \\ \dfrac{y'^2_4 + y'^2_5 + y'^2_6}{2} - \dfrac{\beta'^2}{\sqrt{x'^2_4 + x'^2_5 + x'^2_6}} = -\dfrac{\beta'^2}{2\,\mathrm{L}'^2}. \end{cases}$$

Forme de la fonction perturbatrice.

Nous distinguerons dans la fonction F quatre parties et nous poserons

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4.$$

Dans le cas (γ), où au lieu d'une seule fonction F on a à considérer les deux fonctions F_1 et F_2, nous poserons

$$F_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \qquad F_2 = f'_1 + f'_2 + f'_3 + f'_4.$$

Le premier terme f_1 (ou f'_1) sera le premier terme képlérien; f_2 sera le second terme képlérien, f_3 sera la partie principale de la fonction perturbatrice, f_4 sera la partie complémentaire de la fonction perturbatrice.

1° Dans l'hypothèse (α), nous aurons

$$F = T - U, \qquad T = S\left[\frac{y'^2_1}{2m_1} + \frac{y'^2_4}{2m_4} + \frac{(y'_1 + y'_4)^2}{2m_7}\right].$$

Le signe S représente une sommation s'étendant aux trois axes de coordonnées, et je puis écrire également

$$T = S\left(\frac{y'^2_1}{2m'_1} + \frac{y'^2_4}{2m'_4} + \frac{y'_1 y'_4}{m_7}\right);$$

en posant, pour abréger,

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}.$$

Je poserai

$$f_1 = S\frac{y'^2_1}{2m'_1} - \frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad f_2 = S\frac{y'^2_4}{2m'_4} - \frac{m_4 m_7}{BC},$$

$$f_3 = -\frac{m_1 m_4}{AB}, \qquad f_4 = S\frac{y'_1 y'_4}{m_7}.$$

Si nous prenons

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \qquad \beta' = \frac{m_4 m_7}{\sqrt{m_4 + m_7}},$$

les équations (7) donneront

$$f_1 = -\frac{m_1 m_7}{2L^2}, \qquad f_2 = -\frac{m_4 m_7}{2L'^2}.$$

2° Dans l'hypothèse (β), nous avons

$$T = S\left(\frac{y'^2_1}{2m'_1} + \frac{y'^2_4}{2m'_4}\right),$$

et nous poserons

$$f_1 = S\frac{y_1'^2}{2m_1'} - \frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad f_2 = S\frac{y_4'^2}{2m_4'} - \frac{m_4 m_7}{BD},$$

$$f_3 = -\frac{m_1 m_4}{AB}, \qquad f_4 = \frac{m_4 m_7}{BD} - \frac{m_4 m_7}{BC}.$$

En prenant

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \qquad \beta' = \sqrt{m_4' m_4 m_7} = m_4\sqrt{\frac{m_7(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}},$$

il viendra

$$f_1 = -\frac{m_1 m_7}{2L^2}, \qquad f_2 = -\frac{m_4 m_7}{2L'^2}.$$

3° Dans l'hypothèse (γ), nous poserons

$$f_1 = f_1' = S\frac{y_1'^2}{2m_1} - \frac{m_1(m_1 + m_7)}{AC},$$

$$f_2 = f_2' = S\frac{y_4'^2}{2m_4} - \frac{m_4(m_4 + m_7)}{BC},$$

$$f_3 = f_3' = -\frac{m_1 m_4}{AB}, \qquad f_4 = \frac{m_1 m_4}{(BC)^3} S x_1' x_4', \qquad f_4' = \frac{m_1 m_4}{(AC)^3} S x_1' x_4'.$$

En prenant

$$\beta = m_1\sqrt{m_1 + m_7}, \qquad \beta' = m_4\sqrt{m_4 + m_7},$$

il viendra

$$f_1 = f_1' = -\frac{m_1(m_1 + m_7)}{2L^2}, \qquad f_2 = f_2' = -\frac{m_4(m_4 + m_7)}{2L'^2}.$$

Première approximation. — Nous regarderons la masse m_7 comme finie et les masses m_1 et m_4 comme très petites du premier ordre. Dans ces conditions β et β' sont du premier ordre, f_1 et f_2 sont du premier ordre; f_3 et f_4 (comme f_4') sont du second ordre. On remarquera d'abord qu'aux quantités près du second ordre, les valeurs de $\frac{f_1}{\beta}, \frac{f_2}{\beta'}, \frac{f_3}{\beta}, \frac{f_3}{\beta'}$, sont les mêmes dans les trois hypothèses (α), (β) et (γ); à ce degré d'approximation, les équations différentielles auxquelles conduisent les trois hypothèses ne diffèrent que par les termes qui dépendent des dérivées de f_4,

Soit

$$\psi = S x_1' x_4' = x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6'.$$

La fonction ψ sera une fonction des douze variables képlériennes dont le développement est connu et d'ailleurs relativement aisé à obtenir.

Si l'on observe d'autre part que

$$y_1' = \frac{\beta}{L^3}\frac{dx_1'}{dl}, \qquad \frac{x_1'}{(AC)^3} = -\frac{1}{L^6}\frac{d^2x_1'}{dl^2}, \qquad y_4' = \frac{\beta'}{L'^3}\frac{dx_4'}{dl'}, \qquad \frac{x_4'}{(BC)^3} = -\frac{1}{L'^6}\frac{d^2x_4'}{dl'^2},$$

on aura donc :

dans l'hypothèse (α), $f_4 = -\frac{\beta\beta'}{m_7 L_3 L'_3}\frac{d^2\psi}{dl\,dl'}$ exactement;

dans l'hypothèse (β), $f_4 = -\frac{m_1 m_4}{L'^6}\frac{d^2\psi}{dl'^2}$ aux quantités près du troisième ordre;

dans l'hypothèse (γ), $f_4 = -\frac{m_1 m_4}{L'^6}\frac{d^2\psi}{dl'^2}$ et $f'_4 = -\frac{m_1 m_4}{L^6}\frac{d^2\psi}{dl^2}$, exactement.

Tous ces développements de f_4 et de f'_4 se déduisent immédiatement les uns des autres. A ce degré d'approximation, les trois méthodes sont équivalentes au point de vue de la facilité du développement de la fonction perturbatrice.

D'autre part, si l'on ne tient compte que des perturbations du premier ordre, on n'est pas gêné par le fait que les équations (4) ne sont pas canoniques. Donc, *à ce premier degré d'approximation, les trois méthodes se valent.*

Deuxième approximation. — Mais il n'en est plus de même si l'on veut tenir compte des perturbations du second ordre; la forme non canonique des équations (4) devient alors un grave inconvénient; d'un autre côté, le développement de la fonction perturbatrice auquel il n'y a rien à changer dans les hypothèses (α) et (γ) devient très compliqué dans l'hypothèse (β). Le changement de variables (α) que je propose prend alors un avantage marqué.

Il a toutefois son inconvénient propre, plus apparent que réel, au point de vue de l'osculation. Supposons que l'on veuille calculer la position de la planète A, par exemple, à l'aide des éléments osculateurs, à l'époque t. Si l'on définit ces éléments osculateurs comme on le fait dans les hypothèses (β) et (γ), les coordonnées ainsi calculées sont exactes à l'époque t, et pour l'époque $t+\varepsilon$, l'erreur est de l'ordre de ε^2. Si on les définit comme dans l'hypothèse (α), les coordonnées sont encore exactes pour l'époque t; mais pour l'époque $t+\varepsilon$, l'erreur est de l'ordre de ε. Il ne faut pas s'exagérer cependant l'importance de cet inconvénient. Si ε est comparable à la durée de révolution, l'erreur est du même ordre de grandeur que celle qui est due aux perturbations; elle est du même ordre dans tous les cas. Si ε est très petit par rapport à la durée de révolution, la correction est extrêmement faible et de plus très facile.

SUR LA MÉTHODE DE BRUNS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 1224-1228 (28 décembre 1896).

On sait que Bruns a démontré que le problème des trois corps n'admet pas d'autre intégrale algébrique que les intégrales connues (*Acta Mathematica*, t. 11). L'importance de cette méthode, qui est certainement applicable à d'autres équations analogues, m'engage à signaler certains cas d'exception au théorème de Bruns et à rectifier certaines défectuosités de sa démonstration qui, heureusement, ne lui enlèvent pas sa valeur.

Bruns considère des équations de la forme suivante :

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = y_i, \qquad \frac{dy_i}{dt} = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les A_i sont des fonctions rationnelles des x_i et de s, et s est liée aux x_i par une équation algébrique

$$(2) \qquad F(s, x_i) = 0.$$

Bruns montre d'abord que la recherche des intégrales algébriques du système (1) se ramène à celle des intégrales de la forme $\frac{\psi}{\psi'}$, où ψ et ψ' sont deux polynomes entiers par rapport aux y dont les coefficients sont rationnels par rapport aux x et à s. On peut toujours supposer (et cela bien que nous ne supposions pas les fonctions A_i homogènes) que ψ ne contient que des termes d'ordre pair par rapport aux y, ou seulement des termes d'ordre impair.

Cela posé, Bruns montre que, si ψ_0 est l'ensemble des termes de ψ dont le degré est le plus élevé par rapport aux y, on a identiquement

$$(3) \qquad \Sigma y_i \frac{d\psi_0}{dx_i} = \psi_0 \omega,$$

où $\omega = \Sigma \omega_i y_i$ est un polynome homogène du premier degré par rapport aux y dont les coefficients sont rationnels en x et s.

M. Bruns cherche à démontrer que

$$(1) \qquad \Sigma \omega_i dx_i$$

est une différentielle exacte.

Dans le cas où les coefficients de ψ_0 sont rationnels en x et indépendants de s, la démonstration ne laisse rien à désirer.

Mais il n'en est pas de même s'ils dépendent de s. Le raisonnement de Bruns (*loc. cit.*, p. 37 et suiv.) soulève des objections. Il fait d'abord

$$y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0:$$

le polynome ψ_0 se réduit à un polynome ψ_{02}, ne dépendant que de y_1 et y_2; écartant par un artifice parfaitement légitime le cas où ψ_{02} serait identiquement nul, il écrit

$$\psi_2 = c_0 y_1^q + c_1 y_1^{q-1} y_2 + \ldots + c_q y_2^q.$$

Il pose

$$\psi_{02} = c_0 \psi',$$

désigne par Ψ le produit des diverses valeurs de ψ' correspondant aux diverses racines de l'équation (2) en s, par H le dénominateur commun des coefficients de Ψ, de telle façon que $H\Psi$ soit un polynome entier en x et en y. Il montre que

$$y_1 \frac{dH\Psi}{dx_1} + y_2 \frac{dH\Psi}{dx_2} = 0.$$

De cette équation il veut conclure (p. 38) que

$$H\Psi = (y_1 x_2 - y_2 x_1)^{pq}.$$

C'est là que la démonstration est en défaut. Cela serait vrai si ψ_{02}, et par conséquent $H\Psi$, était homogène en x_1 et en x_2; mais il n'en est pas ainsi. Bruns suppose, il est vrai, que les A_i et F sont homogènes en x et s; cela lui permet de supposer que ψ_0 est homogène en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mais alors, ψ_{02} est homogène en $x_1, x_2 \ldots, x_n$ et non pas en x_1 et x_2 seulement. Pour le rendre homogène en x_1 et x_2, il faudrait non seulement annuler y_3, $y_4, \ldots, y_n$, mais encore $x_3, x_4, \ldots, x_n$; mais alors la relation d'intégrabilité $\frac{d\omega_2}{dx_1} = \frac{d\omega_1}{dx_2}$ ne serait plus démontrée qu'en supposant ces $n - 2$ variables nulles.

Au reste, il est aisé de former un exemple où le théorème de Bruns est en défaut. Supposons que l'équation (2) s'écrive

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Considérons le polynome

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 - (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2,$$

qui satisfait à l'identité (3); il se décomposera en deux facteurs,

$$(x_1 y_2 - y_1 x_2)(x_1^2 - x_3^2) + (x_2 x_3 + x_1 s)(x_1 y_3 - y_1 x_3)$$

et

$$\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^2} + \frac{x_2 x_3 - x_1 s}{x_1^2 (x_1^2 - x_3^2)}(x_1 y_3 - y_1 x_3).$$

Chacun de ces facteurs satisfera à l'identité (3) sans que l'expression (4) soit une différentielle exacte.

Il importe donc de rechercher les cas d'exception. Supposons d'abord $n = 2$ et regardons x_1 et x_2 comme les coordonnées d'un point mobile dans un plan, y_1 et y_2 comme les composantes de sa vitesse. Alors l'équation $\psi = 0$ représentera un système de droites dans un plan. Ces droites auront une enveloppe que j'appellerai E.

D'un point du plan, on pourra mener à cette enveloppe plusieurs tangentes et le rapport $y' = \frac{y_1}{y_2}$ représentera le coefficient angulaire d'une de ces tangentes. Considérons maintenant le polynome ψ_0; s'il ne dépend pas de s, on retombera sur le cas où le théorème de Bruns s'applique; s'il dépend de s, on pourra trouver une quantité σ telle que : 1° σ est rationnel en x et s; 2° σ est rationnel en x_1, x_2 et y', y' représentant le coefficient angulaire d'une des tangentes menées à E par le point x_1, x_2; 3° les coefficients de ψ^0 sont rationnels en x et σ; 4° aux diverses valeurs de σ correspondent autant de polynomes ψ_0 différents.

Faisons décrire au point x_1, x_2 un contour fermé imaginaire très petit, quelconque; il pourra arriver que deux ou plusieurs valeurs de σ, ou que deux ou plusieurs valeurs de y' s'échangent entre elles; c'est la façon dont se fait cet échange qu'il s'agit de discuter.

Pour que des valeurs de σ s'échangent, il faut que des valeurs de y' s'échangent et pour que des valeurs de y' s'échangent, il faut que le point x_1, x_2 tourne autour de la courbe E ou autour d'une tangente singulière à E;

je veux dire une tangente d'inflexion ou une tangente en un point singulier. Nous restons donc en présence de deux hypothèses :

1° Le lieu des points où l'équation en σ (et par conséquent l'équation en s) a des racines égales comprend E;

2° Le lieu ne comprend pas E, mais comprend une tangente singulière à E.

Cette deuxième hypothèse doit être rejetée; c'est ce que montre la discussion de la façon dont s'échangent les diverses valeurs de y', de σ et de s quand le point x_1, x_2 tourne, dans le voisinage du point de contact, autour d'une tangente singulière à E, ou d'une des branches de courbe qui la touchent.

Ainsi E devra faire partie du lieu des points où l'équation (2) a des racines multiples.

Soit maintenant $n = 3$ et supposons que x_1, x_2, x_3 soient les coordonnées d'un point mobile dans l'espace, y_1, y_2 et y_3 les composantes de sa vitesse. L'équation $\psi_0 = 0$ est alors celle d'un complexe de droites.

Si le polynome ψ_0 est exceptionnel, c'est-à-dire si ses coefficients ne sont pas rationnels en x et s'il fait exception au théorème de Bruns, toutes les droites du complexe devront être tangentes à la surface, lieu des points où l'équation (2) a des racines égales.

Supposons enfin n quelconque. Écrivons que l'équation en s (2) a des racines égales; nous obtiendrons une équation

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

qui pourra n'être pas irréductible, mais se décomposer en plusieurs autres

$$\Phi_1(x_i) = 0, \quad \Phi_2(x_i) = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_k(x_i) = 0.$$

Considérons l'une de ces équations

$$\Phi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

et formons l'équation en t,

$$\Phi_h(x_1 + y_1 t, x_2 + y_2 t, \ldots, x_n + y_n t) = 0.$$

Exprimons que cette équation en t a deux racines égales, nous obtiendrons une relation

$$\Theta_h(x_i, y_i) = 0.$$

Il pourra se faire que Θ_h se décompose en plusieurs facteurs entiers en y_i, rationnels en x_i et en s. S'il en est ainsi, chacun de ces facteurs sera un polynome ψ_0 exceptionnel.

A chaque équation en s ne pourra donc correspondre qu'un nombre fini de polynomes ψ_0 exceptionnels et irréductibles.

Ces polynomes exceptionnels n'existent pas toujours, car Θ_h peut ne pas être décomposable en facteurs.

Qu'arrive-t-il en particulier dans le cas du problème des trois corps ?

On peut former trois polynomes Θ; l'un d'eux est

$$\begin{aligned}&[(x_1-x_4)(y_2-y_5)-(x_2-x_5)(y_1-y_4)]^2\\+&[(x_2-x_5)(y_3-y_6)-(x_3-x_6)(y_2-y_5)]^2\\+&[(x_3-x_6)(y_1-y_4)-(x_1-x_4)(y_3-y_6)]^2.\end{aligned}$$

Chacun d'eux se décompose en deux facteurs; il y a donc des polynomes ψ_0 exceptionnels, mais *ces polynomes sont imaginaires*. Or on peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que l'intégrale $\frac{\psi}{\psi'}$ est réelle.

Le résultat de M. Bruns se trouve donc confirmé; je suis heureux d'avoir pu compléter son élégante analyse sur un point de détail.

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS
DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Bulletin astronomique, t. 14, p. 241-270 (juillet 1897).

Je désire attirer l'attention sur quelques procédés d'intégration par approximations successives applicables aux équations du problème des trois corps. Le but que je me suis proposé, c'est d'exprimer les coordonnées des astres par des séries dont chaque terme est une fonction périodique du temps et, par conséquent, d'éviter que le temps sorte des signes trigonométriques.

Un mot d'abord d'une notation que j'emploierai dans la suite. Considérons une fonction φ de plusieurs arguments $w_1, w_2, \ldots, w_q$, périodique de période 2π par rapport à chacun de ces arguments. Elle pourra être développée par la série de Fourier de telle façon que l'on aura

$$\varphi = \Sigma A \cos(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_q w_q + C). \tag{1}$$

Dans le terme général de la serie (1), A et C sont des constantes quelconques et les m sont des coefficients entiers positifs, négatifs ou nuls.

Parmi les termes de la série (1), je distinguerai celui où tous les coefficients m sont nuls; c'est un terme constant, c'est la *valeur moyenne* de la fonction périodique φ; je la désignerai par la notation $[\varphi]$.

Préliminaires.

Je vais maintenant, pour diviser la difficulté, traiter successivement une série de problèmes, de plus en plus compliqués, de façon à m'élever jusqu'au problème des trois corps.

Problème A. — Résoudre l'équation

$$a_1 \frac{dS}{dw_1} + a_2 \frac{dS}{dw_2} + \ldots + a_q \frac{dS}{dw_q} = \Phi - C.$$

Φ est une fonction *connue* périodique par rapport aux w.

S est une fonction *inconnue* qui doit être périodique par rapport aux w.

C est une constante *inconnue*.

Les a_i sont des coefficients constants donnés.

Soit, par la série de Fourier,

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi = \Sigma A \cos(m_1 w_1 + \ldots + m_q w_q + D), \\ S = \Sigma B \sin(m_1 w_1 + \ldots + m_q w_q + E). \end{cases}$$

Les A et les D sont donnés, et il s'agit de déterminer C, les B et les E. Pour cela, il suffira de prendre $C = [\Phi]$, et, pour chacun des termes de Φ autre que $[\Phi]$, c'est-à-dire pour chacune des combinaisons des coefficients m, où tous ces coefficients ne sont pas nuls à la fois,

$$E = D, \qquad B = \frac{A}{m_1 a_1 + \ldots + m_q a_q}.$$

Cela est possible, pourvu qu'aucun des diviseurs $m_1 a_1 + \ldots + m_q a_q$ ne soit nul, c'est-à-dire pourvu qu'il n'y ait entre les coefficients a aucune relation linéaire à coefficients entiers.

Problème B. — Soit F une fonction développable suivant les puissances d'un paramètre très petit μ et dépendant de deux séries de variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_q, \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_q.$$

On aura donc

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

F_0 ne dépend que des x; les autres termes $\mu^k F_k$ dépendent à la fois des x et des y, mais sont périodiques de période 2π par rapport aux y.

Il s'agit d'intégrer les équations canoniques

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

L'importance de ce problème est évidente; à chaque instant, en Mécanique céleste, on est amené à des équations de cette forme; je n'en citerai qu'un exemple; supposons que l'un des trois corps ait une masse nulle et que les deux autres décrivent deux circonférences concentriques, supposons enfin que les trois corps se meuvent dans un même plan. On arrivera précisément à

des équations de la forme (3), en prenant pour variables x_1 et x_2 la racine du grand axe de la planète troublée et sa constante des aires; pour variables y_1 et y_2, l'anomalie moyenne de la planète troublée et la différence entre la longitude du périhélie de la planète troublée et la longitude de la planète troublante.

Je me propose de trouver des solutions de la forme suivante : les x_i et les y_i seront développés suivant les puissances des μ, de sorte qu'on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots = \Sigma \mu^p x_i^p, \\ y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots = \Sigma \mu^p y_i^p. \end{cases}$$

Dans μ^p, la lettre p représente un exposant; mais, dans x_i^p et y_i^p, elle représente un indice.

Les fonctions x_i^p et y_i^p devront dépendre de q constantes d'intégration $z_1, z_2, \ldots, z_q$ et de q arguments $w_1, w_2, \ldots, w_q$, qui seront des fonctions linéaires du temps, de telle façon que l'on ait

$$w_k = n_k t + \varpi_k,$$

les n_k étant des constantes déterminées et les ϖ_k de nouvelles constantes d'intégration.

Je supposerai que x_i^0 se réduit à la constante z_i et y_i^0 à w_i; que les autres x_i^p et y_i^p sont des fonctions périodiques des q arguments w.

Il s'agit d'intégrer les équations (3) par des séries de la forme (4), ou, ce qui revient au même, de déterminer les séries (4), de telle façon qu'en supposant les variables anciennes x et y liées aux variables nouvelles z et w par les relations (4), les équations (3) deviennent

$$\frac{dz_i}{dt} = 0, \qquad \frac{dw_i}{dt} = \text{const}.$$

Or, je dis que pour cela il suffit :

1° Qu'en substituant dans F, à la place des x et des y, leurs valeurs (4) en fonction des z et des w, cette fonction F se réduise à une fonction φ dépendant seulement des z et indépendante des w; je supposerai cette fonction φ développée suivant les puissances de μ, de telle sorte que

$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \ldots;$$

nous devrons avoir alors

$$(5)\qquad F = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \ldots;$$

2° Que l'expression

$$dS = \Sigma(x_i - z_i)\,dy_i + \Sigma(w_i - y_i)\,dz_i$$

soit une différentielle exacte.

Si en effet dS est une différentielle exacte, il en sera de même de $\Sigma x\,dy - \Sigma z\,dw$. Donc, en prenant pour variables nouvelles les w et les z, on n'altérera pas la forme canonique des équations [1] qui s'écriront

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{dF}{dw_i} = \frac{d\varphi}{dw_i} = 0 \qquad (\text{d'où } z_i = \text{const.}),$$

$$\frac{dw_i}{dt} = -\frac{dF}{dz_i} = -\frac{d\varphi}{dz_i}.$$

La dérivée $\frac{d\varphi}{dz_i}$ ne dépend que des z qui sont des constantes. C'est donc une constante. C. Q. F. D.

Cela posé, substituons dans F, à la place des x_i et des y_i, leurs valeurs (4). Alors F se trouvera développé suivant les puissances de μ, des x_i^p et des y_i^p et les coefficients de développement seront des fonctions des x_i^0 et des y_i^0, c'est-à-dire des z_i et des w_i, périodiques par rapport aux w_i.

Ordonnons les termes de ce nouveau développement de F suivant les puissances de μ, nous tronverons

$$F = \Theta_0 + \mu\Theta_1 + \mu^2\Theta_2 + \ldots.$$

L'équation (5) se décomposera et nous donnera

$$\Theta_0 = \varphi_0, \qquad \Theta_1 = \varphi_1, \qquad \Theta_2 = \varphi_2, \qquad \ldots;$$

Θ_0 n'est autre chose que F_0 où les x_i ont été remplacés par les constantes z_i; c'est donc une constante, de sorte que l'équation $\Theta_0 = \varphi_0$, où φ_0 est une fonction indéterminée des z_i, se trouvera satisfaite d'elle-même.

Nous poserons

$$a_i = -\frac{d\Theta_0}{dz_i}.$$

Les a_i étant des fonctions des z_i seront des constantes.

Développons S suivant les puissances de μ :

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots.$$

L'expression de dS nous montre tout de suite que S_0 est nul et que

$$dS_1 = \Sigma(x_i^1\,dw_i - y_i^1\,dz_i), \qquad \text{d'où} \qquad x_i^1 = \frac{dS_1}{dw_i}.$$

---

[1] *Voir* aux Notes, *Principes de Mécanique analytique.*

D'autre part, on a

$$\Theta_1 = -\Sigma a_i x_i^1 + \Phi;$$

Φ n'est autre chose que F_1 où l'on a remplacé x_i et y_i par z_i et w_i; c'est donc une fonction connue périodique.

Dans ce qui va suivre, je conviendrai de représenter par une même notation Φ toute fonction connue pérodique.

Cette même lettre Φ pourra donc représenter plusieurs fonctions différentes.

L'équation $\Theta_1 = \varphi_1$ s'écrit alors

$$\Sigma a_i \frac{dS_1}{dw_i} = \Phi - \varphi_1;$$

S_1 est une fonction périodique inconnue; φ_1 est une constante inconnue (constante puisqu'elle ne dépend que des z_i).

Nous pourrons donc intégrer cette équation par le procédé A, je veux dire par le procédé qui nous a permis de résoudre le problème A.

Connaissant S_1 nous aurons x_i^1 et y_i^1 par les équations

$$x_i^1 = \frac{dS_1}{dw_i}, \qquad y_i^1 = -\frac{dS_1}{dz_i}.$$

Il vient ensuite

$$dS_2 = \Sigma(x_i^2\, dw_i + x_i^1\, dy_i^1 - y_i^2\, dz_i), \tag{6}$$

d'où

$$x_i^2 = \frac{dS_2}{dw_i} - \Sigma x_k^1 \frac{dy_k^1}{dw_i} = \frac{dS_2}{dw_i} + \Phi. \tag{7}$$

D'autre part, on aura

$$\Theta_2 = -\Sigma a_i x_i^2 + \Phi, \tag{8}$$

la fonction Φ ne dépendant que des x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1 et étant par conséquent désormais connue.

La combinaison des équations (7) et (8) nous donnerait, en tenant compte de $\Theta_2 = \varphi_2$,

$$\Sigma a_i \frac{dS_2}{dw_i} = \Phi - \varphi_2, \tag{9}$$

qui s'intégrera par le procédé A.

Connaissant S_2, nous aurons x_i^2 et y_i^2 par les équations

$$x_i^2 = \frac{dS_2}{dw_i} + \Phi, \qquad y_i^2 = -\frac{dS_2}{dz_i} + \Phi. \tag{7 bis}$$

Nous déterminerions ensuite S_3, x_i^3 et y_i^3 par des équations analogues aux

équations (7 *bis*), (8) et (9) et qui n'en différeraient que parce que l'indice 2 serait remplacé par l'indice 3. Les fonctions Φ, qui figureraient dans ces nouvelles équations, pourraient être regardées comme connues parce qu'elles ne dépendraient que des x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1, x_i^2, y_i^2.

Et ainsi de suite.

Le problème B peut donc être regardé comme résolu.

Le procédé que je viens d'exposer n'est pas identique à celui que j'ai développé dans le Chapitre XV des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste;* il présente certains avantages que la comparaison des deux procédés ferait mieux ressortir.

Problème C. — F_2 étant un polynome homogène du second degré par rapport aux x et aux y, intégrer les équations canoniques

$$(10) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_2}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_2}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants. Elles admettront donc $2q$ solutions de la forme

$$x_i = \alpha_i^k e^{\lambda_k t}, \qquad y_i = \beta_i^k e^{\lambda_k t};$$

cherchons à déterminer les constantes α_i^k, β_i^k, et λ_k de façon à satisfaire aux équations; il viendra

$$\lambda_k \alpha_i^k = \frac{dF_2}{d\beta_i^k}, \qquad \lambda_k \beta_i^k = -\frac{dF_2}{d\alpha_i^k}.$$

Je suppose, bien entendu, en écrivant ces équations, que dans F_2 les variables x_i et y_i ont été remplacées par α_i^k et β_i^k.

Entre ces $2q$ équations (qui sont linéaires et homogènes par rapport aux α et aux β) j'élimine les $2q$ quantités α et β. J'obtiendrai une équation de degré $2q$ en λ_k, dont les racines seront deux à deux égales et de signe contraire.

Si la forme quadratique F_2 est définie positive, les racines λ_k sont purement imaginaires, de sorte que λ_k et $-\lambda_k$ sont imaginaires conjuguées.

Soit maintenant μ_k une autre racine de l'équation en λ_k et

$$x_i = \gamma_i^k e^{\mu_k t}, \qquad y_i = \delta_i^k e^{\mu_k t}$$

la solution correspondante des équations (10). Posons

$$\xi_i = \alpha_i^k e^{\lambda_k t}, \qquad \eta_i = \beta_i^k e^{\lambda_k t}, \qquad \xi_i' = \gamma_i^k e^{\mu_k t}, \qquad \eta_i' = \delta_i^k e^{\mu_k t}.$$

Comme $x_i = \xi_i$, $y_i = \eta_i$ d'une part; $x_i = \xi'_i$, $y_i = \eta'_i$ d'autre part, sont deux solutions des équations (10), il est aisé de vérifier qu'on aura

$$\Sigma(\xi_i \eta'_i - \eta_i \xi'_i) = \text{const.}$$

Comme, d'autre part, le premier membre est divisible par $e^{(\lambda_k + \mu_k)t}$, la constante du second membre doit être nulle, à moins que $\mu_k = -\lambda_k$. Si $\mu_k = -\lambda_k$, nous ne restreindrons pas la généralité en supposant que cette constante est égale à 1.

Soient alors a_i^k, b_i^k les valeurs de γ_i^k, δ_i^k correspondant à cette racine $\mu_k = -\lambda_k$. Si la forme F_2 est définie positive, nous pouvons supposer que α_i^k et $\sqrt{-1}\, a_i^k$, β_i^k et $\sqrt{-1}\, b_i^k$ sont imaginaires conjugués.

Posons alors

$$(11) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{q} \alpha_i^k x'_k + \sum a_i^k y'_k, \qquad y_i = \sum \beta_i^k x'_k + \sum b_i^k + y'_k;$$

il vient

$$\Sigma(x_i\, dy_i - y_i\, dx_i) = \Sigma(x'_k\, dy'_k - y'_k\, dx'_k).$$

Cette équation exprime que $\Sigma x\, dy - \Sigma x'\, dy'$ est une différentielle exacte, et que, en passant des variables x, y aux variables x' y', on n'altère pas la forme canonique des équations.

Les équations (10) deviendront donc

$$\frac{dx'_k}{dt} = \frac{dF_2}{dy'_k}, \qquad \frac{dy'_k}{dt} = -\frac{dF_2}{dx'_k}$$

et comme elles doivent avoir pour intégrales

$$x'_k = e^{\lambda_k t}, \qquad y'_k = e^{-\lambda_k t}$$

nous aurons

$$(12) \qquad F_2 = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k x'_k y'_k.$$

D'autre part, comme $\Sigma(x\, dy - x'\, dy')$ est une différentielle exacte on aura identiquement

$$\sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dR}{dy_i} - \frac{dR}{dx_i} \frac{dF_2}{dy_i} \right) = \sum \left(\frac{dF_2}{dx'_i} \frac{dR}{dy'_i} - \frac{dR}{dx'_i} \frac{dF_2}{dy'_i} \right).$$

Le second membre se réduit à

$$(13) \qquad \Sigma \lambda_k \left(y'_k \frac{dR}{dy'_k} - x'_k \frac{dR}{dx'_k} \right).$$

Si R est un polynome entier par rapport aux x et aux y, et par conséquent aussi par rapport aux x' et aux y', si de plus il n'y a entre les λ_k aucune relation linéaire à coefficients entiers, la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression (13) s'annule est que R soit un polynome entier par rapport aux q expressions $\lambda_k x'_k y'_k$. Remarquons que ces q expressions dont la somme est égale à F_2 sont q polynomes homogènes du second de gré par rapport aux x et aux y. Ces q polynomes sont réels et toujours positifs, si la forme F_2 est définie positive.

Problème D. — Résoudre l'équation

$$(14)\qquad \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \left(y_k \frac{dS}{dy_k} - x_k \frac{dS}{dx_k} \right) = P - Q,$$

où P est un polynome *connu* homogène de degré p par rapport aux $2q$ variables x et y.

S est un polynome *inconnu* homogène de degré p par rapport aux x et aux y.

Q est un polynome *inconnu* homogène de degré $\frac{p}{2}$ par rapport aux q produits xy.

Soient

$$\begin{aligned} P &= \Sigma A x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_q^{\alpha_q} y_q^{\beta_q}, \\ S &= \Sigma B x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_q^{\alpha_q} y_q^{\beta_q}, \\ Q &= \Sigma C (x_1 y_1)^{\alpha_1} (x_2 y_2)^{\alpha_2} \ldots (x_q y_q)^{\alpha_q}. \end{aligned}$$

Nous résoudrons l'équation (14) en prenant

$$B = \frac{A}{\Sigma \lambda_k (\alpha_k - \beta_k)}$$

si l'on n'a pas à la fois

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \ldots \qquad \alpha_q = \beta_q$$

et $C = A$ si l'on a à la fois

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_q = \beta_q.$$

La solution est possible pourvu que les λ_k ne soient liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers.

Remarquons que Q est identiquement nul si p est impair.

Problème E. — Résoudre les équations

$$(15)\qquad \sum \left(\frac{dF_2}{dx_l} \frac{dS}{dy_l} - \frac{dF_2}{dy_l} \frac{dS}{dx_l} \right) = P - Q, \qquad \sum \left(\frac{dF_2}{dx_l} \frac{dQ}{dy_l} - \frac{dF_2}{dy_l} \frac{dQ}{dx_l} \right) = 0,$$

où F_2 est un polynome homogène *donné* du deuxième degré par rapport aux x et aux y, P un polynome homogène *connu* de degré p, S et Q deux polynomes homogènes *inconnus* de degré p.

Faisons le changement de variables (11), les équations (15) deviendront

$$\Sigma\lambda_k\left(y'_k\frac{dS}{dy'_k}-x'_k\frac{dS}{dx'_k}\right)=P-Q,\qquad \Sigma\lambda_k\left(y'_k\frac{dQ}{dy'_k}-x'_k\frac{dQ}{dx'_k}\right)=0.$$

La seconde de ces équations signifiera que Q est un polynome entier par rapport aux produits $x'_k y'_k$. Nous sommes donc ramenés au problème précédent.

Le problème sera donc possible pourvu qu'il n'y ait entre les λ_k aucune relation linéaire à coefficients entiers. Q est nul, si p est impair.

Problème F. — La fonction F est une série ordonnée suivant les puissances croissantes des x et des y et commençant par des termes du deuxième degré, soit

$$F=F_2+F_3+F_4+\ldots,$$

F_p désignant l'ensemble des termes d'ordre p.

Il s'agit d'intégrer les équations canoniques

$$(16)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}.$$

Voici dans quelles circonstances on rencontrera ce problème. On a cherché à étudier les variations séculaires des éléments des planètes de la manière suivante. On a écrit les équations des perturbations en supprimant dans la fonction perturbatrice tous les termes périodiques, et l'on s'est proposé d'intégrer les équations ainsi simplifiées que j'appellerai *équations aux variations séculaires*. On sait que Lagrange a effectué cette intégration en ne conservant dans la fonction perturbatrice que les termes du deuxième degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Les équations étaient alors linéaires et à coefficients constants. Ce n'était d'ailleurs autre chose que notre problème C.

Plus tard, Le Verrier a tenu compte des termes du quatrième degré, Cellérier de ceux du sixième degré. Le procédé que je vais exposer amène, dans ces calculs, une simplification importante et permet de tenir compte de toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

Et, en effet, si les variables sont convenablement choisies, les équations aux variations séculaires sont précisément de la forme (16).

Je me propose d'exprimer les x et les y en fonction de q constantes ρ_k et de q arguments ω_k qui seront des fonctions linéaires du temps. Je m'arrangerai pour que les x et les y soient développables suivant les puissances des quantités $\rho_k e^{\omega_k\sqrt{-1}}$, $\rho_k e^{-\omega_k\sqrt{-1}}$.

Soient

$$(17) \qquad x_i = x_i^1 + x_i^2 + \ldots, \qquad y_i = y_i^1 + y_i^2 + \ldots$$

ces développements où x_i^p et y_i^p représentent l'ensemble des termes de degré p par rapport aux ρ_k.

Je dis que le problème équivaut au suivant :

Déterminer les séries (17) de telle façon :

1° qu'en y substituant, à la place des x et des y, ces développements (17), F se réduise à une fonction φ dépendant seulement des ρ et indépendante des ω;

2° que

$$dS = \Sigma(x_i - x_i^1)\,dy_i + (y_i^1 - y_i)\,dx_i^1 \qquad \text{et} \qquad dT = \Sigma x_i^1\,dy_i^1 + \sqrt{-1}\,\Sigma\rho_k^2\,d\omega_k$$

soient des différentielles exactes.

S'il en est ainsi, en effet, $\Sigma x_i\,dy_i + \sqrt{-1}\,\Sigma\rho_k^2\,d\omega_k$ sera une différentielle exacte. La forme canonique des équations ne sera donc pas altérée quand on passera des variables x et y aux variables ρ_k^2 et $-\sqrt{-1}\,\omega_k$; elles deviendront donc

$$\frac{d(\rho_k^2)}{dt} = -\frac{dF}{\sqrt{-1}\,d\omega_k} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}\,d\omega_k} = 0 \qquad (\text{d'où } \rho_k = \text{const.}),$$

$$\sqrt{-1}\,\frac{d\omega_k}{dt} = +\frac{dF}{d(\rho_k^2)} = +\frac{d\varphi}{d(\rho_k)^2} = \text{const.},$$

ce qui montre que les ω sont des fonctions linéaires du temps.

Substituons dans F les développements (17) et ordonnons suivant les puissances des ρ; nous aurons

$$F = \Theta_2 + \Theta_3 + \ldots$$

pour le développement de F et

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$$

pour celui de φ et, comme on doit avoir $F = \varphi$, nous aurons

$$\Theta_2 = \varphi_2, \qquad \Theta_3 = \varphi_3, \qquad \ldots.$$

Θ_2 n'est autre chose que F_2 où x_i et y_i sont remplacés par x_i^1, y_i^1. Si donc,

employant le procédé C, nous faisons le changement de variables (11) en posant

$$x_i^1 = \Sigma \alpha_i^k \rho_k e^{\omega_k \sqrt{-1}} - \sqrt{-1}\, \Sigma a_i^k \rho_k e^{-\omega_k \sqrt{-1}},$$
$$y_i^1 = \Sigma \beta_i^k \rho_k e^{\omega_k \sqrt{-1}} - \sqrt{-1}\, \Sigma b_i^k \rho_k e^{-\omega_k \sqrt{-1}},$$

l'expression

$$\Sigma x_i^1 y_i^1 + \sqrt{-1}\, \Sigma \rho_k^2 d\omega_k$$

sera une différentielle exacte et

$$\Theta_2 = F_2(x_i^1, y_i^1)$$

se réduira, en vertu de l'équation (12), à $-\sqrt{-1}\, \Sigma \lambda_k \rho_k^2$, de sorte que l'équation $\Theta_2 = \varphi_2$ se trouvera satisfaite. Soit

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots$$

le développement de S suivant les puissances des ρ. J'observe d'abord que les premiers termes S_0, S_1 et S_2 sont nuls et que l'on a

$$dS_3 = \Sigma x_i^2 dy_i^1 - \Sigma y_i^2 dx_i^1.$$

D'autre part,

$$\Theta_3 = \sum \left(\frac{d\Theta_2}{dx_i^1} x_i^2 + \frac{d\Theta_2}{dy_i^1} y_i^1 \right) + \Phi,$$

Φ étant une fonction connue puisque x_i^1 et y_i^1 sont désormais connus. Comme l'on a

$$(18) \qquad x_i^2 = \frac{dS_3}{dy_i^1}, \qquad y_i^2 = -\frac{dS_3}{dx_i^1},$$

l'équation $\Theta_3 = \varphi_3$ devient

$$(19) \qquad \sum \left(\frac{d\Theta_2}{dx_i^1} \frac{dS_3}{dy_i^1} - \frac{d\Theta_2}{dy_i^1} \frac{dS_3}{dx_i^1} \right) = -\Phi + \varphi_3.$$

D'autre part, φ_3 ne dépendant que des ρ, on aura

$$(20) \qquad \sum \left(\frac{d\Theta_2}{dx_i^1} \frac{d\varphi_3}{dy_i^1} - \frac{d\Theta_2}{dy_i^1} \frac{d\varphi_3}{dx_i^1} \right) = 0;$$

ces équations, analogues aux équations (15), s'intégreront par le procédé E, ce qui donne S_3; les équations (18) donneront ensuite x_i^2 et y_i^2.

On trouve ensuite

$$dS_4 = \Sigma (x_i^3 dy_i^1 + x_i^2 dy_i^2 - y_i^3 dx_i^1),$$

d'où, puisque x_i^2 et y_i^2 sont désormais connus,

$$(18\,bis) \qquad x_i^3 = \frac{dS_4}{dy_i^1} + \Phi, \qquad y_i^3 = -\frac{dS_4}{dx_i^1} + \Phi.$$

On obtient ainsi deux équations analogues aux équations (19) et (20) et qui n'en diffèrent que parce que l'indice 3 y est remplacé par l'indice 4.

Ces équations s'intégreront par le procédé E, ce qui donnera S_4, et ensuite, par (18 *bis*), x_i^3 et y_i^3 et ainsi de suite.

Problème G. — La fonction F a la même signification que dans le problème précédent.

Trouver $2q$ fonctions ξ_i et η_i des x_i et des y_i, telles que l'on ait

$$(21)\qquad \sum\left(\frac{dF}{dx_i}\xi_i+\frac{dF}{dy_i}\eta_i\right)=P-Q,\qquad \sum\left(\frac{dF_2}{dx_i}\frac{dQ}{dy_i}-\frac{dF_2}{dy_i}\frac{dQ}{dx_i}\right)=0$$

et que

$$dS=\Sigma(\xi_i dy_i-\eta_i dx_i)$$

soit une différentielle exacte.

P représente une fonction connue, Q une fonction inconnue; toutes deux doivent être développables suivant les puissances des x et des y.

Je veux également que ξ, η et S soient développables de la même manière; et j'écris les développements de ces cinq fonctions sous la forme

$$(22)\qquad \xi_i=\Sigma\xi_i^p,\qquad \eta_i=\Sigma\eta_i^p,\qquad P=\Sigma P_p,\qquad Q=\Sigma Q_p,\qquad S=\Sigma S_p.$$

Je substitue dans les équations (21) les développements (22); j'égale les termes du premier degré, et j'ai les équations

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum\left(\frac{dF_2}{dx_i}\xi_i^0+\frac{dF_2}{dy_i}\eta_i^0\right)=P_1-Q_1,\\
&\sum\left(\frac{dF_2}{dx_i}\frac{dQ_1}{dy_i}-\frac{dF_2}{dy_i}\frac{dQ_1}{dx_i}\right)=0,\\
&dS_1=\sum(\xi_i^0\,dy_i-\eta_i^0\,dx_i),\\
&\xi_i^0=\frac{dS_1}{dy_i},\qquad \eta_i^0=-\frac{dS_1}{dx_i},\\
&\sum\left(\frac{dF_2}{dx_i}\frac{dS_1}{dy_i}-\frac{dF_2}{dy_i}\frac{dS_1}{dx_i}\right)=P_1-Q_1,
\end{aligned}\right.$$

équations qui, par le procédé E, donnent S_1, ξ_i^0 et η_i^0.

En égalant de même les termes du deuxième degré, j'obtiens

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum\left(\frac{dF_2}{dx_i}\xi_i^1+\frac{dF_2}{dy_i}\eta_i^1\right)=\Phi-Q_2,\\
&\sum\left(\frac{dF_2}{dx_i}\frac{dQ_2}{dy_i}-\frac{dF_2}{dy_i}\frac{dQ_2}{dx_i}\right)=0,\\
&dS_2=\sum(\xi_i^1\,dy_i-\eta_i^1\,dx_i),\\
&\sum\left(\frac{dF_2}{dx_i}\frac{dS_2}{dy_i}-\frac{dF_2}{dy_i}\frac{dS_2}{dx_i}\right)=\Phi-Q_2,
\end{aligned}\right.$$

qui, par le procédé E, donnent S_2, ξ_i^1 et η_i^1; et ainsi de suite.

Remarquons que, d'après ce que nous avons dit à propos du problème E, la fonction Q_p est nulle si l'indice p est impair, de même que la fonction φ_p du problème précédent.

Problème H. — Il n'y aurait rien à changer à l'analyse qui précède si les équations (21) étaient remplacées par les suivantes :

$$(21\ bis)\qquad \begin{cases} \sum\left(\dfrac{dF}{dx_i}\xi_i + \dfrac{dF}{dy_i}\eta_i\right) + \Sigma(A_i\xi_i + B_i\eta_i) = P - Q, \\ \sum\left(\dfrac{dF_2}{dx_i}\dfrac{dQ}{dy_i} - \dfrac{dF_2}{dy_i}\dfrac{dQ}{dx_i}\right) = 0, \end{cases}$$

et si l'expression dS, qui doit être différentielle exacte, s'écrivait

$$dS = \Sigma(\xi_i\,dy_i - \eta_i\,dx_i) + \Sigma(\xi_i\,dC_i - \eta_i\,dD_i),$$

où A_i, B_i, C_i, D_i sont des fonctions *connues* des x et des y, développables suivant les puissances de ces variables, *le développement commençant par des termes du deuxième degré.*

En y substituant les développements (22) et égalant les termes du premier degré, on retrouverait les équations (23).

En égalant ensuite les termes du deuxième degré, on retrouverait les deux premières équations (24), car le terme $\Sigma(A_i\xi_i^0 + B_i\eta_i^0)$, qu'il faudrait ajouter dans la première d'entre elles, est maintenant connu, puisque ξ_i^0 et η_i^0 ont été préalablement déterminés par les équations (23). Il peut donc rentrer dans Φ.

La troisième équation (24) deviendrait

$$dS_2 = \Sigma(\xi_i^1\,dy_i - \eta_i^1\,dx_i) + \Sigma(\xi_i^0\,dC_i - \eta_i^0\,dD_i),$$

d'où

$$\frac{dS_2}{dy_i} = \xi_i^1 + \Phi, \qquad \frac{dS_2}{dx_i} = -\eta_i^1 + \Phi.$$

On retrouverait donc la quatrième équation (24) et le calcul continuerait comme dans le problème G.

Signification du problème H.

Voici comment on peut être conduit à se poser les problèmes G et H.

Reprenons les équations (16) et remplaçons-y F par $F - \varepsilon P_1$, où ε est une quantité très petite, dont on peut négliger le carré, et P_1 une sorte de fonction perturbatrice.

Remplaçons de même dans ces équations x_i et y_i par $x_i + \varepsilon\xi_i$, $y_i + \varepsilon\eta_i$.

Les équations s'écriront alors

$$(16\ bis)\qquad \frac{d(x_i+\varepsilon\xi_i)}{dt}=\frac{d(F-\varepsilon P)}{d(y_i+\varepsilon\eta_i)},\qquad \frac{d(y_i+\varepsilon\eta_i)}{dt}=-\frac{d(F-\varepsilon P)}{d(x_i+\varepsilon\xi_i)}.$$

Nous avions remplacé les équations (16) par les suivantes :

$$F=\varphi,\qquad dS=\Sigma[(x_i-x_i^1)\,dy_i+(y_i^1-y_i)\,dx_i^1].$$

La première de ces équations va devenir

$$F-\varepsilon P=\varphi-\varepsilon Q,$$

Q étant une fonction qui comme φ ne doit dépendre que des ρ; de sorte que la fonction $\varphi-\varepsilon Q$ pourra jouer le même rôle que φ.

Le premier membre de cette équation pourra, en négligeant les quantités de l'ordre de ε^2, s'écrire

$$F+\varepsilon\sum\left(\frac{dF}{dx_i}\xi_i+\frac{dF}{dy_i}\eta_i\right)-\varepsilon P,$$

en supposant que dans P, F et ses dérivées, $x_i+\varepsilon\xi_i$ et $y_i+\varepsilon\eta_i$ sont remplacés par x_i et y_i.

Nous aurons donc, en égalant les coefficients de ε,

$$\sum\left(\frac{dF}{dx_i}\xi_i+\frac{dF}{dy_i}\eta_i\right)=P-Q,$$

où l'on reconnaît la première équation (21).

En changeant maintenant x_i, y_i, S en $x_i+\varepsilon\xi_i$, $y_i+\varepsilon\eta_i$, $S+\varepsilon U$, nous trouvons

$$d(S+\varepsilon U)=\Sigma[(x_i+\varepsilon\xi_i-x_i^1)\,d(y_i+\varepsilon\eta_i)+(y_i^1-y_i-\varepsilon\eta_i)\,dx_i^1].$$

En négligeant ε^2 et en posant

$$U=S'-\Sigma\eta_i(x_i^1-x_i),$$

il viendra

$$dS'=\Sigma(\xi_i\,dy_i-\eta_i dx_i).$$

Maintenant nous savons que x_i et y_i sont développables suivant les puissances des x_i^1 et des y_i^1.

Prenons les x_i^1 et les y_i^1 comme variables indépendantes, il viendra

$$\frac{dF}{dx_i}=\frac{dF}{dx_i^1}+A_i,\qquad \frac{dF}{dy_i}=\frac{dF}{dy_i^1}+B_i,$$
$$x_i=x_i^1+D_i,\qquad y_i=y_i^1+C_i,$$

où les développements des A_i, B_i, C_i, D_i suivant les puissances des x_i^1 et y_i^1 commencent par des termes du second degré.

Nous aurons donc

$$\sum\left(\frac{dF}{dx_i^1}\xi_i + \frac{dF}{dy_i^1}\eta_i\right) + \Sigma(A_i\xi_i + B_i\eta_i) = P - Q,$$
$$dS = \Sigma(\xi_i\,dy_i^1 - \eta_i\,dx_i^1) + \Sigma(\xi_i\,dC_i - \eta_i\,dD_i),$$

et comme Q ne doit dépendre que des ρ :

$$\sum\left(\frac{dF_2}{dx_i^1}\frac{dQ}{dy_i^1} - \frac{dF_2}{dy_i^1}\frac{dQ}{dx_i^1}\right) = 0.$$

Nous reconnaissons les équations (21 *bis*). Ainsi le problème H revient à l'intégration des équations (16 *bis*) en supposant ε très petit.

Les équations (16 *bis*) étant de même forme que les équations (16) (sauf la présence possible de termes du premier degré dans P), il n'est pas étonnant que l'on puisse résoudre le problème H et trouver pour les inconnues ξ_i et η_i des développements procédant suivant les puissances des x_k^1 et des y_k^1 et par conséquent, des $\rho_k e^{\pm\omega_k\sqrt{-1}}$.

Je suis maintenant en mesure d'aborder le problème des trois corps dans toute sa généralité, et c'est ce que je vais faire en combinant les divers procédés que je viens d'exposer.

Choix des variables.

Soient a, e, i, ϖ, Ω et l le grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, la longitude du périhélie, celle du nœud et la longitude moyenne pour la première planète; désignons les mêmes éléments pour la seconde planète par les mêmes lettres accentuées. Soient β et β' deux coefficients numériques convenablement choisis (ces coefficients ont été définis dans le *Bulletin astronomique*, février 1897) [1] et choisissons pour variables

$$\beta\sqrt{a} = X_1, \qquad \beta'\sqrt{a} = X_2, \qquad l = Y_1, \qquad l' = Y_2,$$

$$\sqrt{2\beta\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\cos\varpi = x_1, \qquad -\sqrt{2\beta\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\sin\varpi = y_1,$$
$$\sqrt{2\beta'\sqrt{a'}\left(1-\sqrt{1-e'^2}\right)}\cos\varpi' = x_2, \qquad \sqrt{2\beta'\sqrt{a'}\left(1-\sqrt{1-e'^2}\right)}\sin\varpi' = y_2,$$
$$\sqrt{2\beta\sqrt{a(1-e^2)}\,(1-\cos i)}\cos\Omega = x_3, \qquad \sqrt{2\beta\sqrt{a(1-e^2)}\,(1-\cos i)}\sin\Omega = y_3,$$
$$\sqrt{2\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\,(1-\cos i')}\cos\Omega' = x_4, \qquad -\sqrt{2\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\,(1-\cos i')}\sin\Omega' = y_4.$$

---

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 500.

Les équations du mouvement prennent alors la forme canonique et s'écrivent

$$(25)\qquad \frac{dX_i}{dt} = \frac{dF}{dY_i}, \qquad \frac{dY_i}{dt} = -\frac{dF}{dX_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

La fonction F est développable suivant les puissances des masses; pour mettre ce fait en évidence, nous introduirons un coefficient μ de l'ordre des masses; chaque masse sera égale à μ multiplié par une quantité finie et F sera développable suivant les puissances de μ sous la forme

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

F_0 dépendra des X et sera indépendante des Y, des x et des y.

Les autres fonctions F_1, F_2 dépendront de toutes les variables. Par rapport aux Y, ce seront des fonctions périodiques; de plus, elles seront développables suivant les puissances des x et des y.

F_1 étant une fonction périodique des Y, je puis considérer sa valeur moyenne $[F_1]$ définie comme au début de ce travail. Je poserai

$$[F_1] = R.$$

R sera développable suivant les puissances des x et des y et j'aurai

$$R = R_0 + R_2 + R_4 + \ldots,$$

R_p étant l'ensemble des termes d'ordre p. Il n'y a d'ailleurs que des termes d'ordre pair.

C'est R_2 qui jouera le rôle que jouait F_2 dans les problèmes E, F, G, etc.,

Forme de la solution.

Nous allons chercher à exprimer nos variables en fonction de six constantes z_1, z_2, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 et de six arguments fonctions linéaires du temps w_1, w_2, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

Nous verrons que les w varient très rapidement et les ω très lentement, et même que ω_4 se réduit à une constante.

Nos variables devront se développer suivant les puissances de μ :

$$(26)\qquad X_i = X_i^0 + \mu X_i^1 + \ldots = \Sigma \mu^p X_i^p, \qquad Y_i = \Sigma \mu^p Y_i^p, \qquad x_i = \Sigma \mu^p x_i^p, \qquad y_i = \Sigma \mu^p y_i^p.$$

Voici quelle sera la forme de ces développements : toutes les fonctions X_i^p, Y_i^p, x_i^p, y_i^p $(p > 0)$ seront des fonctions des w, développables d'autre part suivant les puissances des $\rho_k e^{w_k\sqrt{-1}}$, $\rho_k e^{-w_k\sqrt{-1}}$.

Elles dépendront en outre des z d'une manière quelconque.

On aura

$$X_i^0 = z_i.$$

Enfin les $Y_i^0 - w_i$, les x_i^0, les y_i^0 seront indépendants des w et développables suivant les puissances des $\rho_k e^{\omega_k\sqrt{-1}}$, $\rho_k e^{-\omega_k\sqrt{-1}}$.

Quand on annulera les ρ, Y_i^0 se réduira à w_i, x_i^0 et y_i^0 à zéro.

Les quantités X_i^p, etc. étant des fonctions périodiques des w, je pourrai envisager leur valeur moyenne, définie au début de ce travail, et la désigner par $[X_i^p]$.

Voici quelle est la signification de ces diverses quantités.

Les différences $X_i^p - [X_i^p]$. ... représentent les perturbations à courte période d'ordre p par rapport aux masses.

La valeur moyenne $[X_i^p]$ représente les perturbations séculaires d'ordre $p+1$. En effet elle ne dépend pas des w, mais seulement des ω : elle variera donc très lentement; la quantité elle-même est d'ordre p; mais ses variations dans un temps fini seront de l'ordre $p+1$.

J'observe enfin que les quantités ρ par rapport auxquelles nous développerons sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons.

Je désignerai par u_k et v_k les termes du premier degré par rapport aux ρ dans le développement de x_k^0 et y_k^0.

Transformation du problème.

Je dis que le problème peut être remplacé par le suivant : déterminer les séries (26) de telle façon que :

1° La fonction F, quand on y a substitué les séries (26), se réduise à une fonction φ ne dépendant plus que des constantes z et ρ.

2° Les expressions

$$\begin{aligned}
dS &= \Sigma[(X_i - z_i)\,dY_i + (Y_i^0 - Y_i)\,dz_i + (x_k - x_k^0)\,dy_k + (y_k^0 - y_k)\,dx_k^0],\\
dT &= \Sigma[(x_k^0 - u_k)\,dy_k^0 + (v_k - y_k^0)\,du_k] + \Sigma(w_i - y_i^0)\,dz_i,\\
dU &= \Sigma\, u_k\, dv_k + \sqrt{-1}\,\Sigma\rho_k^2\, d\omega_k
\end{aligned}$$

soient des différentielles exactes.

Si, en effet, ces trois différentielles sont exactes, il en sera de même de

$$\Sigma X_i\, dY_i + \Sigma x_k\, dy_k - \Sigma z_i\, dw_i + \sqrt{-1}\,\Sigma\rho_k^2\, d\omega_k.$$

Si donc on prend comme variables les z, les w, les ρ_k^2 et les $-\sqrt{-1}\,\omega_k$, la forme canonique des équations (25) ne sera pas altérée et elles deviendront

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{dF}{dw_i} = \frac{d\varphi}{dw_i} = 0 \quad (z_i = \text{const.}), \qquad \frac{d\rho_k^2}{dt} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}\,d\omega_k} = 0 \quad (\rho = \text{const.}),$$

$$\frac{dw_i}{dt} = -\frac{d\varphi}{dz_i} = \text{const.}; \qquad \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d\varphi}{\sqrt{-1}\,d(\rho_k^2)} = \text{const.},$$

ce qui montre que les z et les ρ sont des constantes, les w et les ω des fonctions linéaires du temps. C. Q. F. D.

Substituons dans F les développements (26), et ordonnons suivant les puissances de μ; nous aurons

$$F = \Theta_0 + \mu\Theta_1 + \mu^2\Theta_2 + \ldots.$$

Si nous développons de même φ suivant les puissances de μ de telle sorte que $\varphi = \Sigma\mu^p\varphi_p$, l'équation $F = \varphi$ nous donnera

$$\Theta_0 = \varphi_0, \quad \Theta_1 = \varphi_1, \quad \Theta_2 = \varphi_2, \quad \ldots.$$

Comme Θ_0 n'est autre chose que F_0, où X_i est remplacé par z_i, l'équation $\Theta_0 = \varphi_0$ est remplie d'elle-même.

Je développerai de même S suivant les puissances de μ en écrivant

$$S = \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots$$

Théorème de Poisson.

Il vient d'abord, en égalant les termes du premier degré,

$$dS_1 = \Sigma(X_i^1\,dY_i^0 - Y_i^1\,dz_i + x_k^1\,dy_k^0 - y_k^1\,dx_k^0).$$

D'après nos hypothèses, $Y_i^0 = w_i$, z_i, y_k^0, x_k^0 sont indépendants des w; on a donc

$$\frac{dY_i^0}{dw_i} = 1, \qquad \frac{dY_k^0}{dw_i} = 0 \quad (k > i), \qquad \frac{dy_k^0}{dw_i} = 0, \qquad \frac{dx_k^0}{dw_i} = 0,$$

d'où

$$\frac{dS_1}{dw_i} = X_i^1. \tag{27}$$

Mais la valeur moyenne de $\frac{dS_1}{dw_i}$, qui est la dérivée d'une fonction périodique, est évidemment nulle; on a donc

$$[X_i^1] = 0.$$

Mais $[X_i^1]$ représente, d'après ce que nous avons vu plus haut, les perturbations

séculaires de X_i, c'est-à-dire du grand axe, qui sont du second ordre par rapport aux masses.

C'est donc le théorème de Poisson sur l'invariabilité des grands axes.

Perturbations séculaires du premier ordre.

Posons

$$a_i = -\frac{d\Theta_0}{dz_i}.$$

Les z_i étant regardées comme des constantes, il en sera de même des a_i et l'on aura

$$\Theta_1 = -\Sigma a_i X_i^1 + F_1. \tag{28}$$

Il demeure bien entendu que, dans F_1, les variables X_i, Y_i, x_i, y_i doivent être remplacées par X_i^0, Y_i^0, x_i^0 et y_i^0. En prenant les valeurs moyennes, on trouve

$$[\Theta_1] = -\Sigma a_i [X_i^1] + [F_1] = R.$$

Reprenons l'équation $\Theta_1 = \varphi_1$ et prenons les valeurs moyennes des deux membres, il vient

$$R = \varphi_1. \tag{29}$$

Regardons un instant les z_i comme des constantes, il viendra

$$dT = \Sigma[(x_k^0 - u_k)\,dy_k^0 + (v_k - y_k^0)\,dy_k] \tag{30}$$

et il faudra déterminer les x_k^0 et y_k^0 de façon à satisfaire à l'équation (29) et à rendre l'expression (30) ainsi que dU différentielles exactes.

C'est le problème F, où R, T, U, x_k^0, y_k^0, u_k, v_k jouent le rôle de F, S, T, x_i, y_i, x_i^1, y_i^1.

Nous obtiendrons donc x_k^0 et y_k^0 développés suivant les puissances des $\rho e^{\pm \omega\sqrt{-1}}$.

La fonction T étant ainsi déterminée par le procédé F, on aura

$$Y_i^0 = w_i - \frac{dT}{dz_i},$$

ce qui donne la perturbation séculaire de l'époque.

Perturbations périodiques du premier ordre.

Reprenons l'équation $\Theta_1 = \varphi_1$, qui peut s'écrire, en tenant compte de (27) et (28),

$$\Sigma \alpha_i \frac{dS_1}{dw_i} = F_1 - \varphi_1.$$

Le second membre est une fonction périodique des w dont la valeur moyenne est nulle en vertu de (29).

L'équation pourra donc s'intégrer par le procédé A, ce qui donnera $S_1 - [S_1]$.

On aura ensuite

$$X_i^1 = X_i^1 - [X_i^1] = \frac{d(S_1 - [S_1])}{dY_i^0}, \qquad Y_i^1 - [Y_i^1] = -\frac{d(S_1 - [S_1])}{dz_i},$$

$$x_k^1 - [x_k^1] = \frac{d(S_1 - [S_1])}{dy_k^0}, \qquad y_k^1 - [y_k^1] = -\frac{d(S_1 - [S_1])}{dx_k^0}.$$

Comme les dérivées sont prises ici par rapport aux variables z_i, Y_i^0, x_k^0, y_k^0, c'est en fonction de ces variables qu'il conviendra d'exprimer S_1 et F_1 et non en fonction des z, des ρ, des w et des ω; remarquons :

1° Que, Y_i^0 étant égal à w_i plus une quantité indépendante des w,

$$\frac{dS_1}{dw_i} = \frac{dS_i}{dY_i^0},$$

de sorte que notre équation peut être remplacée par la suivante :

$$\Sigma a_i \frac{dS_1}{dY_i^0} = F_1 - \varphi_1;$$

2° Que toute fonction périodique des w_i est aussi une fonction périodique des Y_i^0 et que sa valeur moyenne par rapport aux Y_i^0 est la même que par rapport aux w_i.

Le calcul qui précède ne diffère pas d'ailleurs du calcul habituel; le mode d'exposition seul diffère.

Perturbations séculaires du second ordre.

Déterminons maintenant $[X_i^2]$, $[Y_i^2]$, $[x_k^1]$, $[y_k^1]$.

Nous avons

$$dS_2 = \Sigma(X_i^2\, dY_i^0 + X_i^1\, dY_i^1 - Y_i^2\, dz_i + x_k^2\, dy_k^0 - y_k^2\, dx_k^0 + x_k^1\, dy_k^1),$$

d'où

$$\frac{dS_2}{dw_i} = X_i^2 + \Sigma\left(x_k^1 \frac{dy_k^1}{dw_i} + X_k^1 \frac{dY_k^1}{dw_i}\right). \tag{31}$$

La valeur moyenne du premier membre est nulle, celle du second terme du second membre est connue; car on a, par exemple,

$$\left[x_k^1 \frac{dy_k^1}{dw_i}\right] = \left[(x_k^1 - [x_k^1]) \frac{d}{dw_i}(y_k^1 - [y_k^1])\right] + [x_k^1]\left[\frac{dy_k^1}{dw_i}\right],$$

équation dans le second membre de laquelle le premier terme est connu et le second nul.

Donc $[X_i^2]$ est connu.

Nous avons ensuite l'équation $\Theta_2 = \varphi_2$. Si nous prenons la valeur moyenne des deux membres, elle deviendra

$$\sum \frac{dR}{dx_k^0}[x_k^1] + \sum \frac{dR}{dy_k^0}[y_k^1] = \Phi + \varphi_2.$$

D'un autre côté, on trouve

$$d[S_1] = \Sigma([-Y_i^1]\,dz_i - [x_k^1]\,dy_k^0 - [y_k^1]\,dx_k^0),$$

ou, en regardant pour un instant les z comme des constantes,

$$d[S_1] = \Sigma([x_k^1]\,dy_k^0 - [y_k^1]\,dx_k^0).$$

Pour pouvoir appliquer le procédé II à ces équations, il convient de prendre pour variables nouvelles, au lieu des x_k^0 et y_k^0, les u_k et les v_k. Toute fonction développable suivant les puissances des x_k^0 et y_k^0 le sera également suivant celles des u_k et des v_k, et inversement.

On aura alors

$$x_k^0 = u_k + D_k, \qquad y_k^0 = v_k + C_k,$$

$$\frac{dR}{dx_k^0} = \frac{dR}{du_k} + A_k, \qquad \frac{dR}{dy_k^0} = \frac{dR}{dv_k} + B_k,$$

A_k, B_k, C_k, D_k étant des fonctions connues développables suivant les puissances des u et des v et *commençant par des termes du second degré*. D'où

$$\sum \frac{dR}{du_k}[x_k^1] + \frac{dR}{dv_k}[y_k^1] + A_k[x_k^1] + B_k[y_k^1] = \Phi + \varphi_2,$$

$$d[S_1] = \Sigma\{[x_k^1](dv_k + dC_k) + [y_k^1](du_k + dD_k)\}.$$

D'autre part, φ_2 devant être fonction seulement des ρ satisfera à l'équation

$$\frac{d\varphi_2}{du_k}\frac{dR_2}{dv_k} - \frac{dR_2}{du_k}\frac{d\varphi_2}{dv_k} = 0.$$

Nous reconnaissons les équations (21 *bis*) du problème H où $[x_k^1]$, $[y_k^1]$, u_k, v_k, R, R_2, Φ, φ_2 jouent respectivement le rôle de ξ_i, η_i, x_i, y_i, F, F_2, P, Q. Nous pourrons donc intégrer ces équations par le procédé H et nous aurons $[S_1]$, $[x_k^1]$, $[y_k^1]$ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances

des u_k et des v_k, ou, ce qui revient au même, suivant celles des $\rho_k e^{\pm \omega_k \sqrt{-1}}$. L'équation

$$[Y_i^1] = -\frac{d[S_1]}{dz_i}$$

nous donnera ensuite les $[Y_i^1]$.

Nous connaissons donc toutes les perturbations séculaires du second ordre.

Perturbations périodiques du second ordre.

Reprenons l'équation $\Theta_2 = \varphi_2$, qui, les $x_k^1, \ldots$ étant désormais connus, peut s'écrire

$$\Sigma a_i X_i^2 = \Phi - \varphi_2.$$

D'autre part, l'équation (31) peut désormais s'écrire

$$\frac{dS_2}{dw_i} = X_i^2 + \Phi.$$

Il vient donc

$$\Sigma a_i \frac{dS_2}{dw_i} = \Phi - \varphi_2.$$

Le second membre est une fonction périodique connue des w; et la valeur moyenne en est nulle puisque nous venons précisément de déterminer les perturbations séculaires du second ordre de façon à annuler cette valeur moyenne.

L'équation s'intégrera donc par le procédé A et nous donnera

$$S_2 - [S_2], \quad X_i^2, \quad Y_i^2 - [Y_i^2], \quad x_k^2 - [x_k^2], \quad y_k^2 - [y_k^2].$$

Et ainsi de suite.

Examen d'une difficulté.

Mais une grave difficulté, que j'ai, jusqu'ici, passée sous silence, se présente. Pour que les procédés F, G, H soient applicables, il faut qu'il n'y ait, entre les quantités que nous avons appelées λ_k, aucune relation linéaire à coefficients entiers. Or il n'en est pas ainsi dans le *Problème des trois corps :* l'un des λ_k est nul.

Il est facile de s'en rendre compte.

En effet, les équations canoniques

$$(32) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dR_2}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dR_2}{dx_i}$$

admettent trois intégrales correspondant aux trois intégrales des aires et qui peuvent s'obtenir de la façon suivante : R_2 est de la forme $R'_2 + R''_2$, où R'_2 dépend seulement des excentricités et des inclinaisons, c'est-à-dire des quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2 et où R''_2 dépend des quatre variables x_3, x_4, y_3, y_4 et est proportionnel au carré de l'angle infiniment petit des plans des deux orbites.

On en conclut aisément que les équations (32) admettent pour intégrales

$$\beta\sqrt{a}x_3 + \beta'\sqrt{a'}x_4 = \text{const.}, \qquad \beta\sqrt{a}y_3 + \beta'\sqrt{a'}y_4 = \text{const.}$$

Ces deux intégrales sont linéaires et leur présence suffit pour montrer que l'un des λ est nul; c'est, en effet, la fonction R qui joue le même rôle que la fonction F dans le problème F; et c'est R_2 qui joue le rôle de F_2 dans les problèmes D et F. Les quantités que nous avons appelées λ sont donc définies à l'aide des équations (32).

On pourrait donc craindre que la présence d'un coefficient λ égal à zéro n'empêche l'application des procédés F, G, H. Il n'en est rien, et il est aisé de tourner la difficulté de la façon suivante.

Considérons les intégrales des aires et écrivons-les sous la forme suivante :

$$U = U_0, \qquad V = V_0, \qquad W = W_0;$$

U, V, W sont des fonctions données des variables X, Y, x, y; U_0, V_0, W_0 sont des constantes.

Supposons qu'on ait pris pour premier plan de coordonnées le plan du maximum des aires, de façon que les constantes U_0 et V_0 soient nulles. Posons

$$F' = F + U^2 + V^2$$

et considérons les équations canoniques

$$(25\ bis) \qquad \frac{dX_i}{dt} = \frac{dF'}{dY_i}, \qquad \frac{dY_i}{dt} = -\frac{dF'}{dX_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF'}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF'}{dx_i},$$

qui sont les équations (25) où F est remplacé par F'.

Nous envisagerons celles des intégrales des équations (25) qui sont telles que $U = V = 0$; on voit immédiatement que ces intégrales appartiennent également aux équations (25 *bis*). Nous pouvons donc, au lieu des équations (25), envisager les équations (25 *bis*) qui sont de même forme, mais telles qu'aucun des coefficients λ_k ne soit nul.

La difficulté a donc disparu et le calcul peut se pousser jusqu'au bout sans

obstacle. Il faut maintenant, parmi les intégrales de (25 *bis*), distinguer celles qui conviennent également aux équations (25).

Pour cela, remarquons que les équations (25 *bis*) donnent

$$\frac{dW}{dt} = 0, \qquad \frac{dU}{dt} = WV, \qquad \frac{dV}{dt} = -2WU.$$

d'où

$$W = \text{const}; \qquad U + \sqrt{-1}\,V = Ce^{2tW\sqrt{-1}},$$

C étant une nouvelle constante.

La fonction $U + \sqrt{-1}\,V$ est donc égale, à un facteur constant près, à une exponentielle dont l'exposant est une fonction linéaire du temps; de plus, elle doit être développable suivant les puissances des $\rho e^{\pm\omega\sqrt{-1}}$; cela ne peut avoir lieu que si elle est divisible par une expression de la forme

$$\Pi \rho_k^{\alpha_k+\beta_k} e^{(\alpha_k-\beta_k)\omega_k\sqrt{-1}} e^{\sqrt{-1}(m_1 w_1 + m_2 w_2)},$$

où les α, les β et les m sont des entiers.

Dans le développement de $U + \sqrt{-1}\,V$ suivant les puissances des u et des v, considérons les termes du premier degré; on verrait qu'ils se réduisent à $\rho_4 e^{\omega_4\sqrt{-1}}$ (à un facteur constant près qui n'est pas nul).

Donc

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = m_1 = m_2 = 0, \qquad \alpha_4 = 1$$

et $U + \sqrt{-1}\,V$ est divisible par $\rho_4 e^{\omega_4\sqrt{-1}}$.

De même $U - \sqrt{-1}\,V$ est divisible par $\rho_4 e^{-\omega_4\sqrt{-1}}$.

Les intégrales de (25 *bis*) qui conviennent à (25) sont celles qui sont telles que $U = V = 0$; c'est-à-dire telles que $u_4 = v_4 = 0$; c'est-à-dire telles que $\rho = 0$ et qui, par conséquent, ne dépendent pas de l'argument ω_4; d'où cette conséquence :

Les intégrales des équations (25) ne dépendent pas de six arguments linéaires par rapport au temps, w_1, w_2, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, mais de cinq seulement w_1, w_2, ω_1, ω_2, ω_3.

Il n'est pas nécessaire, pour faire le calcul de ces intégrales, de former les équations (25 *bis*); il suffit d'opérer sur les équations (25) elles-mêmes; la considération des équations (25 *bis*) n'est qu'un artifice dont je me suis servi pour démontrer la possibilité du calcul.

Remarque. — Nous venons de voir que les coordonnées des trois corps sont fonctions de cinq arguments w_1, w_2, ω_1, ω_2, ω_3.

Leurs distances dépendront des différences de ces cinq arguments, c'est-à-dire de quatre arguments seulement.

Deuxième remarque. — Les intégrales (25 *bis*) pour lesquelles U et V ne sont pas nuls à la fois ne conviennent pas au système (25); les expressions des coordonnées en fonction du temps ne sont pas les mêmes avec les équations (25 *bis*) et avec les équations (25); mais les expressions des distances mutuelles des trois corps sont les mêmes.

Calcul des périodes.

Nous avons vu que les w et les ω sont des fonctions linéaires du temps. Les quantités

$$\frac{dw_i}{dt} = n_i, \qquad \frac{d\omega_k}{dt} = \nu_k$$

sont donc des constantes. Le calcul de ces constantes est facile. En effet, nous avons formé la fonction φ qui dépend des constantes z_i et ρ_k^2, et nous aurons

$$n_i = -\frac{d\varphi}{dz_i}, \qquad \nu_k = \frac{d\varphi}{\sqrt{-1}\, d(\rho_k^2)}.$$

La fonction φ étant développable suivant les puissances de μ et des ρ_k^2, il en sera donc de même de n_i et de ν_k; les n et les ν sont représentés par des séries ordonnées suivant les puissances de μ et des ρ_k^2 et dont les coefficients dépendent des z_i.

Il est aisé de voir que les n et les ν sont réels; en effet, les coordonnées des trois corps doivent êtres réelles; les termes de leurs développements devront donc être réels ou imaginaires conjugués deux à deux. Or chacun de ces termes est égal à une constante mutipliée par une exponentielle dont l'exposant est de la forme

$$\sqrt{-1}(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3),$$

les m et les α étant entiers. Ces exponentielles devront donc être ou réelles, ou imaginaires conjuguées deux à deux. Si deux exponentielles sont imaginaires conjuguées, elles devront le rester par continuité quand μ et les ρ sont très petits; or, dans ce cas, il est aisé de voir que deux exponentielles sont imaginaires conjuguées quand les exposants sont égaux et de signe contraire, et ne le sont que dans ce cas.

Dans tout couple d'exponentielles conjuguées, les exposants doivent être égaux et de signe contraire. Cela revient à dire que les w et les ω (et par conséquent les n et les ν) doivent êtres réels. C. Q. F. D.

D'autre part, il aisé de voir que le développement des n suivant les puissances de μ commence par un terme d'ordre zéro, tandis que le développement des ν commence par un terme d'ordre 1.

Il en résulte que les w varient très rapidement et les ω très lentement; ce qui justifie le nom de *termes séculaires* que nous avons donné aux termes qui ne dépendent que des ω.

Les quantités n_1 et n_2 représentent ce que l'on pourrait appeler les *moyens mouvements moyens*.

Les quantités ν sont au contraire de l'ordre des moyens mouvements des périhélies et des nœuds.

Résumé. — En résumé, les coordonnées des trois corps peuvent s'exprimer par des séries qui procèdent suivant les puissances d'un petit paramètre μ de l'ordre des masses et de plusieurs constantes ρ de l'ordre des excentricités et des inclinaisons; ces séries sont des fonctions périodiques de cinq arguments

$$w_i = n_i t + \varpi_i, \qquad \omega_i = \nu_i t + \varepsilon'_i,$$

où les ϖ_i et les ε_i sont des constantes d'intégration. Les n_i et les ν_i sont des fonctions de μ, des ρ et de deux nouvelles constantes z_1 et z_2. et peuvent se développer suivant les puissances de μ et des ρ^2.

Les coefficients de nos séries dépendent encore des constantes z_1 et z_2.

Les carrés de ces constantes z peuvent être assimilés à des *grands axes moyens*.

La constante ϖ_i correspond à la longitude de l'époque, tandis que les ρ jouent un rôle analogue à celui des excentricités et des inclinaisons et les ω un rôle analogue à celui des longitudes des périhélies et des nœuds.

Inutile d'ajouter que ces résultats s'étendent sans changement au cas où l'on a plus de trois corps.

Ce calcul n'est pas sans analogie avec ceux que j'ai exposés dans les Chapitres XIV et XV de mon Ouvrage sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Il en diffère cependant et j'y ai apporté d'importantes simplifications.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE [1]

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 98, p. 793-795 (31 mars 1884).

Dans l'application de sa méthode générale pour l'étude des mouvements des corps célestes, M. Gyldén a été conduit à une équation de la forme suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_0 + x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^m\varphi_m + \ldots, \tag{1}$$

où les φ sont des séries trigonométriques. MM. Gyldén et Lindstedt ont donné des procédés d'intégration de cette équation par approximations successives. Cette circonstance peut donner quelque intérêt à l'étude de cette équation différentielle.

Je supposerai, pour fixer les idées, que le terme tout connu φ_0 est identiquement nul, et que les autres φ ne dépendent que d'un seul argument, par exemple que ces fonctions soient développées suivant les cosinus et les sinus des multiples de t, de façon à admettre la période 2π.

Posons

$$y = \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots.$$

Soit maintenant F une fonction de x, de y et de t,

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \ldots, \tag{2}$$

où F_m est un polynome homogène de degré m en x et y, ayant pour coefficients des fonctions périodiques de t de période de 2π. Soit ensuite

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \ldots. \tag{3}$$

[1] *Voir* aux Notes, *Séries*.

où Φ_m est un polynome homogène de degré m en x et y, ayant pour coefficients des fonctions périodiques de t. Nous allons chercher à déterminer les m premiers termes de la série (2), de façon que les m premiers termes de la série (3) soient identiquement nuls. On est conduit à l'équation suivante, qui définit F_m quand on connaît $F_2, F_3, \ldots, F_{m-1}$:

$$(4) \qquad \frac{\partial F_m}{\partial t} + \frac{\partial F_m}{\partial x} y + \frac{\partial F_m}{\partial y} x \varphi_1 + \sum \frac{\partial F_p}{\partial y} x^{m-p+1} \varphi_{m-p+1} = 0,$$

où p varie sous le signe Σ depuis 2 jusqu'à $m-1$.

Il semble, au premier abord, que l'intégration de cette équation introduira des termes séculaires dans l'expression de F_m. Il n'en est rien. Les termes séculaires sont tous nuls.

Il en résulte qu'il existe toujours une série de la forme (2) qui satisfait *formellement* à l'équation $\frac{dF}{dt} = 0$; mais, comme cette série n'est pas convergente, en général, on pourrait croire que l'on ne peut tirer aucune conclusion de l'existence de cette série.

Ce serait une erreur, et, pour le faire comprendre, je vais ajouter au second membre de l'équation (1) un terme $\psi x^p y^q$, de façon que cette équation devienne

$$(1\ bis) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^m\varphi_m + \ldots + \psi x^p \left(\frac{dx}{dt}\right)^q,$$

ψ étant une fonction périodique de t de période 2π. Cherchons ensuite à former une série

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_m + \ldots$$

qui satisfasse formellement à l'équation $\frac{dF}{dt} = 0$. On verrait, dans l'un des termes F_m de cette série, la variable t sortir des signes trigonométriques. On en conclurait l'existence d'une fonction $f(x, y, t)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° C'est un polynome entier en x et y, dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t de période 2π.

2° Quand f est très petit, x et y sont très petits et réciproquement, quand x et y sont très petits, f est très petit.

3° Quand f est inférieur à une certaine limite f_0, sa dérivée totale $\frac{df}{dt}$ est toujours de même signe, par exemple positive.

Il en résulte que, si la valeur initiale de f est inférieure à f_0, f ira en croissant jusqu'à ce qu'il ait atteint et dépassé la valeur f_0, et, après avoir franchi cette limite, il ne pourra jamais redevenir inférieur à f_0. En d'autres termes, si x et y sont originairement très petits, non seulement ils ne resteront pas très petits, mais ils ne pourront jamais le redevenir après avoir cessé de l'être.

Tel est le cas général, et, dans le cas particulier où nous nous étions placés d'abord, la disparition des termes séculaires prouve précisément l'impossibilité de trouver une fonction f dont la dérivée totale $\frac{\partial f}{\partial t}$ soit toujours de même signe quand x et y sont suffisamment petits.

Il résulte de là et de considérations que je ne puis développer ici que les quantités x et y pourront cesser d'être très petites, *mais pour le redevenir ensuite*. Il y a exception, toutefois, quand un certain nombre est commensurable.

Dans le cas où la série (2) serait convergente, x et y resteraient toujours très petits.

SUR UNE MÉTHODE DE M. LINDSTEDT

Bulletin astronomique, t. 3, p. 57-61 (février 1886).

L'équation suivante :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \alpha(x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^p\varphi_p),$$

où α est très petit et où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sont des sommes de termes trigonométriques en t, a été l'objet de travaux nombreux et approfondis, parmi lesquels je citerai une méthode d'intégration de M. Lindstedt [*Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Storungstheorie* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. 31, n° 4); analysé dans le *Bulletin astronomique*, t. 1, p. 302]. Je demanderai la permission de rappeler brièvement cette méthode, en la représentant sous une forme particulière.

Posons

$$(2) \qquad x = x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^q x_q,$$

$x_0, x_1, \ldots, x_q$ étant des sommes de termes de la forme suivante :

$$A\cos(mw + \lambda t + h).$$

Dans cette expression, m est un entier et w est une variable auxiliaire égale à

$$w = \mu t + \varpi,$$

où ϖ est une constante d'intégration et où

$$\mu = \mu_0 + \alpha\mu_1 + \ldots + \alpha^q\mu_q.$$

Je dis qu'il sera possible de choisir les fonctions trigonométriques x_0, $x_1, \ldots, x_q$ et les constantes $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_q$, de telle sorte que, si l'on substitue dans l'équation (1) la valeur (2) de x, la différence des deux

membres de cette équation contienne en facteur α^{q+1}, ou, en d'autres termes, que cette équation soit satisfaite aux termes près d'ordre $q+1$, α étant du premier ordre.

En effet, on trouve d'abord aisément

$$x_0 = \cos w, \qquad \mu_0 = n.$$

Écrivons maintenant l'équation (1) sous la forme suivante, en mettant en évidence les dérivées partielles de x par rapport à t et à w,

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{d^2x}{dt\,dw} + \mu^2\frac{d^2x}{dw^2} + n^2x = \alpha(x\xi_1 + x^2\xi_2 + \ldots + x^p\xi_p) = \alpha F.$$

Si dans F nous remplaçons x par sa valeur (2), nous pourrons développer cette fonction F suivant les puissances de α, et il viendra

$$F = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \ldots.$$

Il est clair que F_0 dépendra seulement de x_0 et de x_1, F_2 de x_0, x_1 et x_2, ...

Posons

$$\mu^2 = \nu_0 + \alpha\nu_1 + \alpha^2\nu_2 + \ldots.$$

Ici encore ν_0 dépendra de μ_0, ν_1 de μ_0 et μ_1, ...

Posons encore, pour abréger,

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dt^2} + 2n\frac{d^2u}{dt\,dw} + n^2\frac{d^2u}{dw^2} + n^2u,$$

$$A_{i,k} = 2\mu_i\frac{d^2x_k}{dt\,dw} + \nu_i\frac{d^2x_k}{dw^2},$$

$$B_k = A_{1,k-1} + A_{2,k-2} + \ldots + A_{k-1,1}.$$

Nous aurons alors, pour déterminer successivement les x et les μ, la suite d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta x_1 - \nu_1\cos w &= F_0, \\ \Delta x_2 + B_2 - \nu_2\cos w &= F_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ \Delta x_k + B_k - \nu_k\cos w &= F_{k-1}. \end{aligned}$$

Si $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sont connus ainsi que $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$, on connaît F_{k-1} et B_k qui sont des séries trigonométriques. On déterminera ensuite μ_k et par conséquent ν_k, de telle façon que l'équation

$$\Delta x_k = F_{k-1} + \nu_k\cos w - B$$

puisse être satisfaite par une série trigonométrique x_k.

Telle est la méthode très simple de M. Lindstedt. Il est aisé de voir comment il faut déterminer ν_k; en effet, pour que l'équation

$$\Delta u = W,$$

où le second membre est une série trigonométrique en t et w puisse être satisfaite par une série trigonométrique u, il faut et il suffit que W ne contienne ni terme en $\cos w$, ni terme en $\sin w$. Or nous pouvons disposer de ν_k, de façon à détruire les termes en $\cos w$; mais nous ne pourrions pas de même détruire les termes en $\sin w$, s'il y en avait dans $F_{k-1} - B_k$.

On voit immédiatement qu'on ne peut en rencontrer dans les premières approximations; mais il n'est pas évident qu'il en serait de même dans les approximations suivantes. Aussi M. Lindstedt croyait-il que sa méthode n'était applicable jusqu'au bout que s'il n'existait aucune relation linéaire à coefficients entiers entre les coefficients du temps dans les divers termes de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Cette restriction qui serait très gênante est inutile; je vais le démontrer en m'appuyant sur le théorème de Green. Pour cela, je supposerai d'abord que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ne contiennent qu'un seul argument, c'est-à-dire (en choisissant convenablement l'unité de temps) que

$$\varphi_k = \Sigma A \cos(mt + h) \quad (m \text{ étant entier}), \qquad \varphi_k(t + 2\pi) = \varphi_k(t).$$

Posons

$$y = \frac{dx}{dt}, \qquad z = t,$$

et regardons x, y et z comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Posons encore

$$X = y, \qquad Y = -n^2 x + \alpha(x\varphi_1 + \ldots + x^p \varphi_p), \qquad Z = 1.$$

Soient S une surface fermée quelconque, $d\omega$ l'élément de cette surface, a, b, c les cosinus directeurs de la normale. Le théorème de Green nous donnera

$$\int_S (Xa + Yb + Zc)\, d\omega = 0,$$

car on voit aisément qu'on a

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

Revenons à la méthode de M. Lindstedt et supposons qu'après avoir conduit avec succès les k premières approximations, on soit arrêté à

la $(k+1)^{\text{ième}}$ par la présence d'un terme $S \sin w$ dans $F_{k-1} - B_k$. Nous résoudrons alors l'équation

$$\Delta x'_k = F_{k-1} + \nu_k \cos w - B_k - S \sin w,$$

en choisissant ν_k de façon à détruire les termes en $\cos w$ dans le second membre. Alors x'_k sera une série trigonométrique en t et w. Posons maintenant

$$x = f(t, w) = x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^{k-1} x_{k-1} + \alpha^k x'_k,$$

$$y = \psi(t, w) = \frac{df}{dt} + \mu \frac{df}{dw}, \qquad z = t.$$

Si nous faisons parcourir à t et à w toutes les valeurs comprises entre zéro et 2π, le point x, y, z parcourra une certaine surface Σ; cette surface ne sera pas fermée, mais elle sera limitée aux deux plans $z = 0$, $z = 2\pi$. Pour achever d'enclore un volume, il faudra adjoindre à la surface Σ une portion de chacun de ces deux plans; nous aurons alors une sorte de cylindre, avec sa surface latérale Σ, sa base B dans le plan $z = 0$, et sa base B′ dans le plan $z = 2\pi$. L'intégrale $\int (Xa + Yb + Zc)\, d\omega$, étendue à la surface totale de cette sorte de cylindre, devra être nulle. Mais les intégrales relatives aux deux bases se détruisent, puisque x et y sont des fonctions périodiques de t avec la période $2w$; donc l'intégrale étendue à la surface Σ est nulle.

Évaluons cette intégrale d'une autre façon.

Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{M} = \left(\frac{df}{dw}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dw}\right)^2 + \left(\frac{df}{dt}\frac{d\psi}{dw} - \frac{df}{dw}\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

d'où

$$a = -M\frac{d\psi}{dw}, \qquad b = M\frac{df}{dw}, \qquad c = M\left(\frac{df}{dt}\frac{d\psi}{dw} - \frac{df}{dw}\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Il viendra alors

$$Xa + Yb + Zc = \frac{df}{dw}\left(Y - \frac{d^2 f}{dt^2} - 2\mu\frac{d^2 f}{dt\,dw} - \mu^2\frac{d^2 f}{dw^2}\right) M,$$

avec

$$Y = -n^2 f + \alpha(f\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \ldots + f^p\varphi_p).$$

Si l'on développe $Xa + Yb + Zc$ suivant les puissances croissantes de α, il viendra

$$Xa + Yb + Zc = -\alpha^k M_0 S \sin^2 w + \alpha^{k+1}\theta_1 + \alpha^{k+2}\theta_2 + \ldots,$$

où θ_1, θ_2, ... sont des séries trigonométriques qu'il est inutile de déterminer davantage, et où

$$M_0 = \frac{1}{\sin^2\varpi + n^2\cos^2\varpi}$$

est le premier terme du développement de M suivant les puissances de α.

Notre intégrale devant être nulle, quel que soit α, les coefficients des diverses puissances de α dans le développement de cette intégrale devront être nuls, et ce sera vrai, en particulier, du coefficient de α_k : on devra donc avoir

$$\int M_0 S \sin^2\varpi \, d\omega = 0,$$

et, comme $M_0 \sin^2\varpi$ est essentiellement positif, cela ne peut avoir lieu que si S est nul. Donc, dans la méthode de M. Lindstedt, aucune des approximations n'introduira de terme en $\sin\varpi$; donc la méthode n'est jamais en défaut.

J'ai supposé, il est vrai, que les séries trigonométriques φ_1, φ_2, ... ne contenaient qu'un seul argument; mais il est aisé d'étendre le résultat au cas général. Si, en effet, il y en avait deux par exemple et que les termes des φ fussent de la forme $A\cos(m\beta t + n\gamma t + h)$, m et n étant entiers et β et γ deux constantes, et s'il s'introduisait un terme $S\sin\varpi$ à la $k^{\text{ième}}$ approximation, S devrait être une fonction continue de β et de γ; mais cette fonction est nulle si $\frac{\beta}{\gamma}$ est commensurable, c'est-à-dire si les deux arguments se réduisent à un seul; elle est donc toujours nulle.

La même analyse pourrait s'étendre aux équations plus générales considérées par M. Lindstedt, mais j'ai à peine besoin de dire que la question de convergence est toujours réservée.

SUR LES SÉRIES DE M. LINDSTEDT

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 108, p. 21-24 (7 janvier 1889).

Il est une équation qu'on rencontre souvent en Mécanique céleste et qui a déjà fait l'objet de bien des recherches : c'est la suivante :

$$(1) \qquad \frac{d^2\rho}{dx^2} + n^2\rho = \mu\varphi(\rho, x);$$

n est un nombre incommensurable, μ un paramètre très petit. Quant à $\varphi(\rho, x)$, c'est une somme de termes de la forme suivante :

$$\varphi(\rho, x) = \Sigma A \rho^m \cos(\lambda x + \alpha).$$

m est un entier, A, λ et α sont des constantes quelconques. Nous pourrons toujours poser

$$\psi(\rho, x) = \Sigma A \frac{\rho^{m+1}}{m+1} \cos(\lambda x + \alpha), \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = \frac{d\psi}{d\rho}.$$

M. Lindstedt a proposé, pour l'intégration de cette équation, des séries qui ne sont pas convergentes au sens rigoureux du mot, mais qui peuvent rendre de grands services dans la pratique, parce que les termes vont d'abord en décroissant très rapidement et qu'en prenant un petit nombre de ces termes on ne commet qu'une erreur assez faible, comme dans la série de Stirling.

Je me propose de présenter la méthode de Lindstedt à un point de vue nouveau, en la rattachant aux principes des *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi.

Nous pouvons remplacer l'équation (1) par les suivantes :

$$\frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -n^2\rho + \mu\frac{d\psi}{d\rho}, \qquad \frac{dx}{dt} = 1.$$

En posant

$$H = \frac{\sigma^2}{2} + n^2 \frac{\rho^2}{2} - \mu\psi + p,$$

il vient

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dH}{d\rho}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp},$$

auxquelles ont peut joindre (puisque p est une variable auxiliaire complètement arbitraire)

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}.$$

Changeons de variables en posant

$$\rho = \sqrt{\frac{2q}{n}} \sin y, \qquad \sigma = \sqrt{2nq} \cos y,$$

il viendra

$$H = p + n^2 q - \mu\psi(q, y, x),$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{dH}{dy}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dH}{dq}.$$

Les équations différentielles se présentant sous la forme canonique, on voit qu'il suffit pour les intégrer de connaître l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles $H = C$, où l'on regarde p et q comme les dérivées d'une même fonction z et où C est une constante arbitraire. Cette équation s'écrit donc

$$\frac{dz}{dx} + n^2 \frac{dz}{dy} - \mu\psi\left(\frac{dz}{dy}, y, x\right) = C.$$

Nous allons chercher à développer la fonction inconnue z suivant les puissances de μ, en écrivant

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \mu z_1 + \mu^2 z_2 + \ldots, \\ p &= p_0 + \mu p_1 + \mu^2 p_2 + \ldots, \\ q &= q_0 + \mu q_1 + \mu^2 q_2 + \ldots, \\ q_i &= \frac{dz_i}{dy}, \qquad p_i = \frac{dz_i}{dx}. \end{aligned}$$

Si dans ψ nous remplaçons q par ce développement, nous trouverons

$$\psi(q, y, x) = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \ldots;$$

ψ_0 dépendra de q_0 seulement, ψ_1 de q_0 et de q_1, ψ_2 de q_0, q_1 et q_2, ψ_3 de q_0, q_1, q_2 et q_3, ... De plus, les ψ_i seront de la forme suivante. Si q_0 est supposé donné, ψ_i pourra se développer suivant les puissances croissantes de q_1,

$q_2, \ldots, q_i$; le coefficient de chaque terme de ce développement sera lui-même une somme de termes de la forme suivante :

$$(2) \qquad A\cos(my + \lambda x + \alpha),$$

m étant un entier, A, λ, et α des constantes quelconques.

Cela posé, on aura pour déterminer successivement les fonctions z_p la suite d'équations récurrentes

$$(3) \qquad p_0 + n^2 q_0 = C, \qquad p_1 + n^2 q_1 = \psi_0, \qquad \ldots, \qquad p_i + n^2 q_i = \psi_{i-1}.$$

Nous prendrons pour p_0 et q_0 deux constantes satisfaisant à la première des équations (3) et nous aurons, par conséquent, $z_0 = p_0 x + q_0 y$; la constante q_0, que nous supposerons différente de zéro, sera notre constante d'intégration.

Quand on connaîtra $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$, on connaîtra ψ_{i-1} et l'équation

$$(4) \qquad p_i + n^2 q_i = \psi_{i-1}$$

déterminera z_i.

Convenons d'appeler, pour abréger, fonction trigonométrique de x et de y toute somme de termes de la forme (2).

Je dis que p_i et q_i seront des fonctions trigonométriques de x et de y. Supposons, en effet, que cela soit vrai des dérivées de $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$; je dis que cela sera vrai des dérivées de z_i.

En effet, cela sera vrai d'abord de ψ_{i-1}, de sorte que l'équation (4) s'écrira

$$p_i + n^2 q_i = A_0 + \Sigma A\cos(my + \lambda x + \alpha).$$

Dans le second membre, j'ai mis en évidence le terme tout connu A_0 de la fonction trigonométrique ψ_{i-1}. Nous tirerons de là

$$z_i = A_0 x + \sum \frac{A\sin(my + \lambda x + \alpha)}{\lambda + mn^2}, \qquad q_i = \sum \frac{A m\cos(my + \lambda x + \alpha)}{\lambda + mn^2}.$$

On voit que q_i, et par conséquent q, est une fonction trigonométrique de x et de y.

Nous possédons donc z sous la forme d'une fonction trigonométrique de x et de y, dépendant en outre de deux constantes arbitraires C et q_0. L'intégrale générale de l'équation (1) est alors

$$q = \frac{dz}{dy}, \qquad \frac{dz}{dq_0} = q'_0, \qquad \frac{dz}{dC} = x = t,$$

q'_0 étant une nouvelle constante arbitraire.

Il est aisé d'en déduire les séries de M. Lindstedt sous la forme que le savant astronome leur a donnée.

On remarquera que cette méthode d'exposition met en évidence la forme purement trigonométrique de la solution, sans qu'on soit obligé de recourir au théorème de Green et de l'artifice que j'ai employé dans le *Bulletin astronomique* pour démontrer la légitimité de la méthode de M. Lindstedt.

Ce que je viens de dire s'étend sans peine à des cas beaucoup plus généraux, et, en particulier, au problème des trois corps. Je dois toutefois faire une remarque.

Pour toute autre loi d'attraction que celle de Newton, l'application de la méthode précédente au problème des trois corps ne présenterait aucune difficulté; avec la loi de Newton, au contraire, elle ne réussirait pas si l'on prenait pour point de départ l'orbite képlérienne; on est donc obligé de prendre comme première approximation l'une des orbites intermédiaires de M. Gyldén.

SUR UN PROCÉDÉ DE VÉRIFICATION, APPLICABLE AU CALCUL DES SÉRIES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 120, p. 57-59 (14 janvier 1895).

Dans mon Ouvrage intitulé *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, j'ai montré comment on pouvait représenter les coordonnées des astres par des séries trigonométriques et je me suis particulièrement étendu sur ce sujet dans les Chapitres XIV et XV.

Supposons que l'on étudie le mouvement de trois corps, par exemple du Soleil et de deux planètes; nous rapporterons les deux planètes à une origine mobile mais à des axes de direction fixe; la première planète sera rapportée à des axes passant par le Soleil et la seconde à des axes passant par le centre de gravité du Soleil et de la première planète.

Soient x_1, x_2, x_3 les trois coordonnées de la première planète, x_4, x_5, x_6 celles de la seconde; soient y_1, y_2, y_3 les trois composantes de la quantité de mouvement de la première planète; soient y_4, y_5, y_6 les mêmes composantes pour la seconde planète. Il s'agit, bien entendu, des quantités de mouvement de ces planètes dans le mouvement relatif par rapport aux axes mobiles auxquels elles sont respectivement rapportées et en leur attribuant des masses fictives convenablement choisies qui s'expriment simplement en fonction des masses réelles.

Dans l'Ouvrage que je viens de citer, j'ai montré que les x_i et les y_i peuvent s'exprimer de la façon suivante : Soit μ un paramètre très petit de l'ordre des

masses, soient ξ_i et $\varpi_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$ douzes constantes d'intégration dont quatre, que j'appelle $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$, sont très petites.

Soient $n_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$ six quantités s'exprimant à l'aide de ces constantes; les n_i seront développés suivant les puissances de μ et de $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$; les coefficients du développement dépendront encore de ξ_1 et de ξ_2; les n_i seront donc ainsi fonctions de μ et des ξ_i, mais indépendants des ϖ_i. Quatre des n_i à savoir n_3, n_4, n_5, n_6 seront très petits. Les deux autres, n_1 et n_2, correspondent aux moyens mouvements; ce sont pour ainsi dire les moyens mouvements moyens.

Posons enfin

$$\omega_i = n_i t + \varpi_i.$$

Alors j'ai montré que les x_i et les y_i sont développables suivant les puissances de μ, ξ_3, ξ_4, ξ_5 et ξ_6; chaque terme du développement est une fonction périodique des ω, de période 2π, et dépend en outre de ξ_1 et de ξ_2.

Les douze constantes ainsi introduites rappellent en quelque sorte les « éléments absolus » de M. Gyldén; ξ_1 et ξ_2 jouent un rôle analogue à celui des grands axes; $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ sont analogues aux excentricités et aux inclinaisons; ω_1 et ω_2 aux longitudes moyennes; $\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ aux longitudes des périhélies et des nœuds.

Ces séries jouissent de certaines propriétés que la symétrie rend évidentes. Ainsi les séries qui représentent x_i et y_i seront respectivement de la forme

$$x_i = \Sigma A \mu^k \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4} \xi_5^{k_5} \xi_6^{k_6} \cos(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_6 \omega_6),$$
$$y_i = \Sigma B \mu^k \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4} \xi_5^{k_5} \xi_6^{k_6} \sin(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_6 \omega_6).$$

Les A et les B sont des fonctions de ξ_1 et de ξ_2; les m et les k sont des entiers; mais ces entiers ne sont pas quelconques; les k sont des entiers positifs, les m peuvent être positifs, négatifs ou nuls; on aura

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_6 = 0.$$

Enfin $|m_i|$ (où $i = 3, 4, 5$ ou 6) sera plus petit que k_i et de même parité que k_i.

La constante des forces vives C sera une fonction des ξ_i, ou bien encore (puisque les n_i sont six fonctions indépendantes des ξ_i) ce sera une fonction des n_i. Je préfère supposer C exprimé en fonction des n_i.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que les séries obtenues ainsi ne sont pas convergentes, mais qu'elles peuvent néanmoins, à la façon de la série de Stirling, rendre des services aux astronomes.

Elles sont donc importantes et comme les calculs qui y conduisent sont délicats et difficiles, il n'est pas sans intérêt de connaître des procédés de vérification.

Un premier procédé consiste à substituer ces séries dans le premier membre de l'équation des forces vives, ou des équations des aires. Ces premiers membres doivent se réduire à des fonctions des ξ_i seulement.

Mais il y a un autre procédé de vérification, qui ne s'aperçoit pas aussi immédiatement, et c'est sur ce point que je désirerais attirer l'attention.

Les égalités suivantes doivent être identiquement vérifiées :

$$\sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{d\xi_k} - y_i \frac{dx_i}{d\xi_k}\right) = H_i, \qquad \sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{d\omega_k} + y_i \frac{dx_i}{d\omega_k}\right) = 3\frac{dC}{dn_k}.$$

Les H_i sont des fonctions des ξ seulement, indépendantes des ω.

Quant à C, c'est la constante des forces vives supposée exprimée en fonction des n_i.

On peut ajouter, et c'est d'ailleurs une conséquence des égalités précédentes, que l'expression $\Sigma x_i dy_i$ est une différentielle exacte quand on y regarde les ξ comme des constantes et les ω comme six variables indépendantes.

SUR LA DIVERGENCE DES SÉRIES
DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 122, p. 497-499 (2 mars 1896).

M. Hill a publié, dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* [1], une Note intitulée : *On the convergence of the series used in the subject of perturbations*, et dont les résultats semblent au premier abord en contradiction avec ceux que j'ai obtenus. Je crois donc nécessaire de montrer que cette contradiction n'est qu'apparente; j'ajouterai même que le principal théorème de M. Hill avait déjà été démontré par moi.

Je rappelle succinctement les propositions que j'ai énoncées (*Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II, Chap. XIII) :

Mettons les équations de la Mécanique céleste sous la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

La fonction F est périodique par rapport aux y_i; elle dépend des x_i d'une manière quelconque. De plus, certains de ses termes sont très petits par rapport aux autres, et nous pouvons mettre en évidence l'ordre de grandeur de ces différents termes en introduisant une quantité très petite μ et en développant F suivant les puissances de μ sous la forme

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots;$$

F_n ne dépend pas de y_i.

[1] Vol. II, janvier 1896, p. 93.

On trouve alors qu'on peut satisfaire formellement aux équations (1) par des séries de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots \\ y_i = w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les x_i^k et les y_i^k sont des fonctions périodiques des quantités

$$w_i = n_i t + \varpi_i;$$

les ϖ_i sont des constantes d'intégration; les n_i sont des constantes (dites *moyens mouvements*) qui sont développables en séries ordonnées suivant les puissances de μ.

Les x_i^k ou y_i^k sont eux-mêmes développables en séries de la forme

$$(3)\qquad x_i^k (\text{ou } y_i^k) = \Sigma A \cos(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h).$$

On peut alors se demander :

1° Si les séries (3) convergent;

2° Si [en admettant que les séries (3) convergent et que, par conséquent, on puisse former les séries (2)] les séries (2) convergent.

Pour simplifier l'exposition de cette discussion, je supposerai deux arguments seulement w_1 et w_2 et deux moyens mouvements n_1 et n_2. Commençons par l'étude des séries (3).

Si le rapport des moyens mouvements est commensurable, un des termes de la série devient infini; laissons de côté ce cas.

J'ai montré (p. 96, 97) que les valeurs incommensurables du rapport des moyens mouvements peuvent se répartir en deux catégories : celles pour lesquelles la série converge, celles pour lesquelles la série diverge, et que dans tout intervalle, *si petit qu'il soit*, il y a des valeurs de la première catégorie et des valeurs de la deuxième.

J'ai démontré, en particulier, que la série converge pour les valeurs incommensurables dont le carré est commensurable.

C'est ce dernier résultat que retrouve M. Hill par une démonstration de tout point semblable à la mienne, mais il le généralise en montrant qu'il en est de même pour toutes les valeurs qui satisfont à une équation algébrique à coefficients entiers.

Il n'y a donc, on le voit, aucun désaccord.

Le point essentiel n'en subsiste pas moins, quelle que soit l'approximation

avec laquelle les moyens mouvements seront connus; nous ne pourrons assigner une limite supérieure à l'erreur commise en s'arrêtant à un terme de la série.

La convergence de la série ne peut être uniforme.

Passons maintenant au second point : je veux dire à la convergence des séries (2). Cette question n'est pas abordée par M. Hill.

Il semble d'abord qu'elle ne doive même pas se poser, puisque la convergence des séries (3), quand elle a lieu, n'est pas uniforme. Mais un artifice très simple permet de former néanmoins les séries (2).

Si, en effet, les fonctions F_1, F_2, ... ne contiennent chacune qu'un nombre fini de termes, chacune des séries (3) se réduira également à un nombre fini de termes. Sa convergence sera donc assurée.

A la vérité, il n'en est pas ainsi quand μ représente une des masses perturbatrices; il en serait ainsi, au contraire, dans la théorie de la Lune, ou bien encore si l'on développait à la fois suivant les puissances des masses et des excentricités.

Dans tous les cas, μ ne joue d'autre rôle que celui de quantité très petite, et rien n'empêche de grouper ensemble, sous la notation $\mu^n F_n$, tous les termes dont les coefficients sont des quantités du $n^{\text{ième}}$ ordre de grandeur.

Grâce à cet artifice, les séries (3) deviennent convergentes et il s'agit d'envisager les séries (2).

Malheureusement, ici, le mode de démonstration employé par M. Hill, et dont je m'étais également servi pour les séries (3), cesse d'être applicable; je n'ai donc rien à changer à mes conclusions, dont il importe de bien se rappeler la portée exacte, que j'ai cherché à préciser autant que possible.

SUR LA DIVERGENCE
DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 122, p. 557-559 (9 mars 1896).

J'ai eu l'occasion de parler de cette question à propos d'un travail de M. Hill inséré dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*. M. Hill ayant publié, dans le même Recueil [1], un nouvel article sur le même sujet, je me vois forcé d'y revenir, car le malentendu me semble s'être aggravé, et je crois nécessaire de donner quelques explications complémentaires.

Il s'agit des preuves que j'ai données de la divergence des séries de M. Lindstedt :

Another method, dit M. Hill (p. 134), is derived from the principle that two caracteristic exponents vanish for every uniform integral that exists; but the integrals derivable from the series of Delaunay, Newcomb and Lindstedt are valid only for a limited range in the values of the linear variables. For instance, in the problem of the three bodies, if the deformation of the triangle formed by these bodies is such that we cannot find any two sides, one of which sustains to the other an invariable relation of greater or less, we cannot apply the mentioned series. (Tel serait, par exemple, le cas d'une comète troublée par Jupiter, si la distance aphélie est supérieure à celle de Jupiter et la distance périhélie inférieure à celle de la planète).

Ainsi, dans la pensée de M. Hill, les séries convergeraient pourvu que les variables satisfassent à certaines inégalités. et mon argumentation prouverait seulement qu'elles ne peuvent pas converger pour toutes les valeurs des variables sans aucune exception. Il est aisé de voir, au contraire, que l'argument conserve sa valeur et permet d'établir que ces séries ne peuvent pas

(1) Vol. II, février 1896, p. 125.

converger dans toute l'étendue d'un domaine quelconque, pourvu qu'il y ait, dans ce domaine, une solution périodique; or, il y a des solutions périodiques dans tous les domaines, si petits qu'ils soient (au moins pour les valeurs très petites des masses et des excentricités). Si donc les séries convergent, ce ne peut être que pour certaines valeurs *discrètes* des variables et non pour toutes les valeurs comprises entre certaines limites, quelque resserrées que soient ces limites.

In the third place, continue M. Hill, an appeal is made to the alleged non existence of analytic and uniform integrals beyond those already known. (M. Hill expose ensuite que deux hypothèses sont possibles). Now in case we are obliged to accept the first conclusion, were it only but once, M. Poincaré has demonstrated the non-existence of integrals; but, granting that it is proper in every case to accept the latter conclusion, the demonstration fails. Now he declines to consider the latter alternative, saying that he does not believe that any problem of Dynamics, presenting itself naturally, occurs where the right members of the mentioned equations would all vanish.

J'ai dit, en effet (*Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 245) :

Ces considérations ne présentent pas, d'ailleurs, d'intérêt pratique et je ne les ai présentées ici que pour être complet et rigoureux. On peut évidemment construire artificiellement des problèmes où ces diverses circonstances se rencontreront; mais, dans les problèmes de Dynamique qui se posent naturellement, il arrivera toujours, ou bien que toutes les classes seront singulières, ou bien qu'elles seront toutes ordinaires, à l'exception d'un nombre fini d'entre elles.

La question demeure donc réservée en ce qui concerne un problème de Dynamique quelconque, mais, en ce qui concerne le problème des trois corps en particulier, j'ai démontré, dans le Chapitre VI, n°s 102 et 103, que toutes les classes sont ordinaires.

La seconde alternative se trouve donc écartée.

Enfin, M. Hill ajoute encore ce qui suit :

M. Poincaré appeals in another place to the fact that the Lindstedt series, if convergent, would establish the non-existence of asymptotic solutions. But this observation is irrelevant for the reason that the domains of the two things are quite distinct. In any case where Lindstedt series are applicable, there are no asymptotic solutions, and, where there are asymptotic solutions, Lindstedt's series would be illusory.

M. Hill paraît croire qu'il ne peut y avoir de solutions asymptotiques que si les variables satisfont à certaines inégalités; et, en effet, il avait dit quelques pages plus haut :

In all the cases presented by astronomy, where, on account of the near approach to circular motion, a periodic solution can be taken as a first approximation, it appears that the squares of the characteristic exponents are real and negative. Thus, there is no call here to consider this sort of solution (les solutions asymptotiques).

Il y a là une erreur manifeste; car, en se bornant, pour simplifier, au problème dit *restreint* (inclinaison nulle, masse de la planète troublée nulle, excentricité de la planète troublante nulle), on voit que dans tout domaine, si petit qu'il soit, il y a des solutions asymptotiques, au moins pour des valeurs suffisamment petites des masses perturbatrices.

Si M. Hill a cru le contraire, c'est qu'il n'a envisagé que les solutions périodiques de la première sorte; mais l'application de la méthode de Delaunay suffirait pour mettre en évidence l'existence des solutions asymptotiques.

SUR

LA FAÇON DE GROUPER LES TERMES DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES QU'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE CÉLESTE

Bulletin astronomique, t. 15, p. 289-310 (août 1898).

1. J'ai exposé, dans le *Bulletin astronomique* (juillet 1897) [1], une méthode qui permet de développer les coordonnées des astres en séries ne contenant que des sinus et des cosinus.

Je voudrais aujourd'hui revenir sur ce sujet pour montrer comment il convient de grouper les termes afin d'obtenir une convergence aussi rapide que possible et les diverses particularités que l'on peut mettre en évidence en décomposant et groupant les termes de différentes manières.

Ce que j'ai à dire s'applique au cas général avec quelques changements de détail. Néanmoins, pour simplifier et abréger cet exposé, je me bornerai au cas particulier connu sous le nom de *problème restreint*.

Je supposerai un corps central S autour duquel circulent une masse troublante J très petite et une masse troublée P infiniment petite. La masse P étant infiniment petite, le mouvement de J doit obéir aux lois de Képler; je supposerai l'orbite de J circulaire; l'inclinaison nulle de façon que P se meuve dans le plan de l'orbite de J et enfin l'excentricité de P très petite, de façon que P se meuve dans le même sens que J dans une orbite sensiblement circulaire.

[1] *Œuvres de H. Poincaré*, ce Tome, p. 517.

J'appelle a et e le demi-grand axe et l'excentricité de P; μ la masse de J, l l'anomalie moyenne de P et g la longitude de son périhélie, l' la longitude de J, et je pose

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)}, & x_2 = \sqrt{a} + \sqrt{a(1-e^2)}, \\ 2y_1 = l - g + l', & 2y_2 = l + g - l'. \end{cases}$$

Je vois alors que les équations du mouvement prennent la forme canonique

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

F est une fonction développable suivant les puissances de μ et périodique par rapport aux y.

Pour $\mu = 0$, cette fonction F se réduit à

$$F_0 = \frac{2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{(x_2 - x_1)}{2}$$

(à la condition de choisir convenablement les unités de longueur, de masse et de temps) et ne dépend que des x.

Nous nous trouvons donc dans les conditions du problème B (*Bull. astr.*, t. 14, p. 242) [1]. Les résultats obtenus à propos de ce problème sont donc applicables ici; ils peuvent s'énoncer sous la forme suivante.

Soient z_1, z_2, ϖ_1, ϖ_2 quatre constantes d'intégration; soient n_1 et n_2 deux nouvelles constantes dépendant de z_1, de z_2 et de μ,

$$w_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = n_2 t + \varpi_2.$$

Les variables x et y peuvent se développer en séries procédant suivant les puissances de μ,

$$(3)\qquad x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \qquad y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots.$$

Les x_i^k et les y_i^k (sauf y_1^0 et y_2^0 qui sont égaux à w_1 et w_2) sont développables en séries trigonométriques procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et w_2, le coefficient de chaque terme dépendant de z_1 et de z_2.

Enfin n_1 et n_2 peuvent se développer suivant les puissances de μ, chaque terme étant une fonction de z_1 et de z_2, de sorte que

$$(4)\qquad n_i = n_i^0 + \mu n_i^1 + \ldots.$$

Nous supposerons d'ailleurs

$$x_1^0 = z_1, \qquad x_2^0 = z_2,$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 518.

d'où

$$(5)\qquad n_1^0 = \frac{4}{(z_1+z_2)^3} + \frac{1}{2}, \qquad n_2^0 = \frac{4}{(z_1+z_2)^3} - \frac{1}{2}.$$

La constante $z_1 = x_1^0$ est très petite et de l'ordre du carré de l'excentricité, et il n'est pas inutile de remarquer que nos expressions x_i^k et y_i^k (sauf y_1^0 et y_2^0) peuvent se développer suivant les puissances de $\sqrt{z_1}\cos w_1$, $\sqrt{z_1}\sin w_1$, chaque terme dépendant encore de w_2 et de z_2 et étant périodique par rapport à w_2.

2. Observons d'abord que de ces séries on en peut déduire une infinité d'autres de même forme.

Remplaçons, en effet, les constantes z et ϖ par les développements suivants procédant suivant les puissances de μ :

$$(6)\qquad z_i = z_i^0 + \mu z_i^1 + \mu^2 z_i^2 + \ldots, \qquad \varpi_i = \varpi_i^0 + \mu\varpi_i^1 + \mu^2\varpi_i^2 + \ldots.$$

Les z_i^k et les ϖ_i^k sont des fonctions de quatre nouvelles constantes z'_1, z'_2, ϖ'_1, ϖ'_2 ; on a

$$z_i^0 = z'_i, \qquad \varpi_i^0 = \varpi'_i$$

et les autres z_i^k, ϖ_i^k sont des fonctions *quelconques* de z'_1 et z'_2, de ϖ'_1 et ϖ'_2.

Il est clair que si, dans les séries (3), je remplace les constantes z_i et ϖ_i par leurs développements (6), puis que j'ordonne de nouveau par rapport à μ, j'obtiendrai pour les x_i et les y_i de nouveaux développements qui seront de même forme que les séries (3), c'est-à-dire qui procéderont d'une part suivant les puissances de μ, d'autre part suivant les sinus et cosinus des multiples de

$$w'_1 = n_1 t + \varpi'_1, \qquad w'_2 = n_2 t + \varpi'_2,$$

et dont les coefficients dépendront des nouvelles constantes z' et ϖ'.

Le cas le plus remarquable sera celui où ces coefficients dépendront seulement des z' et seront indépendants des ϖ', ainsi qu'il arrivait pour les séries (3) elles-mêmes.

3. Comment peut se faire le choix si largement arbitraire de ces développements (6) qui définissent les constantes z'_i et ϖ'_i?

On peut d'abord s'arranger pour que le rapport des deux moyens mouvements n_1 et n_2 soit indépendant de μ et que l'on ait

$$(7)\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{S + (z'_1 + z'_2)^3}{S - (z'_1 + z'_2)^3}.$$

Les équations (5) nous donnent

$$n_1^0 - n_2^0 = 1.$$

Si nous n'avions pas ainsi une relation entre n_1^0 et n_2^0, nous pourrions choisir les développements (6) de telle façon que les moyens mouvements n_1 et n_2 soient tous deux indépendants de μ; malheureusement l'existence de cette relation s'y oppose.

Soit

$$n_1^1 - n_2^1 = \varphi(z_1, z_2).$$

Formons alors les équations

$$(8)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{4}{(z'_1 + z'_2)^3} + \dfrac{1}{2}\right][1 + \mu\varphi(z'_1, z'_2)] = n_1^0 + \mu n_1^1 + \mu^2 n_1^2 + \ldots, \\ \left[\dfrac{4}{(z'_1 + z'_2)^3} - \dfrac{1}{2}\right][1 + \mu\varphi(z'_1, z'_2)] = n_2^0 + \mu n_2^1 + \mu^2 n_2^2 + \ldots. \end{cases}$$

Comme les n_i^k sont des fonctions connues de z_1 et z_2, nous pouvons, de ces équations (8), tirer z'_1 et z'_2 en fonctions de z_1, de z_2 et de μ, et il est aisé de voir que l'on obtient ainsi des développements de la forme (6) (les z_i^k et les ϖ_i^k dépendant seulement des z' et non pas des ϖ').

Les équations (8) entraînent d'ailleurs la relation (7).

4. On peut aussi choisir pour les constantes z'_i et ϖ'_i les valeurs initiales des x_i et des y_i pour $t = 0$.

Prenons, en effet, les équations (3) et remplaçons-y t par zéro, x_i et y_i par z'_i et ϖ'_i; nous trouverons ainsi

$$(9)\qquad z'_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \qquad \varpi'_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots.$$

Dans les expressions x_i^k et y_i^k, les arguments w_1 et w_2 doivent être remplacés par ϖ_1 et ϖ_2.

Les seconds membres des équations (9) sont des fonctions connues des z, des ϖ et de μ; pour $\mu = 0$, ces seconds membres se réduisent à

$$x_i^0 = z_i, \qquad y_i^0 = \varpi_i.$$

On tirera donc facilement de ces équations (9) les z et les ϖ en fonctions des nouvelles constantes z' et ϖ' et de μ, sous forme de développements procédant suivant les puissances de μ et qui ne seront autre chose que les développements (6) cherchés.

L'inconvénient de ce choix, c'est que les constantes z et les différences $\varpi - \varpi'$ dépendent non seulement de z'_1 et z'_2, mais de ϖ'_1 et ϖ'_2. Il n'en était pas ainsi quand nous procédions comme au n° 3.

Il en résulte que les séries (3) se trouvent remplacées par des séries (3 *bis*)

de même forme, mais dont les coefficients dépendent, non seulement de z'_1 et z'_2, mais de ϖ'_1 et ϖ'_2. Au contraire, en procédant comme au n° 3, on trouve des séries de même forme encore et dont les coefficients sont indépendants des deux constantes ϖ'.

5. Je me propose d'abord de montrer comment on pourra déduire des séries (3) les développements auxquels aurait conduit l'application des procédés de l'ancienne Mécanique céleste.

Adoptons les constantes z' et ϖ' du n° 4 et envisageons les séries (3 *bis*) obtenues à la fin de ce numéro.

Les équations (4) nous donnent n_1 et n_2 en fonctions de μ, de z_1 et de z_2. En les combinant avec les équations (6), nous aurons n_1 et n_2 en fonctions de μ, des z' et des ϖ'; soit donc

$$(4\ bis)\qquad n_i = n_i'^0 + \mu n_i'^1 + \mu^2 n_i'^2 + \ldots.$$

Les $n_i'^k$ seront donnés en fonction des z' et des ϖ' et l'on aura

$$(4\ bis)\qquad n_i'^0 = \frac{4}{(z'_1 + z'_2)^3} \pm \frac{1}{2}.$$

Considérons alors les séries

$$(3\ bis)\qquad x_i = \Sigma \mu^k x_i'^k; \qquad y_i = \Sigma \mu^k y_i'^k.$$

Soit $A \sin(m_1 w'_1 + m_2 w'_2)$ un terme de $x_i'^k$ ou $y_i'^k$. Le coefficient A dépend des z' et des ϖ'; m_1 et m_2 sont deux entiers; enfin le signe sin pourrait être remplacé par le signe cos.

Ce terme dépend *indirectement* de μ, puisque l'on a

$$m_1 w'_1 + m_2 w'_2 = (m_1 n_1 + m_2 n_2)t + (m_1 \varpi'_1 + m_2 \varpi'_2)$$

et que, d'après les équations (4 *bis*), n_1 et n_2 dépendent de μ.

Développons donc ce terme suivant les puissances de μ, il viendra

$$(10)\qquad A \sin(m_1 w'_1 + m_2 w'_2) = A \sin\omega + \mu A t (m_1 n_1'^1 + m_2 n_1'^2) \cos\omega + \ldots,$$

où

$$\omega = (m_1 n_1'^0 + m_2 n_2'^0)t + (m_1 \varpi'_1 + m_2 \varpi'_2).$$

Remplaçons maintenant chaque terme des séries (3 *bis*) par son développement (10) et ordonnons de nouveau par rapport à μ; nous obtiendrons ainsi des séries

$$(3\ ter)\qquad x_i = x_i''^0 + \mu x_i''^1 + \mu_2 x_i''^2 + \ldots, \qquad y_i = y_i''^0 + \mu y_i''^1 + \mu_2 y_i''^2 + \ldots.$$

Les séries (3 *ter*) comprennent comme les séries (3) des termes purement

trigonométriques, mais elles comprennent en outre des termes où le temps sort des signes trigonométriques, tels que le second terme et les termes suivants du développement (10).

Chaque terme est d'ailleurs tout à fait indépendant de μ.

Les séries (3 *ter*) *sont celles auxquelles auraient conduit les anciens procédés.*

6. Nous observerons d'abord que ce rapprochement nous fournit immédiatement un théorème applicable aux séries obtenues par les anciens procédés.

Ces séries contiennent des termes non séculaires, ne contenant qu'une ligne trigonométrique de $m_1 w''_1 + m_2 w''_2$, où les w''_i sont des fonctions linéaires du temps

$$w''_i = n_i'^0 t + \varpi'_i.$$

Elles contiennent en outre des termes où une pareille ligne trigonométrique est multipliée par t, ou par t^2 ou par une puissance supérieure de t. Séparons ces diverses sortes de termes et écrivons par exemple le développement de x_1,

$$x_1 = \Sigma A \sin\omega + t \Sigma B \cos\omega + t^2 \Sigma C \sin\omega + \ldots,$$

où

$$\omega = m_1 w''_1 + m_2 w''_2 + h,$$

h étant une constante.

Le théorème en question, c'est que les coefficients B, C, etc. peuvent se déduire des coefficients A à l'aide des formules suivantes :

$$B = \frac{A}{1}(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2), \qquad C = -\frac{A}{1.2}(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où α_1 et α_2 sont les constantes $n_1 - n_1'^0$ et $n_2 - n_2'^0$.

Ainsi la connaissance de ces deux constantes α_1 et α_2 et des termes non séculaires suffit pour donner immédiatement celle de tous les termes séculaires. On voit de plus que les termes « purement séculaires » contenant une puissance de t et pas de ligne trigonométrique doivent toujours se détruire quelque loin qu'on pousse l'approximation.

7. Si nous cherchons à comparer les séries (3 *ter*) données par les anciens procédés avec les séries (3) données par les procédés nouveaux, nous remarquerons d'abord que les séries (3 *ter*), ordonnées suivant les puissances de μ,

convergent pourvu que le temps soit suffisamment petit; la convergence cesse si le temps dépasse une certaine valeur.

En ce qui concerne les séries (3), nous sommes certains que les premiers termes convergent assez vite pour les besoins de la pratique; mais nous n'avons pas le moyen de démontrer que la série converge, même pour les petites valeurs du temps, au sens que les analystes attachent à ce mot. Nous pouvons affirmer au contraire que la convergence, si elle a lieu, ne saurait être uniforme pour toutes les valeurs du temps d'une part, et d'autre part pour toutes les valeurs des constantes comprises entre certaines limites.

Dans ces conditions, on est tenté de se demander si les méthodes nouvelles où l'on évite les développements procédant suivant les puissances du temps présentent des avantages bien réels.

On se rendra mieux compte des cas où les avantages sont réels et de ceux où ils sont illusoires si l'on prend garde aux réflexions suivantes :

On peut se proposer deux buts différents, ou bien représenter les positions des astres pendant un temps très long avec une approximation médiocre, ou bien les représenter pendant un temps assez court avec une grande approximation.

Supposons que l'une des séries (3) contienne deux termes $A \sin \alpha t$, $B \sin \beta t$ et que

$$A > B, \qquad A\alpha < B\beta.$$

Il pourra très bien se faire que, si l'on se propose le premier but, on doive tenir compte du premier de ces termes et négliger le second qui est plus petit si t est assez grand; et qu'au contraire, si l'on se propose le second but, on doive tenir compte du second de ces termes et négliger le premier qui est plus petit si l'on ne donne à t que de petites valeurs.

On voit donc que le choix des termes que l'on doit conserver ou négliger ne peut se faire sans qu'on se soit bien rendu compte du but que l'on cherche à atteindre.

Supposons donc qu'on veuille représenter les mouvements pendant un temps T et avec une approximation H; nous devons négliger le terme $A \sin \alpha t$, si A est plus petit que H, ou encore si $A\alpha T$ est plus petit que H.

Il pourra se faire que αT soit très petit, pas assez cependant pour que le terme doive être négligé. Dans ce cas, ce terme $A \sin \alpha t$ différera très peu de $A\alpha t$. On ne voit pas bien alors quel avantage il peut y avoir à lui conserver la forme trigonométrique et s'il ne vaut pas mieux le développer suivant les

puissances de t, en bornant le développement à un ou deux termes. Un très grand nombre de termes, se réduisant à une constante multipliée par t, t^2 ou t^3, peuvent alors être réunis en un seul.

Supposons encore que l'on ait un certain nombre de termes

$$A \sin \alpha t + A_1 \sin \alpha_1 t + A_2 \sin \alpha_2 t + \ldots + A_n \sin \alpha_n t$$

dont les périodes soient très peu différentes. Si les expressions $(\alpha_k - \alpha)T$ sont assez petites pour qu'on puisse en négliger le carré, on pourra remplacer ces $n+1$ termes par deux termes seulement

$$(A + A_1 + \ldots + A_n) \sin \alpha t + t \cos \alpha t [A_1(\alpha_1 - \alpha) + A_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + A_n(\alpha_n - \alpha)].$$

ce qui sera une simplification évidente. L'approximation plus grande que semble donner la formule complète serait d'ailleurs le plus souvent illusoire parce que les périodes ne seraient pas exactement connues.

On voit que dans certains cas on peut avoir intérêt à revenir aux développements qui procèdent suivant les puissances du temps, et à adopter, pour ainsi dire, une méthode mixte entre les anciens procédés et les nouveaux. Certains termes conservent la forme trigonométrique, d'autres se développent de manière à faire sortir le temps des signes sinus et cosinus. Le choix des termes auxquels la forme trigonométrique doit être conservée dépend du but que l'on se propose.

Au point de vue de la convergence, ces développements mixtes seraient équivalents aux séries (3 *ter*) des anciens procédés, le temps pendant lequel ils resteraient convergents étant en général plus grand.

8. Laissons maintenant de côté les anciens procédés et revenons aux développements (3). Nous devrons observer que ces développements contiennent certains termes qui peuvent être très grands, mais que le plus souvent on peut obtenir une sorte de compensation en groupant les termes d'une manière convenable.

Il arrivera fréquemment qu'un groupe contiendra des termes très grands et que la somme des termes d'un même groupe sera néanmoins très petite.

Rappelons, en effet, que les divers termes des séries (3) ont été obtenus par une série d'opérations, comprenant des intégrations, des additions, des multiplications, des différentiations.

Supposons donc que l'on ait à intégrer un terme de la forme $A \cos \alpha t$, on trouvera $\frac{A \sin \alpha t}{\alpha}$.

Si α est très petit, ce terme sera susceptible de devenir très grand; il ne le deviendra pas cependant pour les valeurs finies de t, car il sera toujours plus petit que At.

Si nous avions à intégrer un terme $A \sin \alpha t$, nous trouverions $-\frac{A \cos \alpha t}{\alpha}$, ou, en ajoutant une constante, $\frac{A}{\alpha} - \frac{A \cos \alpha t}{\alpha}$.

Chacun de ces deux termes est très grand, mais l'ensemble des deux termes est fini et plus petit que $\frac{A \alpha t^2}{2}$.

On voit quel intérêt il y a à grouper les termes d'une manière convenable.

Partons maintenant du terme $A \cos \alpha t$ et supposons qu'une première intégration ait donné $\frac{A \sin \alpha t}{\alpha}$.

Supposons qu'on ait ensuite à multiplier ce terme par $\sin \beta t$, ce qui donne

$$\frac{A \sin \alpha t \sin \beta t}{\alpha} = \frac{A}{2\alpha} \cos(\beta - \alpha) t - \frac{A}{2\alpha} \cos(\beta + \alpha) t;$$

puis à intégrer de nouveau ce qui donne

$$\frac{A \sin(\beta - \alpha) t}{2\alpha(\beta - \alpha)} - \frac{A \sin(\beta + \alpha) t}{2\alpha(\beta + \alpha)}.$$

Si β est fini et α très petit, chacun de ces deux termes est très grand; ils ont tous deux à peu près même période, et si on les réduit ils se compensent presque exactement, car leur ensemble est de l'ordre de $\frac{At}{\beta}$.

C'est ce qui explique une circonstance qui se présente bien souvent dans le calcul des perturbations du second ordre. On trouve des termes qui, individuellement, ont une valeur considérable, mais qui se détruisent presque complètement deux à deux.

Ces exemples suffisent pour montrer l'influence du groupement des termes sur la rapidité de la convergence.

9. Considérons maintenant les différents termes des développements (3) et voyons quelle est leur forme.

Soit

$$\mu^p A \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(m_1 w_1 + m_2 w_2)$$

l'un de ces termes, A étant une fonction de z_1 et z_2.

Nous pouvons toujours supposer que les développements (4) se réduisent à leurs deux premiers termes de telle façon que

$$n_1 = n_1^0 + \mu n_1^1, \qquad n_2 = n_2^0 + \mu n_2^1$$

et que

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1^0}{n_2^0} = \frac{8 - (z_1 + z_2)^3}{8 - (z_1 + z_2)^3}$$

soit indépendant de μ et ne dépende que de $z_1 + z_2$.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, nous n'aurions qu'à passer des constantes z aux constantes z' définies au n° 3.

Cela posé, voyons quelle sera la forme de la fonction A. On sait que les intégrations successives introduisent dans cette fonction des diviseurs de la forme $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$, q_1 et q_2 étant des entiers; c'est ce que nous appellerons les *petits diviseurs*.

Nous écrirons donc $A = \frac{B}{H}$, H étant le produit des petits diviseurs et B une fonction de z_1 et z_2. La fonction B reste finie pour toutes les valeurs envisagées des constantes z_1 et z_2. Au contraire, comme certains petits diviseurs peuvent s'annuler quand $\frac{n_1^0}{n_2^0}$ est commensurable, la fonction A pourrait devenir infinie.

Je puis considérer B comme fonction de z_1 et $z_1 + z_2$, ou, ce qui revient au même, de z_1 et de n_1^0. Quant à H, c'est un polynome entier en n_1^0, car le petit diviseur

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0 = (q_1 + q_2) n_1^0 - q_2.$$

Si donc je regarde un instant z_1 comme une constante, A sera égal à une fonction de n_1^0, holomorphe dans le domaine considéré, divisée par un polynome en n_1^0.

Je puis poser

$$B = CH + D,$$

où C est une autre fonction holomorphe en n_1^0 et D un polynome d'ordre moindre que H. Il vient donc

$$A = C + \frac{D}{H}$$

et si l'on décompose la fraction rationnelle en éléments simples, on aura décomposé le terme envisagé en plusieurs autres

$$(11) \qquad \mu^p C \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2) + \Sigma \mu^p \frac{E}{(q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0)^h} \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2).$$

où C est une fonction holomorphe de z_1 et n_1^0 et où les autres termes contiennent au numérateur une fonction E, holomorphe en z_1 seulement et au dénominateur une puissance entière h d'un seul petit diviseur.

Si l'on se rappelle la manière dont les différents termes des développements (3) ont été obtenus, on verra que le polynome H sera le produit d'au plus $2p-1$ petits diviseurs, en ce qui concerne le développement de x_1 et x_2, et d'au plus $2p$ petits diviseurs, en ce qui concerne le développement de y_1 et y_2. Ce polynome est donc au plus de degré $2p-1$ (ou $2p$), p étant l'exposant de μ dans le terme considéré.

Dans chaque terme de (11) l'exposant h est au plus égal à $2p-1$ (ou $2p$); j'ajoute que s'il atteint sa limite $2p-1$ (ou $2p$), on doit avoir

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{m_2}{q_2}.$$

10. Supposons maintenant que, partant des séries (3), nous décomposions chaque terme en plusieurs autres par la formule (11). Nous pourrons répartir les termes de la série ainsi obtenue de la manière suivante :

Un premier groupe comprendra tous les termes qui ne contiennent au dénominateur aucun petit diviseur [tels que le premier terme de l'expression (11)].

Chacun des autres groupes sera formé des divers termes qui contiennent au dénominateur une puissance d'un même petit diviseur.

Considérons, par exemple, le groupe des termes qui contiennent au dénominateur une puissance de

$$\delta = q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0,$$

et qu'on peut appeler le groupe (q_1, q_2).

Chacun des termes du groupe (q_1, q_2) contiendra en facteur $\frac{\mu}{\delta^h}$, où la différence $2p-1-h$, en ce qui concerne x_1 et x_2 (ou $2p-h$ en ce qui concerne y_1 et y_2), est positive ou nulle.

Rangeons dans un même sous-groupe les termes où cette différence a la même valeur; nous appellerons *sous-groupe principal* celui où cette différence est nulle.

Voici ce qui justifie ce groupement. Si δ est très petit et par exemple de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, certains termes d'ordre élevé par rapport à μ pourront devenir sensibles par suite de la présence d'une puissance de δ au dénominateur.

L'importance du terme se trouve alors mesurée par la valeur de la diffé-

rence $2p-1-h$. Les termes pour lesquels cette différence est nulle sont évidemment les plus importants; ce sont même, le plus souvent, les seuls dont on ait à tenir compte.

Les deux nombres q_1 et q_2 peuvent toujours être supposés premiers entre eux, de sorte qu'on peut toujours trouver deux entiers r_1 et r_2 tels que

$$q_1 r_2 - q_2 r_1 = 1$$

et poser

$$m_1 = \alpha q_1 + \beta r_1, \qquad m_2 = \alpha q_2 + \beta r_2,$$

α et β étant deux nouveaux entiers. Nous pourrons classer dans une même série partielle tous les termes d'un même sous-groupe qui correspondent à une même valeur de β.

Le diviseur δ étant en effet très petit, $q_1 n_1 + q_2 n_2$ est aussi très petit, de sorte que tous les termes d'une des séries partielles ainsi formées auront à peu près même période, je veux dire une période voisine de $\frac{2\pi}{\beta(r_1 n_1 + r_2 n_2)}$. Le sous-groupe principal ne contiendra qu'une seule série partielle, car pour ce sous-groupe on a

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{m_2}{q_2}, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = 0.$$

A part les termes du premier groupe qui, ne contenant pas de petits diviseurs, sont généralement très petits, tous nos termes vont se trouver ainsi répartis en séries partielles.

Or, il arrive cette circonstance singulière que *chacune de ces séries partielles peut être facilement sommée*, je veux dire que sa sommation se ramène à un nombre fini de quadratures.

Généralement on n'aura à tenir compte que d'un petit nombre de termes isolés et en outre d'un petit nombre de séries partielles. On peut dire que dans les cas les plus difficiles traités jusqu'ici on n'a jamais eu à considérer qu'une seule série partielle provenant d'un seul sous-groupe principal.

C'est là, sous une forme nouvelle, la méthode de M. Bohlin qui se trouve ainsi rattachée à la méthode qui nous a donné les séries (3) et par elle aux anciens procédés.

Si l'on se borne à sommer la série partielle qui correspond au sous-groupe principal, et que l'on a seule à envisager en général, on retombe sur la méthode de Delaunay.

Si les moyens mouvements sont presque commensurables, il peut arriver

que les séries partielles divergent. L'expression analytique à laquelle conduit leur sommation n'en conserve pas moins un sens. C'est ainsi que l'expression $\frac{1}{1-x}$ conserve un sens alors même que, x étant plus grand que 1, la série $1+x+x^2+\ldots$ a cessé d'être convergente.

Lors même qu'une série partielle diverge, on peut encore légitimement la remplacer par cette expression analytique. C'est ce qui permet aux méthodes de Delaunay et de Bohlin d'être applicables à des cas où l'emploi direct des séries (3) deviendrait illusoire et même au cas de la libration où la forme des orbites est si différente de la forme ordinaire.

C'est ainsi que, malgré ces différences, ce cas de libration peut encore se rattacher à la méthode qui nous a fourni les séries (3).

11. Voyons maintenant comment les solutions périodiques et asymptotiques peuvent se déduire des séries (3). Nous avons vu que nos séries sont développables suivant les puissances de $\sqrt{z_1}\cos w_1$, $\sqrt{z_1}\sin w_1$, les coefficients du développement dépendant d'ailleurs de z_2 et w_2.

Si nous donnons alors à la constante z_1 la valeur zéro, nos séries ne contiendront plus que l'argument w_2; elles seront périodiques. On retombe ainsi sur les solutions périodiques de la première sorte.

12. Cherchons maintenant à obtenir les solutions périodiques de la deuxième sorte. Pour cela reprenons nos séries (3) en supposant comme au n° 9

$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^1, \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1^0}{n_2^0}.$$

Si nous donnons au rapport $\frac{n_1^0}{n_2^0}$ une valeur commensurable, un des petits diviseurs $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$ s'annulera, de sorte que certains termes du développement pourraient devenir infinis.

Supposons $\varpi_2 = 0$ et remplaçons la constante ϖ_1 par un développement procédant suivant les puissances de μ

$$\varpi_1 = \varpi_1^0 + \mu\varpi_1^1 + \mu^2\varpi_1^2 + \ldots \tag{12}$$

et dont les coefficients sont de nouvelles constantes que je me réserve de déterminer plus loin.

Considérons un terme quelconque des séries (3) et remplaçons-y la constante ϖ_1 par son développement (12). Ce terme deviendra développable suivant les puissances de μ. Développons de même tous les termes des séries (3)

et ordonnons de nouveau suivant les puissances de μ. Nous obtiendrons ainsi de nouvelles séries que j'appellerai ($3a$).

Soit

$$\frac{\mu^p}{(q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0)^h} A \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(m_1 w_1 + m_2 w_2)$$

un terme de ces nouvelles séries, le coefficient A ne contenant plus le petit diviseur $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$.

Pour plus de brièveté dans l'exposition, introduisons quelques dénominations nouvelles et d'abord définissons ce que nous appellerons l'*ordre* de ce terme. Pour les termes du développement de x_1 et x_2, ce sera le nombre

$$2p - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2}; \qquad 2p - 1 - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} \lessgtr \frac{q_1}{q_2}.$$

Pour les termes du développement de y_1 et y_2, ce sera le nombre

$$2p + 1 - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2}; \qquad 2p - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} \gtrless \frac{q_1}{q_2}.$$

Cette classification laisse de côté les termes où $h = 0$, qui ne contiennent pas de petits diviseurs et dont nous n'avons pas à nous occuper.

J'appellerai *termes principaux* de chaque ordre les termes du développement de x_1 et de x_2 qui sont de cet ordre et qui de plus sont tels que

$$h = 1, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Il n'y aura, d'après cette définition, de termes principaux que dans les ordres impairs.

Les termes du premier et du second ordre ne dépendent que de ϖ_1^0; ceux du troisième et du quatrième ordre dépendent de ϖ_1^0 et ϖ_1^1; ceux du cinquième et du sixième ordre de ϖ_1^0, ϖ_1^1 et ϖ_1^2, et ainsi de suite.

L'ensemble des termes principaux du premier ordre dans x_1 se présente sous la forme d'un certain numérateur divisé par $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$. Comme pour tous ces termes on a

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2} = -\frac{n_2^0}{n_1^0} = -\frac{n_2}{n_1},$$

il vient

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0.$$

Le coefficient de t disparaît donc dans tous ces termes.

Notre numérateur est donc une constante qui dépend de ϖ_1^0; *je disposerai*

de ϖ_1^0 *de façon à annuler ce numérateur*, ce qui détermine ϖ_1^0. Ces termes principaux, que nous pouvions craindre de voir devenir infinis, disparaissent donc.

Les termes principaux du premier ordre dans x_2 disparaissent *ipso facto*, en vertu de l'équation des forces vives.

Mais ce n'est pas tout : *tous les termes du premier et du second ordre disparaissent* ipso facto *dans les quatre développements.*

Considérons maintenant les termes principaux du troisième ordre dans x_1; leur ensemble est encore égal à un numérateur divisé par $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$. Ce numérateur se réduit à une constante dépendant de ϖ_1^0 et ϖ_1^1; nous déterminerons ϖ_1^1 de façon à le faire disparaître et, avec lui, les termes principaux considérés.

Du même coup, disparaîtront les termes principaux du troisième ordre dans x_2 et, dans les quatre développements, tous les termes du troisième et du quatrième ordre.

On déterminerait de même ϖ_1^2 de façon à annuler les termes principaux du cinquième ordre dans x_1, ce qui annule du même coup tous les termes du cinquième et du sixième ordre; et ainsi de suite.

Ainsi disparaîtront tous les termes qui auraient pu devenir infinis; d'ailleurs, le rapport des moyens mouvements étant commensurable, nos séries ne dépendent plus que d'un argument unique et les solutions sont périodiques. Il est à noter que les séries ainsi obtenues sont convergentes, tandis que les séries (3) ne l'étaient pas, au sens rigoureux du mot.

13. Soit C la constante des forces vives; la valeur de C dépendra des deux constantes z_1 et z_2 ou, ce qui revient au même, de n_1 et n_2. Elle se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de μ et dont les termes seront des fonctions de z_1 et z_2 ou de n_1 et n_2.

Dans certains cas, on peut considérer C comme une des données de la question. Alors la relation $F = C$, où le second membre C est regardé comme donné, sera une relation entre z_1 et z_2, ou entre n_1 et n_2.

On pourra en tirer par exemple n_2 en fonction de n_1 sous la forme d'une série procédant suivant les puissances de μ et dont les coefficients seront des fonctions de n_1.

14. Nous venons de voir la manière de retrouver les solutions périodiques en

partant des séries (3): on pourrait se proposer de retrouver de la même façon les solutions asymptotiques.

Nous savons en effet qu'en dehors des développements (3) qui procèdent suivant les sinus et les cosinus des multiples de deux arguments w, nous pouvons représenter les coordonnées du corps troublé par des développements d'une forme toute différente.

A chaque solution périodique correspond un de ces développements.

Soient, en effet,

$$x_i = \varphi_i^{0,0}(W), \qquad \cos y_i = \psi_i^{0,0}(W), \qquad \sin y_i = \theta_i^{0,0}(W)$$

les équations d'une solution périodique, où φ_i^{00}, ψ_i^{00}, θ_i^{00} sont des fonctions périodiques de période 2π d'un argument unique

$$W = N_0 t + h;$$

N_0 et h sont deux constantes; la première doit être regardée comme donnée, la seconde est une constante arbitraire d'intégration.

Nous appellerons C_0 la valeur correspondante de la constante C des forces vives.

Nous pouvons alors représenter la solution générale sous la forme de développements

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} x_i &= \Sigma(Ae^{\alpha t})^p(A'e^{-\alpha t})^q\varphi_i^{p,q}(W),\\ \cos y_i &= \Sigma(Ae^{\alpha t})^p(A'e^{-\alpha t})^q\psi_i^{p,q}(W),\\ \sin y_i &= \Sigma(Ae^{\alpha t})^p(A'e^{-\alpha t})^q\theta_i^{p,q}(W),\end{aligned}\right.$$

où les fonctions $\varphi_i^{p,q}$, $\psi_i^{p,q}$, $\theta_i^{p,q}$ sont des fonctions périodiques de

$$W = Nt + h.$$

Dans ces développements A, A' et h sont des constantes d'intégration, α et N sont des constantes données qui peuvent se développer suivant les puissances du produit AA' et de la différence $C - C_0$.

Si l'on développe les $\varphi_i^{p,q}$, $\psi_i^{p,q}$, $\theta_i^{p,q}$ en séries de Fourier, les coefficients de ces séries seront également développables suivant les puissances de $C - C_0$.

Si l'on fait $C = C_0$ et qu'on annule l'une des constantes A ou A', N se réduit à la constante N_0 définie plus haut et α à une constante α_0.

Il ne reste dans les séries (13) que les termes où $p = 0$ (ou les termes où $q = 0$). On obtient ainsi les solutions dites *asymptotiques*; les séries sont alors convergentes.

Si les deux constantes A et A′ s'annulent à la fois, il reste seulement

$$x_i = \varphi_i^{0,0}(W)$$

et l'on retombe sur la solution périodique.

15. On peut alors se proposer de voir comment on pourrait passer des développements (3) aux développements (13).

On remarquera d'abord que ces séries (13) sont ordonnées suivant les puissances des deux constantes A et A′. On pourrait donc être tenté d'opérer de la manière suivante : introduire les deux constantes d'intégration A et A′; développer chaque terme des séries (3) suivant les puissances de A et A′; réunir les termes semblables et ordonner suivant les puissances de ces constantes.

On ne peut pas arriver au résultat par cette voie. On rencontrerait des difficultés analogues à celle qui se présenterait dans l'exemple simple suivant.

Envisageons la série

$$\Sigma_n \alpha e^{-n\alpha} \sin n\alpha t = \frac{\alpha e^{-\alpha} \sin \alpha t}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \alpha t + e^{-2\alpha}}.$$

La somme de la série est développable suivant les puissances de α et de t. Il en est de même de chacun des termes de la série.

Cependant si l'on développe chaque terme de la série, qu'on réunisse les termes semblables, puis qu'on ordonne suivant les puissances de α et de t, on n'obtiendra pas du tout le même développement qu'en développant directement la somme de la série.

16. Pour bien faire comprendre la façon de passer d'un développement à l'autre, je prendrai d'abord un exemple simple; je supposerai

$$F = x_2 + x_1^2 + \mu \cos y_1.$$

On voit tout de suite que x_2 doit être une constante puisque $\frac{dF}{dy_2}$ est nul. On a donc

$$x_1^2 = C - \mu \cos y_1$$

et l'on en tire

$$t + h = \int \frac{dy_1}{2\sqrt{C - \mu \cos y_1}}.$$

On voit ainsi que x_1, $\cos y_1$ et $\sin y_1$ sont des fonctions doublement périodiques de $t + h$. L'une des périodes que j'appellerai ω est réelle, l'autre que j'appellerai $i\omega'$ est purement imaginaire.

La fonction x_1, par exemple, étant périodique de période ω sera développable par la formule de Fourier suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{\omega}$. Le développement sera valable pour toutes les valeurs réelles de t.

D'autre part, cette fonction x_1 admettant la période $i\omega'$ sera développable par cette même formule de Fourier suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{i\omega'}$ ou, ce qui revient au même, suivant les puissances des exponentielles $e^{\frac{2\pi t}{\omega'}}$ et $e^{-\frac{2\pi t}{\omega'}}$. Ce développement nouveau ne sera plus valable pour toutes les valeurs réelles de t, mais seulement pour les valeurs comprises entre t_0 et $t_0+\omega$; entre les valeurs $t_0+\omega$ et $t_0+2\omega$, ou entre les valeurs $t_0+2\omega$ et $t_0+3\omega$, ... il faudrait le remplacer par d'autres développements de même forme.

Et bien, *le premier de ces développements correspond aux séries* (3) *et le second aux séries* (13).

La théorie des fonctions doublement périodiques nous enseigne plusieurs moyens de passer de l'un à l'autre.

La méthode de Delaunay conduit à des équations analogues à celle que nous venons de traiter, quand on ne conserve dans la fonction perturbatrice qu'un seul terme périodique.

17. Dans le cas général, on peut donner des quatre variables x_i et y_i des développements d'où l'on peut tirer facilement d'une part les séries (3), d'autre part les séries (13).

Les quantités x_1, x_2, $\cos y_1$, $\sin y_1$, $\cos y_2$, $\sin y_2$ seront développées suivant les puissances de μ, du produit AA' et de la différence $C - C_0$ qui joueront le rôle de constantes d'intégration. Chaque coefficient de ce développement sera lui-même développé en série dont les différents termes seront le produit de deux facteurs.

Le premier de ces facteurs sera le cosinus ou le sinus d'un multiple d'un certain argument W.

Le second facteur sera une fonction doublement périodique d'un second argument W'.

Les deux arguments W et W' seront des fonctions linéaires du temps.

On aura

$$W = Nt + H, \qquad W' = N't + H'.$$

Π et Π' seront des constantes d'intégration. Nous pourrons donner à N' une valeur arbitraire.

J'appellerai ω et $i\omega'$ les périodes de la fonction périodique considérée comme fonction de W'; de sorte que ses périodes seront $\frac{\omega}{N'}$ et $\frac{i\omega'}{N'}$ quand on la regardera comme fonction de t. Ces périodes seront d'ailleurs les mêmes pour tous les termes.

Les quantités N, $\frac{\omega}{N'}$, $\frac{i\omega'}{N'}$ seront développables suivant les puissances de μ, AA', $C - C_0$.

De ce développement, on pourra facilement passer aux séries (3). Il suffira pour cela de développer chaque fonction doublement périodique suivant les cosinus et sinus des multiples de $\frac{2\pi W'}{\omega}$. On aura alors des séries procédant suivant les cosinus et sinus des multiples des deux arguments W et $\frac{2\pi W'}{\omega}$, ou, ce qui revient au même, des multiples des deux arguments

$$w_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = n_2 t + \varpi_2,$$

si l'on suppose

$$W = r_1 w_1 + r_2 w_2, \qquad W' = q_1 w_1 + q_2 w_2,$$

q_1, q_2, r_1, r_2 étant les quatre entiers définis au n° 10. On a alors

$$N = r_1 n_1 + r_2 n_2, \qquad \Pi = r_1 \varpi_1 + r_2 \varpi_2,$$
$$N' = q_1 n_1 + q_2 n_2, \qquad \Pi' = q_1 \varpi_1 + q_2 \varpi_2.$$

On retrouve ainsi les séries (3) en regardant AA' et $C - C_0$ comme des fonctions des constantes z_1 et z_2.

De ce même développement, on peut passer tout aussi facilement aux séries (13). Développons, en effet, chaque fonction doublement périodique suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi W'}{i\omega'}$ ou suivant les puissances des exponentielles $e^{\pm\frac{2\pi W}{\omega'}}$.

On retrouvera les séries (13) en posant

$$z = \frac{2\pi N'}{\omega'}, \qquad A = \sqrt{AA'}\, e^{\frac{2\pi \Pi'}{\omega'}}, \qquad A' = \sqrt{AA'}\, e^{-\frac{2\pi \Pi'}{\omega'}}.$$

On me pardonnera la longueur de cet exposé. Bien qu'il ne nous apprenne rien d'essentiellement nouveau, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de montrer comment se rattachent les unes aux autres les diverses séries auxquelles nous conduisent d'une façon qui paraît d'abord tout à fait indépendante les différentes théories proposées.

SUR LA MÉTHODE HORISTIQUE
DE GYLDÉN

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 138, p. 933-936 (18 avril 1904).

Dans un Ouvrage intitulé *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes* (Stockholm, imprimerie centrale, 1892), Gyldén a exposé deux méthodes qu'il appelle *horistiques;* la première de ces méthodes soulève d'assez graves objections: M. Backlund et moi, nous avons montré qu'elle conduisait, dans certains cas, à des résultats inadmissibles et qu'on ne devait l'employer qu'avec circonspection (Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 132, p. 50 et 291; *Bull. astr.*, t. 19, p. 433) (¹). J'ai pensé, en conséquence, qu'il y avait lieu d'examiner de plus près la seconde de ces méthodes et de la soumettre à la discussion. Rappelons d'abord en quelques mots en quoi elle consiste.

Gyldén considère (*loc. cit.*, p. 227 et suiv.) l'équation suivante :

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + z - \beta z^3 = X. \tag{1}$$

Le coefficient de z que Gyldén appelle Z est une constante, du moins dans la partie de l'Ouvrage que je cite (p. 227 à 234); je puis donc prendre les unités de façon à le réduire à 1.

Nous avons

$$X = -\Sigma A_n \cos G_n, \qquad G_n = 2\lambda_n v + B_n;$$

les A_n, B_n, λ_n ont des valeurs constantes données et $2\lambda_n$ est voisin de 1.

(¹) Le premier de ces articles figure au Tome VIII des *Œuvres*, les deux autres sont de Backlund.

Gyldén pose

$$z = \frac{y}{1+\psi},$$

ψ et y étant définis par les équations

$$(2) \qquad \frac{d^2\psi}{dv^2} - 2\varphi^2\psi = (1-\psi)\varphi^2 - \beta\frac{y^2}{1+\psi},$$

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dv^2} + (1-\varphi^2)y = (1+\psi)X + \frac{2}{1+\psi}\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} - \frac{2y}{(1+\psi)^2}\left(\frac{d\psi}{dv}\right)^2 y.$$

Nous appelons φ^2 une constante choisie de telle sorte que ψ soit une série trigonométrique; et nous devons intégrer (2) et (3) en faisant d'abord $\psi = 0$ dans les seconds membres, puis à la deuxième approximation, en remplaçant, dans ces seconds membres, ψ par la valeur trouvée en première approximation, et ainsi de suite.

On trouve ainsi :

$$(4) \qquad y = \Sigma x_n \cos G_n, \qquad x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 - 1 + \varphi^2},$$

et ensuite

$$(5) \qquad \varphi^2 = \frac{\beta}{2}\sum x_n^2, \qquad \psi = \sum \frac{\beta x_n x_p}{4(\lambda_n \pm \lambda_p)^2 + 2\varphi^2}\cos(G_n \pm G_p).$$

La seconde équation (4) et la première équation (5) permettent de calculer les x et φ^2 et donnent pour ces quantités des valeurs limitées.

Il est évident qu'on n'a le droit d'opérer ainsi qu'à la condition que les termes négligés dans les seconds membres de (2) et (3) soient plus petits que ceux dont on tient compte. Or, nous avons, dans le second membre de (2), un terme pour lequel il peut y avoir doute et qu'il convient de discuter: c'est le terme $2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv}$; on trouve

$$(6) \qquad 2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} = \sum \frac{\beta x_i x_j x_n}{2(\gamma_i \pm \lambda_j)^2 + \varphi^2}(\lambda_i \pm \lambda_j)\lambda_n \cos(G_i \pm G_j \pm G_n).$$

Nous ne retiendrons que les termes critiques, c'est-à-dire ceux où le coefficient de φ est voisin de 1. Il suffit pour cela de prendre

$$G_i + G_j - G_n \qquad \text{ou} \qquad G_i - G_j + G_n.$$

Soient α une quantité de l'ordre de A_n, et σ une quantité de l'ordre de $2\lambda_n - 1$.

Deux cas sont à distinguer : ou bien σ^4 est grand par rapport à $\beta\alpha^2$, et alors x est de l'ordre $\frac{\alpha}{\sigma}$ et φ^2 de celui de $\frac{\beta\alpha^2}{\sigma^2}$, et le terme général de (6) est, au plus, de l'ordre de

$$\frac{\beta x^3}{\sigma} = \frac{\beta\alpha^3}{\sigma^4} = x\frac{\beta\alpha^2}{\sigma^3},$$

généralement petit par rapport à x et même, dans certains cas, par rapport à α; dans ces cas, la méthode horistique est applicable, mais alors elle est inutile, puisque le terme dit *horistique* v^2 est très petit par rapport à $4\lambda_n^2 - 1$.

Ou bien σ^3 est petit par rapport à βx^2, ou est du même ordre; alors x est de l'ordre de $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$; le terme général de (6) est alors (si l'on prend $\lambda_i + \lambda_j, G_i + G_j - G_n$) de l'ordre de $\beta x^3 = \alpha$.

Il est donc de même ordre que X, c'est-à-dire que les termes dont on tient compte.

Si nous supposons que X se réduit à un seul terme $-A\cos G$, et que nous supposions σ négligeable devant v^2; il vient

$$v = x\cos G, \qquad x = \frac{2A}{\beta x^2}, \qquad v^2 = \frac{\beta}{2}x^2,$$

$$\psi = \frac{\beta x^2}{4}\cos 2G, \qquad \frac{dy}{dv} = -x\sin G, \qquad \frac{d\psi}{dv} = -\frac{\beta x^2}{2}\sin 2G,$$

$$2\frac{dy}{dv}\frac{d\psi}{dv} = \beta x^3 \sin 2G \sin G = A(\cos 3G - \cos G).$$

Il n'y a pas à retenir le terme en $\cos 3G$ qui n'est pas critique; mais le terme $-A\cos G$ est critique et l'on n'a pas le droit de le négliger, puisqu'il est juste égal au terme conservé X.

Dans le cas où X se réduit à un seul terme, la méthode horistique *convenablement modifiée* est légitime, *non pas pour la recherche de la solution générale* de l'équation (1), mais pour celle d'une solution particulière qui est celle que j'appelle *solution périodique*. Cette méthode *correctement appliquée* donne

$$y = +\sqrt[3]{\frac{4A}{3\beta}}\cos G,$$

tandis que la formule de Gyldén donne

$$y = \sqrt[3]{\frac{2A}{\beta}}\cos G.$$

L'erreur de Gyldén est d'autant plus singulière qu'il a lui-même traité le cas où X se réduit à un seul terme, par des formules qui deviennent exactes quand on veut se borner à la solution périodique.

Ce n'est pas méconnaître les services éminents que Gyldén a rendus à la Science, que de signaler les erreurs qu'il a pu commettre et qui pourraient

tromper ses successeurs; je crois que c'est, au contraire, rendre service à sa mémoire; aussi ne crains-je pas de formuler nettement ma conclusion.

Ceux qui voudront appliquer la méthode horistique risquent d'arriver à des résultats fantastiques; il y a des cas où elle peut être inoffensive; il n'y en a pas où elle peut être utile.

On voit, *a fortiori*, combien est vaine l'illusion des personnes qui espèrent tirer de la méthode horistique des développements uniformément convergents au sens géométrique du mot.

Quant à la conclusion finale de l'Ouvrage, à savoir que les termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice ne peuvent jamais produire de libration, elle est manifestement fausse.

SUR LA MÉTHODE HORISTIQUE
DE GYLDÉN

Acta Mathematica, t. 29, p. 235-271 (13 mars 1905).

I. — Introduction.

Gildén a rendu de très grands services à la Science; il a créé un certain nombre de méthodes nouvelles qui ont pu être appliquées avec succès et dans certains cas substituées avec avantage aux anciens procédés. La plupart des méthodes qu'il a proposées dans ses premiers écrits étaient correctes; Harzer et Brendel en ont tiré une théorie des petites planètes. Ces méthodes, à la vérité, n'étaient pas sans inconvénient. elles donnaient lieu à une foule de complications inutiles; au lieu de prendre le temps pour variable indépendante, elles prennent la longitude vraie, ou des variables auxiliaires peu différentes de cette longitude, elles introduisent une foule de variables parasites et encombrantes. Il en résulte que les équations perdent leur forme canonique, et que, si l'on veut simplement écrire par exemple l'équation des forces vives, il faut se livrer à des calculs interminables. J'estime donc que ces méthodes, quelque intéressantes qu'elles aient été autrefois, n'ont plus aujourd'hui qu'un intérêt historique, et qu'on ne saurait plus en recommander l'emploi, parce que maintenant il y en a d'autres, comme par exemple celles de Hill et de Brown qui ont les mêmes avantages sans avoir les mêmes inconvénients.

Plus tard Gyldén est entré dans une voie nouvelle et a abouti à des résultats qu'il a rassemblés dans son Ouvrage *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes*, Stockholm, 1892. Moins heureux que dans ses premiers travaux, il s'est cette fois complètement trompé.

Considérons une équation différentielle quelconque, faisons passer certains termes dans le premier membre, d'autres dans le deuxième. En première approximation, nous remplacerons *dans le deuxième membre* les fonctions inconnues par zéro et nous intégrerons les équations ainsi obtenues; en deuxième approximation nous remplacerons *dans le deuxième membre* les fonctions inconnues par leurs valeurs de première approximation, et ainsi de suite. Tel est le principe fondamental des nouvelles méthodes d'approximation de Gyldén, comme des anciennes, et nous le retrouverons partout.

Ce principe est légitime, mais à une condition, c'est que les termes relégués dans le deuxième membre et négligés en première approximation soient notablement plus petits ou moins importants que les termes conservés dans le premier membre. Sans cela, il est clair que le développement ne sera pas convergent. Nous aurons donc à examiner si l'analyse de Gyldén satisfait à cette condition.

On sait que dans les méthodes ordinaires de la Mécanique céleste, on voit s'introduire ce qu'on appelle de petits diviseurs, de sorte que le coefficient de certains termes prend la forme $\frac{b}{p^2}$, p étant très petit, et deviennent infinis quand p s'annule. Gyldén s'efforce de prouver qu'un calcul plus exact doit donner $\frac{b}{v^2+p^2}$, v étant une quantité qui ne s'annule pas, de sorte que le coefficient ne devient pas infini et reste même très petit. C'est ce qu'il appelle la méthode horistique, ainsi nommée d'un mot grec d'où vient également horizon.

Il cherche à tirer de là diverses conséquences :

1° Que les séries obtenues en Mécanique céleste sont convergentes si l'on tient compte des termes horistiques.

2° Que les termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice ne sauraient donner lieu au phénomène connu sous le nom de libration.

Ces conséquences sont manifestement fausses; mais j'ai cru longtemps que l'erreur provenait simplement de ce que Gyldén ne se doutait pas de ce que les géomètres appellent une série convergente et des précautions minutieuses qu'il faut prendre dans une démonstration de convergence.

Je croyais que, si Gyldén est protégé contre la critique par son obscurité même, cette obscurité empêcherait également qu'on cherchât à appliquer ses méthodes qui deviendraient ainsi inoffensives et tomberaient dans l'oubli après sa mort.

Je me trompais : d'abord ses erreurs commencent, comme nous le verrons bientôt, dès le début de son analyse; on ne peut donc le prendre pour guide, non seulement pour démontrer la convergence des développements, mais même pour en calculer approximativement les premiers termes. De plus, certaines personnes ont voulu appliquer ces méthodes à des problèmes pratiques, et elles ont été naturellement conduites à l'erreur. D'autres ont repris les affirmations de Gyldén sur la convergence des séries et les ont présentées comme des vérités établies.

Il devenait donc nécessaire d'analyser dans ses détails l'Ouvrage cité *Nouvelles recherches*... et d'en discuter les conclusions. C'est là l'objet du présent travail, nous suivrons pas à pas l'Ouvrage de Gyldén et nous en examinerons successivement chaque Chapitre.

J'aurais voulu conserver les notations de Gyldén; mais elles sont tellement compliquées et tellement changeantes que je n'en ai pas eu le courage. Je donne cependant des indications suffisantes pour que l'on puisse passer facilement d'une notation à l'autre.

Dans les citations, quand je renvoie à une page ou à un paragraphe désigné par le signe § ou n° suivi d'un numéro, il faut entendre la page ou le paragraphe de l'Ouvrage de Gyldén, *Nouvelles recherches*... Quand je renvoie à un paragraphe en écrivant le mot paragraphe en toutes lettres, il s'agit d'un paragraphe du présent travail. Enfin quand je renvoie à mon Ouvrage, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars, j'écris simplement *Méthodes nouvelles*.

II. — Analyse du Chapitre premier.

Le Chapitre premier est consacré à l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1-\alpha)\rho - \beta\rho^3 = -\gamma\cos v. \tag{1}$$

Gyldén applique à cette équation quatre méthodes différentes dont une fondée sur l'emploi des coefficients indéterminés et trois sur l'emploi des fonctions elliptiques.

Mais avant d'aller plus loin, disons quels sont les résultats qui sont démontrés au sujet de cette équation et que Gyldén aurait dû retrouver. Si l'on applique à l'équation (1) la méthode de la variation des constantes arbitraires de Lagrange

en regardant ρ et γ comme des quantités très petites, on obtient une série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de deux arguments

$$v \quad \text{et} \quad w = v\sqrt{1-\alpha} + \text{const.}$$

et suivant les puissances de v; cette série où v figure en dehors des signes trigonométriques est convergente pourvu que v soit suffisamment petit. Je l'appellerai la série S.

Le terme général de la série S est donc de la forme $Av^m \cos(pv + qw + h)$. Si nous réunissons tous les termes de la série S qui contiennent en facteur une des lignes trigonométriques d'un même arc $pv + qw$, on peut en faire la somme, et cette somme a pour valeur $A \cos(pv + qf + h)$, où f est un nouvel argument de la forme

$$f = \sigma v + \varepsilon,$$

σ étant une nouvelle constante donnée et ε une constante arbitraire d'intégration. En groupant les termes de cette manière, on obtient une nouvelle série S_1 procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples des deux arguments v et f, et ne contenant pas v en dehors des signes trigonométriques. Cette nouvelle série S_1 est *divergente*, au sens que les mathématiciens attachent à ce mot; elle peut néanmoins être employée dans un but pratique pourvu que ce soit avec circonspection. Elle peut donner une valeur approchée de la fonction inconnue, si l'on s'arrête à un certain terme.

Cette série S_1 dépend de deux constantes arbitraires; la première est ε, et figure dans f; la deuxième peut être choisie de bien des manières; à l'exemple de Gyldén nous prendrons le coefficient du terme en $\cos f$ et nous l'appellerons z. Si l'on fait $z = 0$, tous les termes dépendant de f disparaissent; la série S_1 ne contient plus que l'argument v, elle ne dépend plus de la constante ε; grâce à cette réduction, *la série* S_1 *devient convergente*. C'est la *solution périodique*.

Supposons que la constante z ne soit pas nulle, mais très petite et négligeons les termes en z^2, nous trouvons ainsi

$$\rho = H + zH_1 \sin f + zH_2 \sin f,$$

où H indépendant de z représente la solution périodique que nous venons de définir et où H, H_1, H_2 sont développables suivant les sinus et cosinus des multiples de l'argument unique v. Cette série représente les solutions très voisines de la solution périodique (cf. *Méthodes nouvelles*, Chap. IV); *elle est convergente;* je l'appellerai S_2.

Dans les différents termes de S et de S_1 figurent ce que l'on appelle de *petits diviseurs* introduits par l'intégration. Parmi eux nous distinguerons le petit diviseur α qui s'introduit dans la série S quand on intègre un terme en $w + n(w - v)$ et qu'on retrouve dans la série S_1 déduite de S. Parmi les termes de S_1, conservons seulement ceux qui contiennent α au dénominateur à la même puissance que β ou γ au numérateur. L'ensemble de ces termes formera une nouvelle série S_3; cette série sera *convergente*. C'est celle à laquelle conduit la *méthode de Delaunay*. Comment se fait-il que la série S_3 étant convergente, la série S_1 soit néanmoins divergente; c'est à cause de la présence des petits diviseurs autres que α; mais comme ces petits diviseurs ne se rencontrent que dans des termes d'ordre élevé, la série convergente S_3 nous donnera une valeur approchée de la fonction inconnue pourvu qu'on ne veuille pas l'appliquer pendant un intervalle de temps trop long; c'est là ce qui fait la légitimité de la méthode de Delaunay.

Tels sont les résultats qui sont vrais de l'équation (1) comme des équations générales du problème des trois corps et des équations analogues.

Voyons maintenant ce qu'a fait Gyldén: il cherche à satisfaire à l'équation en posant

$$\rho = z\cos f + z_1 \cos v + R$$

et de façon que R soit petit par rapport aux deux autres termes. Il désigne par $\frac{1}{2}(R^2)$ la partie constante de R^2, d'où il résulte que (R^2) est petit et positif et il arrive aux équations suivantes [équations (4) de la page 10] :

$$(2)\qquad \begin{cases} -\sigma^2 + (1-\alpha) + \frac{3}{4}\beta z^2 - \frac{3}{2}\beta[z^2 + z_1^2 + (R^2)] = 0, \\ -\alpha + \frac{3}{4}\beta z_1^2 - \frac{3}{2}\beta[z^2 + z_1^2 + (R^2)] = -\frac{\gamma}{z_1}. \end{cases}$$

Remarquons pour comparer ces équations à celles de Gyldén, que α, β, σ et 1 représentent ici les β_1, β_3, $1 - \zeta$ et $1 - \sigma$ de Gyldén.

Ces équations sont-elles exactes; il suffit pour le voir de les comparer à la série convergente S_2 définie plus haut et que nous savons former.

Soit d'abord $z = 0$: dans ce cas la série S_1 ou S_2 se réduit à celle qui définit la solution périodique; le terme le plus gros est le terme

$$\rho = z_1 \cos v.$$

Alors les conclusions de Gyldén sont exactes et l'on trouve bien

$$(3)\qquad \frac{3}{4}\beta z_1^2 + \alpha z_1 - \gamma = 0,$$

ce qui est conforme à l'équation (2), puisque $\varkappa$ est nul et R très petit. Cette équation (3) limite bien la valeur de $\varkappa_1$ comme Gyldén l'a remarqué, et c'est cette remarque qui a été l'origine de tout son travail, où il a vainement cherché à la généraliser. On voit l'influence du terme en $\beta\rho^3$, et une comparaison physique la fera mieux comprendre. Si ce terme n'existait pas, l'équation (1) définirait le mouvement d'un pendule rigoureusement isochrone qui oscillerait sous l'influence d'une force périodique $\gamma\cos v$. Si cette force se trouve en résonance avec la période propre du pendule, les oscillations pourront devenir très grandes. Grâce à l'addition de ce terme, le pendule n'est plus rigoureusement isochrone; s'il y a résonance pour les oscillations infiniment petites, l'amplitude croîtra d'abord, mais quand elle sera plus grande, la période propre du pendule ne sera plus la même, la résonance disparaîtra et l'amplitude cessera de croître. Les constructeurs de navires ont souvent employé un artifice analogue.

Si nous supposons au contraire γ et $\varkappa_1$ nuls, l'équation (1) s'intègre très aisément par les fonctions elliptiques, on pourrait alors former aisément la première équation (2) en y faisant $\varkappa_1 = 0$ et négligeant R, qui est en effet négligeable si $\varkappa$ est petit. On reconnaîtrait ici encore que la formule de Gyldén est exacte. Observons que dans ces deux cas, il n'y a dans ρ qu'un seul argument, v dans le premier cas, f dans le deuxième.

Supposons maintenant que $\varkappa$ ne soit pas nul, mais très petit. Quelle devrait être d'après Gyldén la valeur de σ? Si $\varkappa$ est très petit, il en sera de même de R. On aura donc

$$\sigma^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta\varkappa_1^2. \tag{2 bis}$$

Cherchons maintenant la *vraie* valeur de σ. Soit ρ_0 la solution périodique; et $\rho = \rho_0 + \varepsilon$; dans ce cas ρ_0 est indépendant de $\varkappa$ et ε est de l'ordre de $\varkappa$; nous pouvons donc négliger ε^2, ce qui donne

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv} + (1 - \alpha - 3\beta\rho_0^2)\,\varepsilon = 0$$

et comme ρ_0 est sensiblement égal à $\varkappa_1\cos v$, cela fait

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \left(1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta\varkappa_1^2 - \frac{3}{2}\beta\varkappa_1^2\cos 2v\right)\varepsilon = 0$$

ou

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \varepsilon\,(q^2 - q_1\cos 2v) = 0, \tag{4}$$

en posant

$$q^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta\varkappa_1^2, \qquad q_1 = \frac{3}{2}\beta\varkappa_1^2.$$

C'est là une équation qui a fait l'objet de travaux très nombreux que j'ai résumés dans le Chapitre XVII des *Méthodes nouvelles*.

Soit $\varepsilon = F(v)$ la solution de l'équation (4) qui se réduit à 1 et dont la dérivée se réduit à zéro pour $v = 0$; on aura

$$\cos\sigma\pi = F(\pi).$$

Développons $F(v)$ suivant les puissances croissantes de q_1 et de $1 - q^2 = \tau$, il viendra

$$F(v) = \cos v + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v) + R_1,$$

où R_1 contiendra les termes dépendant des puissances plus élevées de τ et de q_1; parmi ces termes, nous ne conserverons que ceux qui dépendent des secondes puissances, et qui ne s'annulent pas pour $v = \pi$. Or nous aurons des termes en $v \sin v$, en $(\cos v - \cos 3v)$, en $(\cos v - \cos 5v)$, en $v^2 \cos v$; nous n'avons à nous occuper que des derniers qui sont les seuls qui ne s'annulent pas pour $t = \pi$. Or R_1 est donné par l'équation

$$\frac{d^2 R_1}{dv^2} + R_1 = (\tau + q_1 \cos 2v)\left[\left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v)\right].$$

Nous pouvons négliger le terme en $\cos v - \cos 3v$ qui ne peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$. D'autre part

$$(\tau + q_1 \cos 2v) v \sin v = \left(\tau - \frac{q_1}{2}\right) v \sin v + \frac{q_1}{4} v \sin 3v,$$

où le premier terme seul peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$; il nous suffira donc d'écrire

$$\frac{d^2 R_1}{dv^2} + R_1 = \frac{1}{2}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v \sin v + \ldots,$$

d'où

$$R_1 = -\frac{1}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v^2 \cos v + \ldots$$

en n'exprimant que le terme en $v^2 \cos v$. Il vient donc

$$F(\pi) = -1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right).$$

Or

$$\cos\sigma\pi = -1 + \frac{(1-\sigma)^2\pi^2}{2}.$$

Il reste donc

$$(1-\sigma)^2 = \frac{1}{4}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta\varkappa_1^2 + \frac{27}{16}\beta^2\varkappa_1^4\right).$$

La formule de Gyldén donnerait

$$(1-\sigma)^2 = \frac{\tau^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta\varkappa_1^2 + \frac{9}{4}\beta^2\varkappa_1^4\right).$$

Avec la formule de Gyldén, σ est toujours réel; avec la *vraie* formule, σ peut devenir imaginaire, et c'est ce qui arrive par exemple si α est positif, β négatif et assez grand. Les différences peuvent être tout à fait énormes; elles ne peuvent s'expliquer par l'influence du terme en (R^2) qui non seulement devrait être très petit, mais serait toujours de même signe et, étant toujours réel, donnerait toujours pour $1-\sigma$ une valeur réelle.

Cherchons d'ailleurs le terme principal de R. Un calcul simple nous donne en négligeant les carrés de τ et de q_1 et en posant $\sigma = 1 - s$:

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa \cos f + \varkappa \cos(f - 2v)\frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}},$$

ce qui nous donne la valeur de R; le terme le plus important de R, c'est en effet le terme en $\cos(f - 2v)$. Le rapport du terme en $\cos(f - 2v)$ au terme en $\cos f$ est $\frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}$. Or le numérateur et le dénominateur sont du même ordre de grandeur; donc R n'est pas négligeable devant ρ_0.

Le seul cas où R serait négligeable devant ρ_0, serait celui où q_1 serait négligeable devant τ, c'est-à-dire $\beta\varkappa_1^2$ devant α; c'est-à-dire celui où la considération du terme en $\beta\rho^3$ est inutile, où les méthodes ordinaires suffisent, où celle de Gyldén est sans objet.

Gyldén dit page 17 que R reste même dans les cas exceptionnels de l'ordre de ρ_0 (c'est-à-dire de $\varkappa \cos f + \varkappa_1 \cos v$), mais qu'elle devient très petite dans les cas ordinaires, à savoir lorsque la valeur absolue de ω est sensiblement plus grande que l'unité [c'est-à-dire lorsque les trois racines de l'équation (3) diffèrent sensiblement l'une de l'autre]. On peut se demander ce qu'il entend par *sensiblement*. Quand il dit que $|\omega|$ est sensiblement > 1, veut-il dire que $|\omega| - 1$ par exemple n'est pas très petit, ou que $|\omega|$ est très grand ?

Dans le premier cas, il se trompe, nous venons de voir que R est du même ordre de grandeur que ρ_0 pour toutes les valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de ω, sauf pour les *très petites* valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$.

Dans le deuxième cas, ce qu'il dit est exact, car si ω est très grand, $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit. mais si $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit, l'emploi de la méthode n'a plus, comme nous l'avons dit, aucune raison d'être.

Il semble bien d'ailleurs que sa pensée doit être interprétée de la première manière. Il sait trop bien le français pour avoir employé une expression impropre et le contexte semble plutôt favorable à cette interprétation.

Est-il vrai du moins que R ne peut jamais être *très grand* par rapport aux termes conservés de ρ? Oui, si l'on suppose $\varkappa$ très petit, car alors nous avons

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa \cos f + \varkappa' \cos(f - 2v)$$

et nous avons donné l'expression du coefficient $\varkappa'$; c'est le dernier terme qui représente R. Si nous posons

$$2v - f = f'$$

cette équation devient

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa' \cos f' + \varkappa \cos(f' - 2v).$$

On retombe donc sur une expression de même forme, mais où le rôle des coefficients $\varkappa$ et $\varkappa'$ est interverti. On peut donc *indifféremment* prendre $\varkappa$ ou $\varkappa'$ pour le coefficient du terme principal, ou pour celui de R; si l'on *convient* de regarder toujours le plus grand des deux comme représentant le terme principal, on sera certain que R ne pourra devenir très grand.

Aurait-on la même liberté si $\varkappa$ n'étant plus très petit, on devait tenir compte des puissances supérieures de $\varkappa$? On aurait alors des termes en $2f - 3v$, $2f - v$, etc., et si le coefficient de l'un de ces termes devenait très grand on ne pourrait plus employer le même artifice. Nous verrons plus loin que cela peut fort bien arriver.

III. — Cause de l'erreur de Gyldén.

Les conclusions de Gyldén, du Chapitre premier, § 1, n° 2, pages 10 à 17 sont donc fausses. Quelle est l'origine de son erreur?

Il envisage l'équation (1) et égale dans les deux membres les coefficients de $\cos f$ et $\cos v$. Si $\varkappa$ est très petit, nous pouvons écrire

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa \cos f + \varkappa' \cos(f - 2v).$$

Il vient alors dans ρ^3 des termes en

$$\text{(A)} \qquad \cos^2 v \cos f, \qquad \cos^3 f, \qquad \cos^2(f - 2v) \cos f$$

et en

$$(B) \qquad \cos^2 v \cos(f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos f$.

Nous avons aussi dans ρ^3 des termes en

$$(A') \qquad \cos^3 v, \qquad \cos^2 f \cos v, \qquad \cos^2(f - 2v)\cos v$$

et en

$$(B') \qquad \cos v \cos f \cos(f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos v$. Gyldén tient compte des termes (A) et (A'), mais ne tient pas compte des termes (B) et (B') qui sont du même ordre.

Si z n'étant plus très petit, on ne pouvait plus négliger z^2, il y a bien d'autres termes dont il faudrait tenir compte.

L'introduction des termes négligés ferait perdre aux équations leur forme « horistique ».

Dans le n° 3, Gyldén fait une tentative pour pousser l'approximation plus loin. Il arrive ainsi à des formules très compliquées d'où il ne tire rien; elles ne lui servent même pas à lui faire découvrir l'erreur commise dans le numéro précédent. Il se borne à montrer que les résultats du n° 3 concordent approximativement avec ceux du n° 2, pourvu que la quantité qu'il appelle f page 25 soit très grande. Mais le cas où f est très grand est précisément celui où les vieilles méthodes classiques s'appliquent sans difficulté et où tout cet appareil est inutile.

Je n'ai pu arriver à déterminer quel est le but poursuivi dans le n° 4, et comme il n'est fait dans la suite aucune application des résultats qui y sont contenus, je m'abstiendrai d'en analyser ici le contenu.

IV. — Emploi des fonctions elliptiques.

Dans le § 2, Gyldén applique une seconde méthode, fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques; nous allons voir qu'elle ne diffère pas de la méthode de Delaunay et qu'elle permet par conséquent d'obtenir correctement une première approximation. Nous verrons ensuite l'usage que Gyldén cherche à en faire pour les approximations suivantes.

Posons

$$\rho = ge^{iv} + he^{-iv}, \qquad \gamma \cos v = \frac{\gamma}{2}(e^{iv} + e^{-iv}).$$

Substituons dans l'équation (1) et égalons dans les deux membres les coefficients de e^{iv} et e^{-iv}. Nous aurions aussi des termes en $e^{\pm 3iv}$, mais nous ne

nous en occupons pas parce qu'ils ne sauraient donner naissance à de petits diviseurs. Nous obtenons ainsi les deux équations

$$(5)\qquad g'' + 2ig' = \alpha g + 3\beta g^2 h - \frac{\gamma}{2}, \qquad h'' - 2ih' = \alpha h + 3\beta g h^2 - \frac{\gamma}{2},$$

où g', g'' désignent les dérivées successives de g par rapport à v.

Dans g et h nous ne conserverons que les termes à longue période qui seuls peuvent donner lieu à de petits diviseurs: mais alors nous pouvons négliger g'' et h'' devant g' et h', et il reste

$$(6)\qquad 2ig' = \alpha g + 3\beta g^2 h - \frac{\gamma}{2}, \qquad -2ih' = \alpha h + 3\beta g h^2 - \frac{\gamma}{2}.$$

Multiplions par h', et g', ajoutons et intégrons, il viendra

$$(7)\qquad \alpha g h + \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 - \frac{\gamma}{2}(h+g) = \text{const.}$$

On peut ensuite achever l'intégration par les fonctions elliptiques. Telle est, aux notations près, la deuxième méthode de Gyldén.

Comparons avec la méthode de Delaunay. Posons

$$F = \frac{1}{2}(\rho'^2 + \rho^2) - \frac{\alpha}{2}\rho^2 - \frac{\beta}{4}\rho^4 + \gamma\rho\cos v + u,$$

ρ' désignant la dérivée de ρ par rapport à v, et u une variable auxiliaire.

L'équation (1) peut être remplacée par les équations canoniques

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{dF}{d\rho'} = \rho', & \dfrac{d\rho'}{dt} = -\dfrac{dF}{d\rho} = -(1-\alpha)\rho + \beta\rho^3 - \gamma\cos v; \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dF}{du} = 1, & \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dF}{dv}. \end{cases}$$

Posons $\rho = \sqrt{2\xi}\cos\omega$, $\rho' = \sqrt{2\xi}\sin\omega$; d'où

$$F = \xi + u - \alpha\xi\cos^2\omega - \beta\xi^2\cos^4\omega + \gamma\sqrt{2\xi}\cos v\cos\omega,$$

les équations conserveront avec les variables ξ, ω et v, u la forme canonique. Si, conformément à la méthode de Delaunay, nous ne conservons que les termes à longue période; si par conséquent nous laissons de côté les termes en $\cos 2\omega$, $\cos 4\omega$, $\cos(v-\omega)$, il restera

$$F = \xi + u - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos(v+\omega).$$

Soit

$$\omega + v = \varepsilon, \qquad u = \zeta - \xi,$$

il viendra

$$(9)\qquad F = \zeta - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos\varepsilon$$

et les équations, devant rester canoniques, deviendront

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dW}{d\varepsilon} = -\gamma\frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\sin\varepsilon, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{dW}{d\xi} = +\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\xi - \frac{\gamma\cos\varepsilon}{2\sqrt{2\xi}};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dW}{d\zeta} = 1, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{dW}{dv} = 0.$$

Si nous posons

$$g = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\,e^{-i\varepsilon}, \qquad h = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\,e^{i\varepsilon},$$

on retombera sur les équations (6), d'où il suit que la deuxième méthode de Gyldén, étant identique à celle de Delaunay, nous donne une première approximation correcte.

On voit sans peine que g et h sont des fonctions doublement périodiques de v. On peut alors construire les équations correctes qui lient les quantités appelées plus haut $\varkappa$, $\varkappa_1$ et σ; ces équations sont transcendantes et elles n'ont par conséquent aucun rapport avec les équations (2). A ce point de vue les conclusions du § 2 sont en contradiction directe avec celles du § 1.

Dira-t-on au moins que les formules concordent quand $\varkappa$ est très petit non seulement d'une façon absolue, mais par rapport à $\varkappa_1$? Nous allons voir que non, et l'analyse que nous venons de donner dans le paragraphe II suffisait d'ailleurs pour que nous en fussions sûrs d'avance.

Nous allons développer g et h suivant les puissances de $\varkappa$, et écrire

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots, \qquad h = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots,$$

où h_n représente l'ensemble des termes de l'ordre de $\varkappa^n$. Nous trouvons d'abord

$$g_0 = h_0 = \text{const.}, \qquad \varkappa g_0 + 3\beta g_0^3 = \frac{\gamma}{2}$$

et ensuite

$$(10) \qquad 2ig'_1 = (\alpha + 6\beta g_0^2)g_1 + 3\beta g_0^2 h_1, \qquad -2ih'_1 = (\alpha + 6\beta g_0^2)h_1 + 3\beta h_0^2 g_1.$$

Ce sont des équations linéaires à coefficients constants; nous pourrons y satisfaire en posant

$$g_1 = \varkappa e^{-i\zeta v}, \qquad h_1 = \varkappa' e^{-i\zeta v},$$

ou bien

$$g_1 = \varkappa' e^{i\zeta v}, \qquad h_1 = \varkappa e^{i\zeta v}.$$

Ou bien encore en faisant la demi-somme de ces deux solutions particulières; on obtient ainsi

$$g = 2g_0\cos v + \varkappa\cos f + \varkappa'\cos(f - 2v).$$

avec

$$f = (1 - \zeta)v, \qquad 2g_0 = \varkappa_1$$

et en substituant dans les équations (10), on trouve,

$$\varkappa(2\zeta - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 \varkappa', \qquad \varkappa'(-2\zeta - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 \varkappa.$$

Mais $\alpha + 6\beta g_0^2$ est ce que nous avons appelé plus haut τ, et $3\beta g_0^2$ est ce que nous avons appelé $\frac{1}{2} q_1$; il vient ainsi

$$\varkappa(2\zeta - \tau) = \frac{1}{2} q_1 \varkappa', \qquad \varkappa'(-2\zeta - \tau) = \frac{1}{2} q_1 \varkappa;$$

d'où

$$4\zeta^2 = \tau^2 - \frac{q_1^2}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}.$$

Ces formules sont en concordance avec les résultats du paragraphe II et en désaccord avec les équations (2), c'est-à-dire avec les équations de Gyldén.

Cherchons encore les termes constants de g_2 et h_2. Nous avons

$$\begin{aligned} 2ig'_2 - (\alpha + 6\beta g_0^2) g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 &= 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 g_1^2, \\ -2ih'_2 - (\alpha + 6\beta g_0^2) g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 &= 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 h_1^2. \end{aligned}$$

Nous cherchons seulement les parties constantes de g_2 et h_2; nous devons donc faire $g'_2 = h'_2 = 0$, $g_2 = h_2$, et remplacer $g_1 h_1$, g_1^2 et h_1^2 par leurs parties constantes. Or nous avons

$$g_1 = \frac{\varkappa}{2} e^{-i\zeta v} + \frac{\varkappa'}{2} e^{+i\zeta v}, \qquad h_1 = \frac{\varkappa'}{2} e^{-i\zeta v} + \frac{\varkappa}{2} e^{i\zeta v};$$

d'où

$$\text{partie constante } g_1^2 = \text{partie constante } h_1^2 = \frac{\varkappa\varkappa'}{2},$$

$$\text{partie constante } g_1 h_1 = \frac{\varkappa^2 + \varkappa'^2}{4};$$

d'où

$$-(\alpha + 9\beta g_0^2) g_2 = \frac{3\beta g_0}{2} (\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa\varkappa').$$

Or nous allons avoir, non plus $\varkappa_1 = 2g_0$ comme dans l'approximation précédente, mais

$$\varkappa_1 = 2g_0 + 2g_2.$$

Comparons avec la seconde équation (2) qui peut s'écrire

$$-\alpha\varkappa_1 - \frac{3}{4}\beta\varkappa_1^3 - \frac{3}{2}\beta\varkappa_1(\varkappa^2 + \varkappa'^2) = -\gamma$$

en remarquant que $\varkappa'^2$ n'est pas autre chose que ce que Gyldén appelle (R^2). En première approximation, nous avons

$$\alpha\varkappa_1 + \frac{3}{4}\beta\varkappa_1^3 = \gamma, \qquad \varkappa_1 = 2g_0.$$

Soit $\varkappa_1 = 2g_0 + 2\delta$, de sorte que δ devrait être égal à g_2. Cela fera en négligeant δ^2, $\delta\varkappa^2$, $\delta\varkappa'^2$:

$$-(\alpha + 9\beta g_0^2)\delta = \frac{3}{2}\beta g_0(\varkappa^2 + \varkappa'^2),$$

on reconnaît déjà que la formule est erronée.

V. — Discussion de la méthode précédente.

Jusqu'ici les conclusions du § 2, d'ailleurs contradictoires avec celles du § 1, sont correctes, mais Gyldén veut pousser plus loin l'approximation et tenir compte des termes négligés. Il écrit donc les équations (avec d'autres notations)

$$(11) \qquad 2ig' - \alpha g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} = M', \qquad -2ih' - \alpha h - 6\beta h^2 g + \frac{\gamma}{2} = N',$$

où M' et N' représentent l'ensemble des termes d'abord négligés, et il les intègre par approximations successives.

J'aurais à faire au sujet de ses conclusions la remarque suivante. Ayant résolu correctement les équations (6), il constate qu'elles conduisent dans certains cas à des solutions asymptotiques.

« Mais, ajoute-t-il page 67, nous verrons dans ce qui suit que la solution asymptotique n'appartient pas à notre problème; elle est due uniquement à la manière d'aborder les approximations... ».

Il est évident qu'ici Gyldén se trompe. Les équations approximatives (6) admettent un système de solutions asymptotiques et par conséquent une solution périodique pour laquelle les exposants caractéristiques sont réels et différents de zéro. Si les équations approximatives admettent une solution périodique, il en sera de même des équations exactes, qui en diffèrent fort peu; car si l'on fait varier un système d'équations différentielles d'une manière continue, une solution périodique ne peut disparaître que quand l'un des exposants caractéristiques est nul, ce qui n'est pas le cas; de plus cette solution périodique aura encore des exposants caractéristiques réels, puisqu'ils différeront très peu de ceux qui correspondent aux équations (6); et l'existence des exposants caractéristiques réels entraîne celle des solutions asymptotiques. Tous ces points sont hors de doute et je les ai établis d'une façon très simple et rigoureuse dans mes *Méthodes nouvelles*.

Gyldén cherche à nous donner la démonstration promise d'abord page 71, puis page 75; il cherche d'abord à montrer qu'on peut diriger les approxi-

mations de façon à ne plus rencontrer de solution asymptotique. Pour cela il écrit les équations (11) sous la forme suivante :

$$(11\,bis)\qquad \begin{cases} 2ig' - (\alpha+\varepsilon)g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} = M' - \varepsilon g, \\ -2ih' - (\alpha+\varepsilon)h - 6\beta g h^2 + \frac{\gamma}{2} = N' - \varepsilon h. \end{cases}$$

et il intègre par approximations successives en faisant d'abord les deuxièmes membres égaux à zéro, remplaçant ensuite les inconnues dans les deuxièmes membres par les valeurs trouvées en première approximation et ainsi de suite.

Il choisit ε de façon à éviter la solution asymptotique et il se flatte de pouvoir conduire les approximations suivantes en évitant l'introduction de cette solution et en aboutissant à une série convergente.

Pour juger cette prétention, il suffit de comparer à un exemple simple.

Soit

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \beta\rho = \cos v.$$

Nous voyons que si $\beta = 1$, l'équation ne comporte plus de solution périodique et que v sort des signes trigonométriques. Croira-t-on que l'on peut échapper à cette conséquence par l'artifice qui consiste, β étant égal à 1, à écrire l'équation sous la forme

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1+\varepsilon)\rho = \cos v + \varepsilon\rho\,?$$

Nous trouvons en première approximation $\rho = 0$, puis $\rho = \frac{\cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{2\cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{3\cos v}{\varepsilon}$, suite manifestement divergente.

Eh bien, Gyldén fait absolument la même chose. Il y a page 72 quelques lignes sur l'ordre de grandeur des quantités introduites. Ces lignes, trop concises pour être claires, tendent évidemment à prouver que la série obtenue sera convergente, ou du moins que les termes iront en diminuant.

Or cela n'est pas exact; car si nous supposons $M' = N' = 0$, les équations (11 *bis*) se réduisent aux équations (6) et nous savons, Gyldén l'a démontré lui-même, que ces équations admettent des solutions asymptotiques. La série en question est donc divergente, puisque si elle était convergente, ces solutions n'existeraient pas.

La série converge-t-elle dans d'autres cas? Les deuxièmes membres de (11 *bis*) peuvent-ils être assez petits pour qu'il en soit ainsi? Cela n'a pas lieu,

nous venons de le voir quand M′ et N′ sont nuls; cela ne pourrait donc être vrai que si M′ et N′ détruisaient les termes les plus importants de εg et de εh. Or il est évident qu'il ne peut pas en être ainsi *quels que soient* M′ *et* N′. Eh bien, dans le raisonnement de Gyldén, il n'est fait aucune hypothèse sur M′ et N′ (ou ce qui revient au même sur ce qu'il appelle M et N). Son raisonnement est donc inexact.

Gyldén cherche ensuite à montrer que la solution asymptotique ne peut pas servir de point de départ à une véritable approximation (p. 75, 199) parce que le deuxième terme du développement est susceptible de devenir infini.

C'est comme si l'on disait que quand α est petit, $\sqrt{\varkappa}$ n'est pas une valeur approchée de $\sqrt{\varkappa+\alpha}$, sous prétexte que si l'on développe suivant les puissances de α, le deuxième terme du développement est $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\varkappa}}$ et devient infini pour $\varkappa = 0$.

Dans le § 3, Gyldén applique une nouvelle méthode qui ne diffère de la précédente que par quelques complications nouvelles. Il néglige les termes M′ et N′ de sorte que les équations (11) se réduisent aux équations (6); nous venons de voir que ces équations s'intègrent très aisément par les fonctions elliptiques. Je n'ai pu arriver à comprendre pourquoi il aborde ainsi par une méthode approximative et compliquée un problème qu'il a lui-même résolu par une méthode rigoureuse et simple.

Il n'y a qu'un passage où il ne dit pas explicitement qu'il néglige M′ et N′, c'est celui de la page 93; mais on doit remarquer qu'il y regarde W comme une fonction périodique de l'argument *unique* w, ce qui ne peut s'expliquer que de deux manières; ou bien s'il néglige M′ et N′ comme dans le reste du §, ou bien s'il réduit M′ et N′ aux termes $-g''$ et $-h''$ qui sont négligés dans les équations (6). Dans ce dernier cas, on retomberait sur les équations (12) du paragraphe suivant, sur lesquelles nous reviendrons.

VI. — Nouvelle méthode de Gyldén.

Dans le § 4, Gyldén emploie encore une nouvelle méthode, fondée également sur l'emploi des fonctions elliptiques. Elle consiste à développer la solution de l'équation (1) suivant les puissances de γ.

Si l'on appliquait cette méthode dans toute sa rigueur, on trouverait en première approximation, c'est-à-dire pour $\gamma = 0$, que ρ est une fonction doublement périodique de v, développable suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un argument unique $f = v + w$, fonction linéaire de v. Dans les

approximations suivantes on trouverait des termes en $mv + nw$, m et n étant des entiers quelconques.

Il s'introduirait aussi des termes séculaires où v sortirait des signes trigonométriques, mais Gyldén évite l'introduction de ces termes séculaires par l'artifice suivant :

Il écrit l'équation (1) sous la forme

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \alpha')\rho - \beta\rho^3 = -\gamma\cos v + (\alpha - \alpha')\rho,$$

α' étant une indéterminée. Dans le deuxième membre, il substitue à la place de ρ, d'abord zéro, puis à la deuxième approximation la valeur de ρ trouvée en première approximation et plus généralement à la $n^{\text{ième}}$ approximation la valeur trouvée en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Il dispose ensuite de l'indéterminée α' à chaque approximation, de façon à faire disparaître les termes en $\cos f$ qui lui donneraient après intégration des termes séculaires. *Cet artifice est légitime.*

De plus, il laisse de côté à chaque approximation les termes en $mv + nw$ où l'entier m n'a pas la valeur ± 1. Ce qui justifie dans une certaine mesure cette manière de faire, c'est que les termes de la forme $v + nw$ sont ceux où s'introduit le plus important de tous les petits diviseurs; mais on ne doit pas oublier que d'autres termes (qu'on ne rencontre pas il est vrai dans les premières approximations, mais seulement dans les suivantes), introduisent de nouveaux petits diviseurs encore plus petits, et que c'est précisément à ces petits diviseurs qu'est due la divergence des séries.

Opérer de la sorte, cela revient à déterminer g et h par les équations

$$(12) \qquad g'' + 2ig' - \alpha g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} = 0, \qquad h'' - 2ih' - \alpha h - 6\beta h^2 g + \frac{\gamma}{2} = 0.$$

Cette méthode se rapproche de celle de Delaunay; elle n'est pas plus précise car les termes par lesquels les équations (12) diffèrent des équations (6) ne sont pas plus grands et plus importants que les autres termes négligés.

Il ne faudrait pas croire non plus que l'on obtient par ce procédé tous les termes en $v + nw$ avec leurs coefficients exacts. En effet, il peut s'introduire à la $k^{\text{ième}}$ approximation des termes de la forme $mv + nw$ $(m > 1)$ dont la combinaison produira à la $(k+p)^{\text{ième}}$ approximation un terme $v + nw$; si l'on néglige ces termes à la $k^{\text{ième}}$ approximation, le coefficient du terme en $v + nw$ ne sera plus exact à la $(k+p)^{\text{ième}}$.

Quoi qu'il en soit les équations (12) admettent l'intégrale

$$g'h' - \alpha gh - \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 + \frac{\gamma}{2}(h+g) = \text{const.}$$

On ne peut pas en trouver l'intégrale générale; mais pour l'objet poursuivi par Gyldén, il suffit d'en connaître une solution périodique. Cette solution périodique existe et le développement correspondant converge, comme il arrive toujours pour une solution périodique.

Les développements trouvés par Gyldén dans ce § 4 sont donc bien convergents, ainsi qu'il l'annonce. Ils pourraient être très facilement obtenus par la théorie des solutions périodiques. Mais dès qu'il voudrait tenir compte des termes en $mv + nw$, la convergence cesserait.

L'analyse de Gyldén ne nous apprend d'ailleurs rien de plus que la méthode de Delaunay. Elle n'est pas plus précise; elle n'est pas plus propre à nous renseigner sur la convergence des développements *complets*.

VII. — Analyse du deuxième Chapitre.

Passons au Chapitre II et au § 5; Gyldén y envisage des équations plus compliquées où figure dans le premier membre outre la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dv^2}$, un polynome entier en y et $\frac{dy}{dv}$ dont les coefficients sont des fonctions connues de v. Quant au deuxième membre, c'est une fonction connue de v. Toutes ces fonctions connues de v sont supposées développables en séries trigonométriques.

Gyldén commence par étudier des transformations, permettant de simplifier cette équation. Je n'expliquerai pas ici le détail de ces transformations. Il arrive page 137 à l'équation suivante :

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \Gamma_1 y + \Gamma_2 y^2 + \Gamma_3 y^3 = \Omega,$$

où Γ_1, Γ_2, Γ_3, Ω sont des fonctions connues de v, *toutes très petites*; mais il n'énonce pas de résultats assez nets pour qu'on puisse les discuter.

A la page 142, il envisage une équation analogue, mais où Γ_1 est très voisin de 1. La discussion des transformations qu'il lui applique nous entraînerait trop loin, j'ai hâte d'arriver à ce qu'il dit page 158 d'une équation plus simple qui est son équation (39),

$$\frac{d^2z}{du^2} + (1 + \beta_1 - \beta_2\eta^2)z + \beta_0\chi\eta^2 = \Omega, \qquad \eta^2 = (1-\beta)z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 \qquad (\Omega \text{ et } \chi \text{ donnés}).$$

Il cherche à satisfaire à cette équation en posant

$$z = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

et en déterminant les V par une série d'équations qu'il appelle (47) page 170 et qui sont de la forme

$$\frac{d^2 V_n}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \Pi) V_n = \Omega_n,$$

Ω_n étant connu et Π étant la partie constante de η^2.

Laissant de côté, pour simplifier, β et χ, ainsi que β_1 et faisant $\beta_3 = -1$ pour fixer les idées, nous voyons que l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2 z}{du^2} + z\left(1 + z^2 + \frac{dz^2}{du^2}\right) = \Omega. \tag{13}$$

Gyldén s'imagine qu'il obtiendra une première approximation en négligeant dans le coefficient de z les termes périodiques, de sorte que ce coefficient se réduise à une constante Π et que l'équation (13) devienne

$$\frac{d^2 z}{du^2} + z(1 + \Pi) = \Omega. \tag{13 bis}$$

Il est important d'examiner si cela est légitime, parce que c'est le principe même de la méthode horistique.

Soit

$$\Omega = \gamma \cos u + \gamma' \cos(u + \omega),$$

où $\omega = \sigma v$, σ étant petit.

L'équation (13 *bis*) nous conduirait alors à une solution de la forme

$$z = \varkappa \cos u + \varkappa' \cos(u + \omega)$$

et alors on aurait sensiblement (à cause de la petitesse de σ)

$$\eta^2 = z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \varkappa^2 + \varkappa'^2 + 2\varkappa\varkappa' \cos\omega, \qquad \Pi = \varkappa^2 + \varkappa'^2.$$

Substituons dans les équations (13) et (13 *bis*). L'équation (13 *bis*) donne

$$\varkappa(\varkappa^2 + \varkappa'^2) = \gamma, \qquad -\varkappa'(2\sigma + \sigma^2) + \varkappa'(\varkappa^2 + \varkappa'^2) = \gamma'; \tag{14}$$

d'où Gyldén conclut que $\varkappa$ et $\varkappa'$ sont limités. Mais on néglige ainsi la différence entre les premiers membres de (13) et (13 *bis*), c'est-à-dire

$$2z\varkappa\varkappa' \cos\omega = \varkappa^2\varkappa' \cos(u + \omega) + \varkappa^2\varkappa' \cos(u - \omega) + \varkappa'^2\varkappa \cos u + \varkappa'^2\varkappa \cos(u + 2\omega).$$

Si σ est très petit, si γ et γ' sont comparables entre eux, $\varkappa$ et $\varkappa'$ sont du même ordre de grandeur, $\varkappa^2\varkappa'$, $\varkappa^3$, etc. sont comparables à γ et les termes négligés sont de l'ordre de Ω, c'est-à-dire des termes conservés.

Du reste on montre cela d'une façon plus frappante en raisonnant comme il suit :

Faisons $\sigma = 0$, $\gamma = \gamma'$; les deux équations (14) ajoutées donnent

$$2\varkappa^3 = \gamma = 2\varkappa'^3 = \gamma', \qquad (\varkappa + \varkappa')^3 = 4\gamma.$$

Mais si $\sigma = 0$, les deux termes de Ω se confondent en un seul et l'on a $\Omega = 2\gamma \cos u$, d'où par la première équation (14) (qui est alors exacte) :

$$(\varkappa + \varkappa')^3 = 2\gamma,$$

résultat contradictoire avec le précédent.

L'analyse de Gyldén ne ressemble donc en rien à une approximation. Mais il faut se poser la question d'une façon plus large et se demander : Supposons que Gyldén n'ait pas commis cette erreur et qu'il ait calculé exactement ces coefficients $\varkappa$, ces coefficients auraient-ils été limités ?

Soit plus généralement

$$\begin{aligned} \Omega &= \Sigma \gamma_n \cos f_n, \qquad f_n = u(1 + \sigma_n), \qquad \sigma_n = \varepsilon \lambda_n, \\ z &= \Sigma \varkappa_n \cos f_n, \qquad \mu_n = 2\lambda_n + \varepsilon \lambda_n^2. \end{aligned}$$

Nous supposons les σ_n très petits, ε très petit, λ_n et μ_n finis.

Nous voyons d'abord que z est une fonction paire de u, de telle façon que pour $u = 0$ ses dérivées d'ordre impair s'annulent. Nous désignerons par y, y'', y^{IV}, etc., les valeurs de z et de ses dérivées successives d'ordre pair pour $u = 0$; et de même par Ω_0, Ω''_0, etc., les valeurs de Ω et de ses dérivées pour $u = 0$. On trouve ainsi

$$y'' + y + y^3 = \Omega_0, \qquad (y^{\text{IV}} + 2y'' + y) + (y + y'')y(y + 2y'') = \Omega_0 + \Omega''_0.$$

Or

$$\begin{aligned} y &= \Sigma \varkappa_n, \qquad \Omega_0 = \Sigma \gamma_n, \qquad y = y'' = -\varepsilon \Sigma \varkappa_n \mu_n, \\ \Omega_0 + \Omega''_0 &= -\varepsilon \Sigma \gamma_n \mu_n, \qquad y^{\text{IV}} + 2y'' + y = \varepsilon^2 \Sigma \varkappa_n \mu_n^2, \end{aligned}$$

d'où

$$-\varepsilon \Sigma \varkappa \mu + (\Sigma \varkappa)^3 = \Sigma \gamma, \qquad \varepsilon \Sigma \varkappa \mu^2 + \Sigma(\varkappa \mu) \Sigma \varkappa (\Sigma \varkappa + 2\varepsilon \Sigma \varkappa \mu) = -\Sigma \gamma \mu,$$

ou si ε est très petit

$$(\Sigma \varkappa)^3 = \Sigma \gamma, \qquad \Sigma(\varkappa \mu)(\Sigma \varkappa)^2 = -\Sigma \gamma \mu,$$

ou enfin

$$\Sigma \varkappa \mu = \frac{-\Sigma \gamma \mu}{(\Sigma \gamma)^{\frac{2}{3}}}.$$

Or si $\Sigma \gamma = 0$, cette expression devient infinie; il faut donc que l'un des $\varkappa$ *au*

moins devienne infini (ou plutôt deux au moins, puisque $\Sigma z = 0$). *Les coefficients z ne sont donc pas limités.*

Ici encore la méthode horistique est en défaut.

VIII. — Équations de la longitude.

Jusqu'ici Gyldén a envisagé surtout les équations dont il se sert pour la détermination du rayon vecteur. Dans le § 6, il envisage plus particulièrement celles qui lui servent à déterminer la longitude. L'examen de la méthode horistique dans ce dernier cas est d'autant plus important qu'on a fait des tentatives pour l'appliquer, ce qu'on n'a jamais cherché à faire pour le rayon vecteur.

Un astronome tout à fait éminent, M. Backlund, trop confiant dans les résultats de Gyldén, s'est même un instant laissé entraîner à des conclusions inexactes qu'il a rectifiées depuis. M. Stockwell avait déterminé par les méthodes ordinaires certaines inégalités de la précession; M. Harzer avait calculé par les méthodes de Gyldén une inégalité de la longitude d'Hécube; j'entends par les premières méthodes de Gyldén et non par la méthode horistique. M. Backlund appliqua à ces deux cas les formules horistiques de Gyldén, et ces formules lui donnèrent des coefficients trois ou quatre fois plus petits que ceux qu'avaient obtenus ses devanciers. (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, mai 1900.)

Les équations de la longitude, de même que celles de la précession, peuvent être ramenées à la forme

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \Sigma a \sin(nt + v) + \Sigma b \sin pt,$$

où $\sin(nt + v)$ est l'un des termes à courte période et où $\sin pt$ est l'un des termes à longue période. Pour plus de simplicité, je n'envisagerai qu'un terme de chaque sorte et j'écrirai

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a \sin(nt + v) + b \sin pt. \tag{15}$$

Je supposerai que a et n sont petits, mais b et p beaucoup plus petits, de sorte que $\frac{b}{p^2}$ soit beaucoup plus grand que $\frac{a}{n^2}$, et que p^2 soit comparable à $\frac{a^2}{n^2}$.

Posons alors

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} = a \sin(nt + v_0) \tag{16}$$

et

$$v = v_0 + \varepsilon.$$

En négligeant le carré de ε, on trouve

$$(17) \qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\,\varepsilon\cos(nt + v_0) + b\sin pt.$$

Dans les anciennes méthodes (Stockwell et Harzer) on néglige le premier terme qui est à courte période et l'on écrit

$$\varepsilon = -\frac{b}{p^2}\sin pt.$$

Voici maintenant ce que donne la méthode horistique appliquée par M. Backlund. On trouve sensiblement

$$v_0 = -\frac{a}{n^2}\sin nt, \qquad \text{d'où} \qquad \cos(nt + v_0) = \cos nt + \frac{a}{n^2}\sin^2 nt.$$

L'équation (17) devient ainsi

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \varepsilon\left(a\cos nt + \frac{a^2}{n^2}\sin^2 nt\right) + b\sin pt$$

ou, *si l'on conserve seulement la valeur moyenne du coefficient de* ε :

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{a^2}{2n^2}\varepsilon + b\sin pt, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon = -\frac{b\sin pt}{\frac{a^2}{2n^2} + p^2}.$$

Telles sont les deux analyses entre lesquelles il s'agit de décider; cela est facile, puisque les équations (16) et (17) peuvent s'intégrer exactement et que Gyldén lui-même a souvent intégré des équations de même forme dans le cours de ses recherches.

Cette intégration montre que le terme en $\sin pt$ qui est le seul sensible est réduit à

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{p^2},$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus par les anciennes méthodes (*Cf. C. R. Acad. Sc.*, t. 132, p. 50) [1].

Backlund revenant sur la question (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, p. 291) découvrit le point faible de l'analyse qu'il avait d'abord suivie; mais il voulut généreusement prendre la faute tout entière sur lui et disculper Gyldén, sa

---

[1] *Œuvres de Henri Poincaré*, t. VIII.

conduite dans cette circonstance montre que son caractère est digne de son talent.

« Gyldén, dit-il, considère dès le début des approximations l'équation

$$(18)\quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon\cos(nt+v_0) - \frac{1}{2}a\varepsilon^2\sin(nt+v_0) - \frac{1}{6}a\varepsilon^3\cos(nt+v_0) + b\sin pt$$

(c'est-à-dire qu'il néglige ε^4 et non ε^2) et il arrive pour le terme en $\sin pt$ à l'expression $-\frac{b\sin pt}{\nu^2+p^2}$, où ν^2 est sans doute beaucoup plus petit que $\frac{a^2}{2n^2}$, mais n'est cependant pas nul. »

Backlund reconnut ensuite (*Bull. Astr.*, t. 19, p. 433) que la même objection s'applique non seulement au cas de la précession, mais aussi au cas d'Hécube, et il ajouta qu'il serait très désirable qu'une analyse plus approfondie conduisît à la détermination de ν^2.

Ce qui résulte de l'analyse précédente, c'est-à-dire de l'intégration exacte de l'équation (17), c'est que ν^2 s'annule avec b. Voyons comment Gyldén traite notre équation (18), qui joue un rôle analogue à celui de son équation (12) de la page 189 (*voir* p. 189 à 199).

Par une série de transformations assez compliquées, il la ramène à la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 96q^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 y = Y,$$

Y représentant un ensemble de termes connus; c'est son équation (16) de la page 198. Gyldén réduit $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ à sa valeur moyenne, qui est une constante positive, quitte à faire passer les termes négligés dans le deuxième membre et à les confondre avec Y. Son équation prend alors la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} - \beta y = -Q \qquad \text{[équation (17) de la page 198]},$$

où β est une constante *positive* et où Q est connu. C'est ce terme en βy qui permet d'éviter les petits diviseurs et qui joue le rôle de « terme horistique ».

C'est toujours le même procédé qui consiste à remplacer une des fonctions qui figure dans nos équations par sa valeur moyenne, et dont nous avons à plusieurs reprises reconnu l'illégitimité. Mais ici le terme en $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ ne joue qu'un rôle secondaire, car $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ est beaucoup plus petit que h_2. C'est donc le terme en h_2y qui est le principal *terme horistique;* comment s'est-il introduit dans les équations de Gyldén? Nous le voyons apparaître à la page 189.

« D'abord, dit Gyldén, nous en retranchons le terme dépendant de la partie constante de V_1^2, terme qui se réunit immédiatement avec la fonction Z_0. »

Voici ce que cela veut dire; reprenons notre équation (15); en posant comme nous l'avons fait $v = v_0 + \varepsilon$, et négligeant ε^3, elle peut s'écrire

$$\frac{d^2 v_0}{dt^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = a \sin(nt + v_0) + a\varepsilon \cos(nt + v_0)$$
$$- \frac{1}{2} a\varepsilon^2 \sin(nt + v_0) - \frac{1}{6} a\varepsilon^3 \cos(nt + v_0) + b \sin pt.$$

Nous avons vu comment cette équation peut se scinder en deux pour donner les équations (16) et (18); mais Gyldén ne fait pas tout à fait la même chose; il scinde l'équation de la façon suivante :

$$(16\,bis) \qquad \frac{d^2 v_0}{dt^2} = a\left(1 - \frac{h}{2}\right) \sin(nt + v_0),$$

$$(18\,bis) \qquad \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} - a\varepsilon \cos(nt + v_0) = -\frac{1}{2} a(\varepsilon^2 - h) \sin(nt + v_0)$$
$$- \frac{a\varepsilon^2}{6} \cos(nt + v_0) + b \sin pt,$$

la constante h qui joue le rôle de h_2 étant la valeur moyenne de la fonction périodique ε^2.

L'équation (18 *bis*) ne diffère que par les notations de l'équation (12) de la page 189 de Gyldén. Dans cette équation (12) nous voyons la constante h_2 figurer deux fois; à savoir dans le deuxième et le troisième terme. Cet h_2 qui figure dans le troisième terme, finit dans la suite des transformations par aller se perdre dans les termes connus Y ; le terme « horistique » de l'équation (16) de Gyldén provient donc uniquement du second terme de l'équation (12), c'est-à-dire du terme en V_1. Les termes en $\varepsilon^2 - h$ et en ε^3, dans la suite de l'analyse de Gyldén, finissent par se confondre dans les termes connus Y.

Voici donc, en dernière analyse, en quoi consiste la méthode de Gyldén. En première approximation on remplacera $\varepsilon^2 - h$ et ε^3 par zéro dans le deuxième membre de (18 *bis*) et l'on intégrera (16 *bis*) et (18 *bis*). Dans (16 *bis*) on donnera à h une valeur positive quelconque de l'ordre de ε^2. En deuxième approximation, on remplacera dans le deuxième membre de (18 *bis*), $\varepsilon^2 - h$ et ε^3 par leur première valeur approchée; quant à h on le remplacera dans (16 *bis*) par la valeur moyenne de la fonction périodique ε^2 obtenue en première approximation; et ainsi de suite.

Cette méthode serait légitime si le terme

$$(19) \qquad -\frac{ah}{2}\sin(nt+v_0)$$

dont on tient compte était plus important que le terme

$$(20) \qquad -\frac{a}{2}(\varepsilon^2-h)\sin(nt+v_0)$$

que l'on néglige. Or le terme le plus important de ε est un terme en $\sin pt$, soit donc

$$\varepsilon = k\sin pt.$$

Le terme (19) dont on tient compte est

$$-\frac{ak^2}{4}\sin(nt+v_0).$$

Le terme (20) que l'on néglige est

$$+\frac{ak^2}{8}\sin(nt+2pt+v_0)+\frac{ak^2}{8}\sin(nt-2pt+v_0).$$

Les coefficients sont du même ordre, les arguments sont à peu près les mêmes puisque p est beaucoup plus petit que n; l'intégration ne peut introduire de petit diviseur ni en ce qui concerne (19), ni en ce qui concerne (20). Il n'y a aucune raison pour tenir compte de l'un des termes plutôt que de l'autre.

L'analyse de Gyldén ne permet donc pas de trancher la question. Il s'agit de déterminer le coefficient de $\sin pt$. D'après les anciennes théories il serait sensiblement $\frac{b}{p^2}$. D'après Gyldén il serait $\frac{b}{\nu^2+p^2}$ où ν serait lui-même de l'ordre de $\frac{b}{p^2}$. Il faut donc faire le calcul en considérant b et p comme très petits et de telle façon que $\frac{b}{p^2}$ soit fini; c'est-à-dire développer suivant les puissances de b et conserver seulement parmi les termes en b^n ceux qui contiennent p^{2n} au dénominateur, c'est précisément ce que l'on fait dans la méthode de Delaunay; si nous trouvons $\frac{b}{p^2}$ pour le coefficient, Gyldén aura tort, si nous trouvons une fonction de $\frac{b}{p^2}$ qui ne devient pas infinie avec $\frac{b}{p^2}$, Gyldén aura raison.

Appliquons donc la méthode de Delaunay; posons $\chi = nt+v$, de sorte que notre équation devient

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = a\sin\chi + b\sin pt.$$

Nous pouvons alors écrire, en introduisant une variable auxiliaire χ' :

$$\frac{d\chi'}{dt} = a \sin\chi, \qquad \frac{d\chi}{dt} = \chi' - \frac{b}{p}\cos pt.$$

Posons (en introduisant deux nouvelles variables auxiliaires z et u)

$$F = \frac{1}{2}\chi'^2 - \frac{b}{p}\chi' \cos z + a\cos\chi + pu,$$

nos équations prendront la forme canonique :

$$\frac{d\chi'}{dt} = -\frac{dF}{d\chi}, \qquad \frac{d\chi}{dt} = \frac{dF}{d\chi'}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{du} = p, \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{dF}{dz}.$$

Appliquons la méthode de Jacobi.

Soit une fonction S de la variable χ et du paramètre W définie par l'équation

$$\left(\frac{dS}{d\chi}\right)^2 = 2[\varphi(W) - a\cos\chi].$$

Posons ensuite

$$\chi' = \frac{dS}{d\chi}, \qquad \frac{dS}{dW} = w = \int \frac{\varphi'(W)d\chi}{\sqrt{2(\varphi - a\cos\chi)}}.$$

Nous voyons :

1° que

$$\frac{\chi'^2}{2} - a\cos\chi = \varphi(W);$$

2° que $\chi' d\chi - W dw$ est une différentielle exacte ;

3° que χ', $\cos\chi$ et $\sin\chi$ sont des fonctions doublement périodiques de w ; nous pouvons choisir la fonction $\varphi(W)$ de façon que la période réelle soit 2π, et que χ', $\cos\chi$ et $\sin\chi$ soient développables suivant les sinus et cosinus des multiples de w.

Il vient alors

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi' \cos z$$

et les équations conservant la forme canonique s'écrivent

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dF}{dw}, \qquad \frac{dw}{dt} = -\frac{dF}{dW}, \qquad \frac{dz}{dt} = p.$$

La fonction F est développable suivant les cosinus et les sinus des multiples de w et de z. Pour appliquer la méthode de Delaunay, il faut ne conserver dans F que les termes « à longue période » c'est-à-dire ici ceux qui ne dépendent pas de w, mais seulement de z. Pour cela nous n'avons qu'à

réduire χ' à sa valeur moyenne qui est une fonction de W que j'appelle χ'_0, de sorte que

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi'_0 \cos z,$$

d'où

$$\frac{dW}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = -\varphi'(W) + \frac{b}{p}\frac{d\chi'_0}{dW}\cos z, \qquad \frac{dz}{dt} = p,$$

d'où

$$W = \text{const.}, \qquad z = pt, \qquad w = -t\varphi'(W) + \frac{b}{p^2}\frac{d\chi'_0}{dW}\sin pt.$$

On voit que w contient un terme en $\frac{b}{p^2}\sin pt$ qui devient très grand si $\frac{b}{p^2}$ est très grand ; or χ, d'après nos hypothèses, est une fonction de w qui augmente de 2π quand w augmente de 2π. S'il y a dans w un terme périodique d'amplitude très grande, il y en aura également un dans χ.

Le phénomène « horistique » ne peut donc se produire comme l'avait cru Gyldén.

IX. — Examen d'une équation particulière.

Passons maintenant à la page 208 ; nous y trouverons l'équation

$$(21) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y\frac{dy}{du} = -a\sin\sigma u.$$

Gyldén cherche une solution périodique de cette équation de la forme

$$y = \Sigma z_n \sin n\sigma u,$$

n étant entier positif ; on prend plaisir à se trouver en présence d'un problème aussi simple et aussi nettement posé.

Gyldén cherche à déterminer les coefficients z_n et il arrive à la fin de la page 209 à une équation qu'il cherche à discuter.

« Maintenant, dit-il, en supposant que les coefficients $z_3, z_4, \ldots$, ou connus, ou négligeables, il se comprend que la quantité z_1, qui s'obtient par la résolution de l'équation précédente du troisième degré, ne surpasse jamais une certaine limite qui s'approche d'autant plus de zéro, que la valeur de $\frac{16a}{\mu^2}$ est plus petite.

« On aura facilement des résultats semblables relativement aux coefficients z_2, $z_3, \ldots$ ».

Pour juger ce résultat, développons les deux membres de (21) suivant les puissances de u, et égalons les coefficients de u, il viendra

$$\sigma^2[-\Sigma\varkappa n^2+\mu(\Sigma\varkappa n)^2]=-a\sigma,$$

d'où

$$\Sigma|\varkappa|n^2+\mu(\Sigma|\varkappa|n)^2>\left|\frac{a}{\sigma}\right|. \tag{22}$$

Si σ est très petit, le second membre de cette inégalité est très grand, d'où il suit que les $\varkappa$ ne peuvent pas être tous limités.

Dira-t-on que la série $\Sigma\varkappa$ est convergente, mais que la série $\Sigma\varkappa n^2$ diverge, de sorte que le premier membre de l'inégalité peut être très grand, bien que tous les $\varkappa$ soient limités?

Non, car tant que la solution périodique existe, y est une fonction analytique de u, ses dérivées d'ordre quelconque sont des fonctions périodiques de u et sont comme elles développables en série de Fourier. La série $\Sigma|\varkappa|n^p$ est donc convergente quelque grand que soit p. Soit γ la plus grande des valeurs de $n^3|\varkappa|$, l'inégalité (22) nous donnera

$$\gamma\sum\frac{1}{n^2}+\mu\gamma^2\left(\sum\frac{1}{n^3}\right)^2>\left|\frac{a}{\sigma}\right|,$$

ce qui montre que γ croît indéfiniment avec $\left|\frac{a}{\sigma}\right|$.

D'ailleurs si, comme le dit Gyldén, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, ... étaient « négligeables », le premier membre de (22) ne dépendrait plus que de $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ et ne contiendrait plus qu'un nombre fini de termes. Il serait donc impossible que $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ soient tous deux limités.

Enfin montrons plus directement encore que y ne peut être limité. Soit M le maximum de $|y|$. Intégrons l'équation (21) sous la forme

$$\frac{dy}{du}-\frac{\mu}{2}y^2=\frac{a}{\sigma}\cos\sigma u+C.$$

Égalons les coefficients de $\cos\sigma u$ dans les deux membres; dans $\frac{dy}{du}$ le coefficient est plus petit que $\pi\sigma M$, dans y^2 plus petit que πM^2; nous aurons donc

$$\pi\sigma M+\pi M^2\frac{\mu}{2}>\left|\frac{a}{\sigma}\right|,$$

ce qui montre que M croît indéfiniment avec $\frac{a}{\sigma}$.

V. — Équations du rayon vecteur.

J'arrive au § 7, page 227. Nous y retrouvons l'équation (1), avec cette différence que le deuxième membre au lieu de se réduire à un seul terme en comprend plusieurs de même forme, dont je désignerai l'ensemble par X. Nous avons donc

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1-\alpha)\rho - \beta\rho^3 = X, \tag{23}$$

Gyldén écrit ici z au lieu de ρ; β_3 au lieu de β, et Z au lieu de $1-\alpha$; mais dans toute la première partie de son analyse, il suppose Z constant et voisin de 1.

Nous aurons d'ailleurs

$$X = -\Sigma A_n \cos G_n, \qquad G_n = \lambda_n v.$$

Gyldén, page 229, introduit deux variables nouvelles y et ψ et pose

$$\rho = \frac{y}{1+\psi}.$$

Alors l'équation (23) est remplacée par les deux équations suivantes [équations (3) et (4) de Gyldén] :

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} = (1+\psi)\nu^2 - \beta\frac{y^2}{1+\psi}, \tag{24}$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (1-\alpha-\nu^2)y = (1+\psi)X + 2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} + Y, \tag{25}$$

où Y désigne un ensemble de termes inutiles à écrire.

Quant à ν^2, c'est une constante choisie de telle façon que ψ soit une série trigonométrique dont la partie constante est nulle.

L'équation (24) peut être remplacée par la suivante [équation (3′) de Gyldén] :

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} - 2\nu^2\psi = U, \tag{24 bis}$$

U étant un ensemble de termes inutiles à écrire.

Voici alors comment Gyldén conduit les approximations. Il fait d'abord $\psi = 0$ dans les deuxièmes membres de (25) et (24 *bis*) et il détermine à l'aide de ces deux équations y, ψ et ν^2; il substitue ensuite ces valeurs des inconnues dans les deuxièmes membres, ce qui lui fournit des valeurs plus approchées de ces mêmes inconnues; et ainsi de suite.

En première approximation, il trouve

$$y = \Sigma x_n \cos G_n, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta \Sigma x^2, \qquad x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 + \alpha - 1 + \nu^2}$$

et il a aussi page 230 une expression de ψ que je ne transcris pas.

Commençons par comparer avec les résultats du Chapitre premier. Dans ce Chapitre, le deuxième membre X se réduisait à un seul terme $-\gamma \cos v$; et Gyldén s'efforçait d'obtenir l'intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire appelée x. Il obtenait ainsi l'équation (2) qui, nous l'avons vu, est fausse en général; mais quand il se bornait à chercher l'intégrale particulière qui correspond au cas de $x = 0$, son équation se réduisait à

$$\frac{3}{4}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0 \tag{3}$$

qui est exacte.

Dans le Chapitre que nous citons maintenant, Gyldén ne cherche plus l'intégrale générale, mais seulement l'intégrale particulière dont il vient d'être question. Donc quand X se réduit à un seul terme, il devrait retrouver l'équation (3) à la différence des notations près.

Soit donc

$$X = -A_1 \cos G_1 = -\gamma \cos v,$$

c'est-à-dire

$$A_1 = \gamma, \qquad 2\lambda_1 = 1.$$

Les formules de la page 230 donnent alors

$$y = x_1 \cos G_1, \qquad x_1 = \frac{A_1}{\alpha + \nu^2}, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta x_1^2, \qquad \psi = \frac{\beta x_1^2}{8 + 4\nu^2}\cos 2G_1.$$

Observons que d'après l'équation (3) si α et γ sont très petits et β fini, x_1 est de l'ordre de $\sqrt[3]{\gamma}$ et par conséquent petit; donc x_1^2 et par conséquent ψ sont négligeables devant l'unité. On a donc

$$\rho = y = x_1 \cos v \qquad \text{et} \qquad \nu^2 x_1 + \alpha x_1 - A_1 = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0.$$

C'est bien une équation de la forme (3); mais elle est incompatible avec l'équation (3) puisque les coefficients sont différents.

La méthode de Gyldén est donc non seulement illégitime, mais encore en contradiction avec l'un des rares résultats exacts qu'il avait obtenus antérieurement.

D'où provient cette divergence? Pour que la méthode d'approximation fût légitime, il faudrait que les termes négligés fussent plus petits que les termes conservés. Or il n'en est rien, il est aisé que constater que dans le deuxième membre de (25) le terme $2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv}$ que l'on néglige est du même ordre que le terme X que l'on conserve. Et cela est vrai, bien entendu, que X se réduise à un seul terme, ou en contienne plusieurs (*cf. C. R. Acad. Sc.*, t. 138, p. 933) (¹).

XI. — Analyse du troisième Chapitre.

Enfin, dans le Chapitre III, Gyldén cherche à appliquer au problème des trois corps les principes établis dans les deux premiers Chapitres; comme nous avons vu que ces principes sont faux, il paraît superflu d'en discuter les applications. Un mot seulement sur la conclusion la plus importante. Les termes les moins élevés de la fonction perturbatrice peuvent donner lieu au phénomène connu sous le nom de libration; mais il n'en est pas de même des termes d'ordre élevé; pour ceux-ci, en effet, les termes horistiques prennent une influence prépondérante et s'opposent à la libration.

La fausseté de cette conclusion est manifeste. J'ai établi, en effet, par des démonstrations rigoureuses dans les *Méthodes nouvelles* :

1° Qu'à chaque terme de la fonction perturbatrice, quelque élevé qu'en soit l'ordre, correspond un système de solutions périodiques de la deuxième ou de la troisième sorte; ces solutions sont développables suivant les puissances des masses et les séries convergent pourvu que les masses soient assez petites (Chap. III).

2° Que parmi ces solutions périodiques il y en a autant de stables que d'instables; que les solutions très voisines d'une solution périodique stable oscillent autour de cette solution périodique, ce qui donne lieu à la libration, que par conséquent un terme quelconque de la fonction perturbatrice engendrera une libration, à moins que les exposants caractéristiques correspondants ne soient tous nuls (Chap. IV).

3° Que d'autre part on ne saurait prétendre que pour les termes d'ordre suffisamment élevé, ces exposants sont nuls. Il suffit pour s'en convaincre de

(¹) *Œuvres de Henri Poincaré*, ce Tome, p. 583.

former les expressions approchées des termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice par la méthode de Darboux (Chap. VI, en particulier n° 102).

La conclusion de Gyldén est donc fausse; où s'est-il trompé? Je ne puis le dire exactement; il s'appuie sur ce qu'un certain coefficient a est négatif pour les termes élevés, page 292; d'où tire-t-il cette affirmation, il m'a été impossible de le découvrir; il la déduit sans doute de quelque proposition antérieure qu'il néglige de rappeler. Quelle est cette proposition, est-ce une de celles dont nous avons reconnu plus haut la fausseté; est-ce une autre qui m'a échappé et qui serait alors également fausse, puisqu'elle conduit à une conclusion inexacte? Je ne puis le savoir.

En résumé, de tout ce grand effort, il ne reste rien.

Quelques-uns des résultats sont manifestement exacts, mais on aurait pu y arriver par une voie beaucoup plus rapide; un plus grand nombre sont manifestement faux; la plupart sont énoncés d'une façon trop obscure pour qu'on puisse décider s'ils sont vrais ou faux.

SUR LA MÉTHODE HORISTIQUE

OBSERVATIONS SUR L'ARTICLE DE M. BACKLUND

Bulletin astronomique, t, 21, p. 292-295 (août 1904).

Je suis très reconnaissant à M. Backlund d'avoir présenté [1] les théories de Gyldén sous une forme claire et nette, qui en rend la discussion facile.

M. Backlund remarque d'abord que j'ai supposé $Z = 1$, tandis qu'on a en général $Z = 1 - \beta$, β étant de l'ordre des masses. On peut néanmoins supposer $Z = 1$ sans restreinte la généralité, car l'équation conserve la même forme quand on pose

$$c = c' \sqrt{1 - \beta}$$

et à l'aide de cette transformation on peut toujours ramener le coefficient de z à l'unité.

M. Backlund restreint le second membre aux termes *critiques*, c'est-à-dire à ceux où les $\beta - 2\sigma + \sigma^2$ sont très petits par rapport à β. Il ajoute en note, et *c'est là le point essentiel*, que dans ces conditions les termes en $G_1 - 2G_2$, $2G_1 - G_2$ ne sont pas critiques.

Il est clair qu'il ne peut y avoir là qu'un lapsus, car si

$$\beta - 2\sigma_1 + \sigma_1^2 = (1 - \sigma_1)^2 - (1 - \beta)^2, \qquad \beta - 2\sigma_2 + \sigma_2^2 = (1 - \sigma_2)^2 - (1 - \beta)^2$$

sont très petits, il en sera de même de

$$[2(1 - \sigma_1) - (1 - \sigma_2)]^2 - (1 - \beta)^2,$$

puisque, à cause de la petitesse de β et de σ, ces trois quantités sont sensiblement en progression arithmétique.

---

(1) *Bulletin astronomique*, t. 21, 1904, p. 289-292.

Je ne relèverai pas ce qui chez M. Backlund n'est qu'une inadvertance, si ce n'était là précisément l'erreur fondamentale de Gyldén. Il est impossible que G_1 et G_2 soient critiques, sans que $2G_1 - G_2$ le soit.

Du moment que les termes en $2G_1 - G_2$ sont critiques, M. Backlund n'a pas plus le droit de négliger $\beta_3 z\left(z^2 - \frac{1}{2}H\right)$ que Gyldén de négliger $\beta_3 \frac{d\eta}{dv}\frac{dy}{dv}$.

M. Backlund arrive ensuite à l'équation qui donne les coefficients $\varkappa$; si je la rapproche de celle qu'à obtenue Gyldén à la page 228, j'y vois figurer un terme $\frac{3}{4}\beta_3 H$, où Gyldén écrivait $\frac{1}{2}\beta_3 H$. C'est la formule de M. Backlund qui est correcte, du moins dans le seul cas où la méthode est légitime.

Dans le cas général, les deux formules sont inexactes, et l'on peut s'en rendre compte d'une façon élémentaire.

Additionnons les deux équations (3) de M. Backlund. Si nous supposons

$$A_1 = A_2, \qquad \sigma_1 = \sigma_2,$$

d'où

$$\theta_1 = \theta_2, \qquad \varkappa_1 = \varkappa_2,$$

il vient (en supprimant les indices devenus inutiles)

$$6\varkappa^3 + 2\varkappa\theta = \frac{8}{3}\frac{A}{\beta}.$$

Mais si

$$A_1 = A_2, \qquad \sigma_1 = \sigma_2,$$

les deux termes en G_1 et G_2 se confondent en un seul; tout doit donc se passer comme si l'on avait

$$A_1 = 2A, \qquad A_2 = 0, \qquad \varkappa_2 = 0, \qquad \varkappa_1 = 2\varkappa,$$

d'où

$$\varkappa_1^3 + \varkappa_1\theta_1 = \frac{8}{3}\frac{A}{\beta}$$

et enfin

$$8\varkappa^3 + 2\varkappa\theta = \frac{8}{3}\frac{A}{\beta},$$

équation incompatible avec la précédente.

La méthode horistique n'est donc pas légitime dans le cas qui nous occupe.

Quelques mots maintenant sur les deux remarques qui terminent l'article de M. Backlund.

Il est vrai que Gyldén a dans son premier Chapitre traité le cas des termes dépendant des constantes d'intégration et d'un terme connu $A_1 \cos G_1$. Il l'a

même fait par plusieurs méthodes, mais, parmi ces méthodes, les unes sont fausses, les autres ne se prêtent pas à la généralisation en question. Cela est d'ailleurs sans intérêt, puisque nous venons de voir que la méthode est fausse, même en laissant de côté les termes qui contiennent des constantes d'intégration.

En ce qui concerne l'application de la méthode horistique à la longitude, j'ai reconnu qu'il n'y avait pas de coefficient horistique, *même quand on tient compte des termes du troisième ordre*. C'est ce que j'exposerai dans un Mémoire plus étendu [1]. L'erreur, dont M. Backlund veut généreusement s'attribuer toute la responsabilité, ne lui appartient donc pas. Il s'est conformé aux principes généraux de la méthode et s'est servi du mode de raisonnement préconisé par Gyldén, et dont ce savant avait fait d'autres applications. Ce mode de raisonnement consiste à remplacer certains coefficients périodiques par leur valeur moyenne : c'est ce qu'a fait M. Backlund, c'est ce qu'avait fait Gyldén; si l'astronome russe s'est trompé, ce n'est pas qu'il en a mal appliqué les règles, c'est que ces règles ne valaient rien.

---

(1) *Œuvres de Henri Poincaré*, ce Tome, p. 587.

NOTES

Les nombres figurant entre parenthèses renvoient aux Mémoires publiés dans ce Volume, conformément aux numéros qui leur sont affectés dans la Table des Matières.

Les différents Mémoires ont été groupés pour la publication selon leur objet principal. Plusieurs traitant de divers sujets, il n'a pas été possible d'adopter le même groupement dans ces Notes, qui ont été réparties sous les titres suivants :

Résultats généraux;
Masses fluides en rotation;
Principes de Mécanique analytique;
Séries;
Solutions périodiques et asymptotiques;
Intégrales uniformes;
Invariants intégraux.

Il y a lieu pour chaque sujet de se référer à la rubrique correspondante, quelle que soit par ailleurs dans le présent Volume la place du Mémoire où il est traité.

Résultats généraux.

H. Poincaré a reproduit une grande partie des travaux, recueillis ici, sur les *masses fluides en rotation*, dans ses Ouvrages : *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Paris (1902), et *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Paris (1911), sans y introduire d'importantes modifications. F. Tisserand en fait état dans le Tome II de son *Traité de Mécanique céleste*, Paris (1891). Portant sur un domaine bien délimité, ils n'ont suscité qu'un nombre restreint de recherches. On retrouvera la plupart des références que nous indiquons plus loin, et des détails à leur sujet, dans le célèbre Traité de H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6e édition, Cambridge (1932) et New-York (1945), dont la bibliographie très complète n'omet que les propres publications de son auteur.

Des Mémoires de H. Poincaré relatifs au *Problème des trois corps*, l'essentiel se trouve concentré dans (21), qui constitue l'ossature des *Méthodes nouvelles*. A l'encontre de ses autres travaux, dispersés dans des publications variées, celui-ci,

destiné au concours ouvert par le roi de Suède, groupe des études exhaustives sur des sujets inédits. F. Tisserand a consacré à ce Mémoire le Chapitre XXVII du Tome IV de son *Traité de Mécanique céleste*, Paris (1896). L'Ouvrage de C. V. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, fait une large place aux résultats obtenus par H. Poincaré. On trouvera dans *Dynamical Systems*, New-York (1927), de G. Birkhoff; *Treatise on the Analytical Dynamics*, 4e édition, Cambridge (1936), de E. T. Whittaker; *The analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton (1941), de A. Wintner, l'exposé des travaux modernes relatifs au problème des trois corps, auquel ces auteurs ont apporté des contributions essentielles. Le dernier Ouvrage cité contient une intéressante bibliographie historique.

On sait que les méthodes imaginées par H. Poincaré pour la Mécanique céleste n'ont pas jusqu'ici servi de base à de nouvelles études des mouvements des planètes. C'est la difficulté que présente la comparaison de développements faits avec des variables très différentes qui semble principalement s'opposer à l'abandon des variables traditionnelles. Il y a donc lieu de signaler particulièrement à l'attention des calculateurs les Mémoires (24), (25), (27), (34), qui, postérieurs à la publication des *Méthodes nouvelles*, n'ont pas été l'objet d'une large diffusion [quoique (24) soit utilisé par Whittaker, *loc. cit.*, § 157]. On y trouvera : d'une part un procédé de réduction du système différentiel au douzième ordre qui lui conserve la forme canonique sans compliquer l'expression de la fonction perturbatrice; d'autre part un exposé synthétique de tous les procédés de résolution utilisés, permettant de choisir celui qui se trouve le mieux adapté à chaque problème et de réaliser éventuellement le passage de l'un à l'autre.

Masses fluides en rotation.

Figures annulaires. — On remarque, au début de (2), l'absence du terme $\beta_1 \cos\varphi$ dans l'équation polaire de la section méridienne de la figure. Ce n'est pas là une traduction rigoureuse de la condition d'après laquelle le pôle est le centre de gravité de la section. L'hypothèse, faite plus loin, que les termes en $\frac{\beta^2}{r^2}$ sont négligés devant les termes en $\frac{\beta}{r}$ justifie cependant cette équation : le calcul montrerait en effet que β_1 s'exprime par une somme de termes de la forme $\frac{\beta_i \beta_j}{r^2}$ $(i, j > 1)$, lorsque le pôle des coordonnées est au centre de gravité. Toutefois, il est probable que la présente approximation ne puisse pas suffire pour l'étude éventuelle de la stabilité de la figure annulaire.

L'expression du potentiel V qu'on trouve dans (2) y est donnée sans justification. Le détail des calculs figure dans (3) et conduit à une valeur légèrement différente de l'expression primitive. Il y a donc lieu de modifier dans (2) toutes les formules qui suivent celles de l'expression du potentiel (jusqu'à ce que soit abordée l'étude du problème suivant, relatif à l'équilibre de plusieurs anneaux), conformément aux indications données dans le Mémoire rectificatif. En particulier, à la valeur donnée dans (2) pour ω^2, il faut substituer l'expression $2\pi \frac{r^2}{R^2} \log\left(\frac{8R}{r} - \frac{5}{4}\right)$.

L'étude de la figure annulaire qui est faite au paragraphe 5 de (6) n'est pas identique à celle que l'on trouve dans (2); mais on peut confronter les formules (5) et suivantes données dans (6) avec la formule $U = \frac{\pi^2 r_0^4 R}{2} \log \frac{\lambda R}{r_0} + \ldots + U'$ figurant dans (2); on constate qu'elles sont en léger désaccord, cette divergence ne pouvant d'ailleurs affecter les conclusions de (6) qui sont de nature qualitative.

On verra dans un Mémoire inséré au Tome VIII des *Œuvres* qu'en présence d'une masse centrale et dans les conditions physiques qu'offre l'anneau de Saturne, la figure annulaire (qui n'est évidemment pas identique à celles qu'on a considérées ici) est instable. Ce résultat est reproduit dans (13), avec le schéma d'un raisonnement qui doit permettre de le retrouver, et qui s'appliquerait aussi aux figures annulaires de Mme Kowalewski; (il s'agit probablement des figures annulaires sans masse centrale; Mme Kowalewski a considéré les deux cas). Par ailleurs, H. Poincaré écrit à plusieurs reprises, dans ses Mémoires et ses Ouvrages, que les figures annulaires sont instables, sans nouvelle justification. Cette affirmation est sujette à caution. L'instabilité se déduit en effet de la considération de deux limites pour la valeur relative de la densité de l'anneau par rapport à celle de la masse centrale : une limite inférieure, obtenue par Poincaré, qui n'est pas douteuse (et qui peut même être améliorée); une limite supérieure, établie par J. C. Maxwell (*On the Stability of the Motion of Saturn's Rings*, Cambridge, 1859) à l'aide de raisonnements peu rigoureux [1] et qui semblent supposer pour le fluide des propriétés d'ailleurs non précisées. On ne peut donc considérer comme certain que les figures annulaires, avec ou sans masse centrale, soient instables dans toutes les conditions; un nouvel examen en serait utile. L'étude des figures terminales d'une suite de figures annulaires serait également souhaitable.

Figures piriformes. — En suivant une série d'ellipsoïdes de Jacobi jusqu'au premier point de bifurcation, H. Poincaré avait d'abord cru [*voir* dans (6) la fin du paragraphe 14] à la stabilité de la figure piriforme obtenue. Mais le principe de l'échange des stabilités, qui avait conduit à ce résultat, n'était pas valable ici, comme l'a montré K. Schwarzschild (*Inaug. Dissert.*, Münich, 1896). Reprenant alors le problème, G. H. Darwin (*Phil. Trans.*, t. 198 A, 1901, p. 301) calcule les axes du jacobien critique pendant que Poincaré (12) établit les formules devant permettre de décider de la stabilité, calculs qu'effectue Darwin (*Phil. Trans.*, t. 200 A, 1902, p. 251) et qui font croire à nouveau à la stabilité. Cependant, par un procédé différent, A. Liapounoff (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. 17, 1905, p. 3) concluait à l'instabilité. C'est à J. H. Jeans que révient le mérite d'avoir tranché le débat : reprenant le calcul du moment d'inertie de la figure (*Phil. Trans.*, t. 215 A, 1915, p. 27), il constata que Darwin avait négligé des termes de l'ordre de ceux qu'il avait conservés, reprit les développements, des plus laborieux,

[1] En particulier, on déduit cette limite d'une certaine inégalité dont on néglige un terme en vertu d'une inégalité antérieure; or cette dernière a été obtenue dans un problème tout différent de celui de l'anneau fluide, et n'a *a priori* aucune raison d'être maintenue ici. H. Poincaré reproduit dans ses *Hypothèses cosmogoniques* (2e édit., p. 35-48) une partie de l'analyse de Maxwell.

et retrouva le résultat obtenu par Liapounoff. (*Voir* aussi JEANS, *Problems of Cosmogony*, Cambridge, 1919, où les autres figures d'équilibre sont également étudiées, ainsi que leur évolution).

La figure piriforme, instable, évolue par une scission, en deux masses distinctes au moins. E. CARTAN a démontré (*Proc. Int. Math. Congr.*, Toronto, t. 2, 1924, p. 9) que la figure devient séculairement et ordinairement instable en même temps. Le phénomène a par suite l'allure du « cataclysme » qu'avait prévu Poincaré, et il n'y a aucune raison pour que l'évolution conduise, comme on l'avait primitivement pensé, à un système d'étoile double à faible excentricité. Au contraire, on peut voir que l'orbite relative est hyperbolique (*cf.* H. JEFFREYS, *Monthley Notices R. A. S.*, t. 101, 1947, p. 349 et t. 108, 1948, p. 94).

Petits mouvements des figures d'équilibre. — Le procédé employé au paragraphe 13 de (6), qui consiste à « solidifier » le fluide, à en considérer une déformation homogène, et à chercher dans le petit volume balayé au cours de la déformation une fonction harmonique satisfaisant à certaines conditions aux limites, a reçu de nombreuses applications. Nous ne pouvons qu'en mentionner quelques-unes : stabilité du sphéroïde de Mac Laurin (Bryan, Darwin); cylindre elliptique (Love); ellipsoïde de révolution élastique (Viterbi); fluide dans une sphère creuse élastique (Love); couche mince sur un noyau sphérique (Hough).

Résultats divers. — Les résultats relatifs à la *limitation de la vitesse de rotation* d'une masse fluide, (2), (6), (10), ont donné lieu à plusieurs extensions. H. LAMB (*Hydrodynamics*, § 372) a montré que la vitesse limite $\sqrt{2\pi\rho}$ est valable (indépendamment de toute question de stabilité) que la masse rencontre l'axe de révolution ou non. U. CRUDELI (*Accad. d. Lincei*, t. 19, 1910, p. 666) a ramené cette limite à $\sqrt{\pi\rho}$ pour les volumes convexes. H. LAMB (*loc. cit.*) a levé cette restriction de convexité.

Poincaré a démontré d'une façon originale dans (8) et (10) que la sphère est la seule figure d'équilibre stable absolu, propriété que Liapounoff avait établie antérieurement. L. LICHTENSTEIN (*Berl. Ber.*, 1918, p. 1120) a prouvé que toute masse fluide en rotation uniforme admet un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation. Il en résulte qu'une masse fluide au repos est nécessairement sphérique (*cf.* T. CARLEMAN, *Math. Zeitschrift*, t. 3, 1918, p. 1).

Dans (13), les résultats de la théorie sont étudiés au sujet de leurs rapports avec les données de l'observation. Celles-ci ont subi quelque évolution depuis 1892 :

l'origine de la variation d'éclat des étoiles a été l'objet de théories satisfaisantes pour toutes les classes de *variables*, sauf cependant les *variables irrégulières*. L'interprétation de la variabilité à l'aide des formes jacobiennes est donc périmée; elle ne saurait en effet convenir aux variables irrégulières. Notons toutefois que la courbe de lumière de certaines *variables à éclipses* est affectée par la non-sphéricité accentuée qu'entrainent les forces de marées pour les masses rapprochées;

les observations photométriques (Barnard, von Seeliger), photographiques (Wood) ont définitivement confirmé la structure corpusculaire des anneaux de

Saturne, que la Mécanique céleste faisait prévoir. Il s'agirait de gouttes de glace très dispersées;

pour l'aplatissement de la Terre, on admet depuis les travaux de Hayford (1909), la valeur $\frac{1}{297}$. Les mesures gravimétriques modernes sont en parfait accord avec ce nombre, issu de mesures géodésiques. La divergence d'avec la valeur déduite par Poincaré de la précession observée a ainsi disparu.

Principes de mécanique analytique.

Les résultats exposés dans (17) sont justifiés et développés dans le Chapitre XXIX des *Méthodes nouvelles*. Une restriction à la validité des équations obtenues pour le mouvement relatif a été faite par A. Wintner (*Sächs. Sitzber.*, t. 82, 1930, p. 345).

La condition nécessaire et suffisante *pour qu'un changement de variables conserve la forme hamiltonienne* d'un système est que l'expression $\Sigma y_i dx_i - \Sigma y'_i dx'_i$ soit une différentielle totale. Cette propriété tient à ce que la relation différentielle exprimée caractérise les transformations de contact, qu'un système hamiltonien peut être considéré comme traduisant une transformation de contact infinitésimale (*voir* par exemple Whittaker, *loc. cit.*, § 125), et que les transformations de contact constituent un groupe. L'énoncé apparaît pour la première fois sous sa forme précise en 1897, dans (25). Le caractère suffisant de la condition a été justifié et utilisé bien antérieurement, par Poincaré lui-même et d'autres auteurs; il peut d'ailleurs se déduire d'une méthode imaginée par Jacobi (*C. R. Acad. Sc.*, t. 5, 1837, p. 61) en vue de la constitution de divers changements de variables canoniques. La nécessité d'une telle relation différentielle n'a été démontrée que récemment, par J. Chazy (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 1041 et t. 226, 1948, p. 19), pour des variables dépendant ou non du temps.

L'exposé sur la *Mécanique de Hertz* (18) a trait à l'Ouvrage posthume *Die Prinzipien der Mechanik*, Leipzig, 1894. Il s'agit dans cet Ouvrage d'un examen d'ensemble des fondements de la Mécanique, première étude critique approfondie qu'on ait faite sur le sujet. La considération de « masses cachées » n'a certes pas été féconde, mais cet échec n'enlève rien à l'intérêt de l'Ouvrage; cette hypothèse n'en est pas l'objet essentiel, à l'encontre de ce qu'on pourrait croire d'après (18). La disparition prématurée de Hertz l'a empêché de parfaire ses raisonnements; on note en particulier la faiblesse, non de l'*objection de la boule*, mais de son exposé, fait par l'intermédiaire d'une définition des systèmes holonomes qui n'est ni suffisante (le déplacement de la boule de A en B peut se faire par un mouvement complexe, mais d'amplitude $\sqrt{\varepsilon}$, donc infiniment petit), ni nécessaire (on imagine facilement des systèmes simples, à liaisons solides, dont certains déplacements infiniment petits exigent un déplacement fini des éléments) pour que le principe de moindre action soit applicable.

Séries.

Les précédents Volumes des *Œuvres* contiennent différents Mémoires sur les séries rencontrées en Mécanique céleste; en particulier, sur les séries trigonométriques, *voir* le Tome IV.

Les travaux recueillis ici sur les séries de Lindstedt-Gyldén sont en général antérieurs au Tome II des *Méthodes nouvelles* et se retrouvent, remaniés, dans différents Chapitres de cet Ouvrage : les Chapitres XI pour (23), XVII pour (28), IX pour (29) et (30), XIII pour le paragraphe 21 de (21). De même, sur la vérification des séries de la Mécanique céleste (31), *voir* le Chapitre XXIV du Tome III.

Les vigoureuses critiques [(35), (36), (37)] que H. Poincaré a émises en 1904 et 1905 contre la *méthode horistique de Gyldén* ne concernent que les *Nouvelles recherches* ..., (1892). Il s'était borné dans ses études antérieures, mentionnées plus haut, à préciser ou compléter certains points des théories de Gyldén. Cependant, dès 1889, il avait acquis une certaine méfiance à leur égard : les astronomes ayant été alertés [depuis (28), entre autres] au sujet de la divergence possible de leurs séries, Gyldén s'est attaché à justifier la convergence de celles qu'il obtient dans son Mémoire du Tome IX des *Acta Mathematica* (1887); Poincaré, assuré qu'elles divergeaient (en général) par la façon dont elles étaient obtenues, s'est astreint, non sans mauvaise humeur, à l'examen détaillé de ce travail. On trouvera dans les curieuses lettres qu'il adresse à Mittag-Leffler les 5 février, 1 et 3 mars 1889, lettres publiées dans le Tome 38 des *Acta Mathematica*, le récit de ces pénibles investigations.

L'idée que l'élimination des termes séculaires ne peut conduire à des séries uniformément convergentes aura donc mis vingt années à s'imposer, non sans difficultés [*voir* (32), (33), entre autres]. Les séries divergentes effrayent les calculateurs; on s'est en général borné, depuis lors, à utiliser celles qui avaient fait leurs preuves, et que leurs auteurs (Newcomb, Lindstedt, Gyldén, Hill) n'avaient pas hésité à introduire puisqu'ils ignoraient cette divergence. Ainsi, la lumière que Poincaré a projetée sur ce terrain difficile en a paradoxalement retardé l'exploration; ne s'y hasardent plus guère que les chercheurs les moins avertis, sans succès évidemment.

L'équation de Gyldén-Lindstedt [étudiée dans (28) et dans le Chapitre XVII des *Méthodes nouvelles; voir* aussi Tisserand, *loc. cit.*, t. III, Chap. I] est bien connue en Physique mathématique sous le nom d'*équation de Mathieu* ou *du cylindre elliptique*. Renvoyons à N. W. Mac Lachlan, *Theory of Mathieu functions*, Oxford, 1947, et au Chapitre XIX de *Modern Analysis* de Whittaker et Watson.

Le *Théorème* II du deuxième paragraphe de (21), (*voir* aussi *Méthodes nouvelles*, t. I, Chap. II), est devenu classique dans l'étude des systèmes différentiels avec paramètre, qu'il permet d'effectuer à partir du plus simple d'entre eux. Différentes démonstrations nouvelles et extensions en ont été données. *Voir* notamment E. Picard, *C. R. Acad. Sc.*, t. 118, 1894, p. 760, et *Traité d'Analyse*, t. 2, Chap. XI; et aussi K. Popoff, *Mémorial de l'Artillerie française*, 1925. M. Mendès (*Annal. Obs. Besançon*, t. 2, 1936, p. 69) envisage le cas où le paramètre est une fonction donnée du temps. Le théorème a permis de valider des procédés de calcul

non justifiés par leurs auteurs, rôle analogue à celui des travaux de Cauchy à l'égard des développements en série de ses prédécesseurs; *voir* par exemple H. Bateman, *Partial differential equations* . . ., New-York, 1944, p. 497, au sujet d'une équation de l'acoustique dont la résolution par Helmholtz a été ainsi légitimée par C. Schaefer.

Solutions périodiques et asymptotiques.

C'est en 1878 que paraît le célèbre Mémoire où Hill considère pour la première fois une solution périodique du Problème des trois corps. Mais il s'agit d'un cas très particulier (système Terre-Lune), et l'on doit considérer que c'est en 1883, dans (19), que la théorie en prend naissance. Leur existence est établie dans (20), leur étude faite dans (21) où est introduite la notion d'exposant caractéristique. Ces travaux sont développés dans le Tome I des *Méthodes nouvelles*.

Les compléments théoriques aux recherches de Poincaré ont été apportés essentiellement par A. Liapounoff, dont le Mémoire, datant de 1892, a été traduit en français par E. Davaux en 1907 [*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, (2), t. 9, p. 203-469]; J. Hadamard (*J. Math.*, t. 3, 1897, p. 331); E. Picard (*Traité d'Analyse*, vol. 3); et par Poincaré lui-même (*voir* le Tome VIII de ses *Œuvres* au sujet du *Théorème de Poincaré-Birkhoff*).

C. Charlier, *loc. cit.*, a discuté les orbites périodiques dans les cas les plus accessibles. J. Chazy (*Bull. astron.*, t. 14, 1949, p. 153), a mis en évidence les propriétés de symétrie présentées par les solutions périodiques *de la première sorte*. Whittaker a formé un critère applicable à la découverte de solutions périodiques du problème restreint (*Monthly Notices*, t. 62, 1902, p. 186 et 346).

Les solutions asymptotiques ont été étudiées par D. Buchanan (*Trans. of the Cambr. Phil. Soc.*, t. 22, p. 309) pour les mouvements de Lagrange (triangle équilatéral), par L. A. Warren (*Am. J. of Math.*, t. 37, 1916, p. 221) pour les points de libration colinéaires. K. Popoff (*Bull. astron.*, t. 9, 1934, p. 177) a examiné le cas du problème restreint. Le *principe dynamique de prolongement* que Strömgren avait utilisé pour ses recherches numériques (*voir* plus bas) a été justifié par A. Wintner (*Math. Zeitschrift*, t. 34, 1931, p. 321 et *Bull. astron.*, t. 9, 1936, p. 251).

Les orbites périodiques *de deuxième espèce* [paragraphe 23 de (21); Chapitre XXXII des *Méthodes nouvelles*] ont été construites par Poincaré à partir d'orbites à chocs, relatives au mouvement de trois corps dont deux sont de masse nulle. Une sphère d'activité limitant l'influence relative des deux satellites joue un rôle discutable dans le raisonnement. P. Sémirot (*Chocs et solutions périodiques dans le problème des trois corps*, *Thèses*, Paris, 1943) a montré sur un exemple simple auquel le procédé de Poincaré aurait dû s'appliquer (attraction par deux centres fixes) qu'on n'y pouvait déduire de solutions périodiques dérivant de celle qu'on obtient lorsqu'une des masses attractives est nulle. L'existence des solutions périodiques de deuxième espèce du problème des trois corps n'est pas impossible, mais ne doit pas être considérée comme établie par l'analyse qu'en a faite Poincaré.

Les orbites périodiques et asymptotiques auxquelles conduisent la théorie de la

relativité généralisée ont été étudiées par Y. Hagihara (*Jap. Journ. of Ast. and Geoph.*, t. 8, 1931, p. 67); Whittaker (*loc. cit.*, § 170) en cite quelques résultats.

Les travaux de G. Birkhoff (*loc. cit.; voir* aussi *Bull. Soc. Math. France*, vol. 40, 1912; *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 18, 1917) ont généralisé les recherches de Poincaré pour des systèmes dynamiques plus généraux, et principalement pour les *systèmes de Pfaff*. Les exposants caractéristiques [§ 10 de (21)] en particulier, ou multiplicateurs hamiltoniens, se présentent comme un cas particulier des multiplicateurs pfaffiens (*loc. cit.*, p. 89). Mais l'œuvre puissante de G. Birkhoff n'a pas encore fourni d'apport sensible à la Mécanique céleste proprement dite.

Différentes études numériques ont été faites dans le cas du *problème restreint*. Citons celles qui sont contemporaines des travaux de Poincaré, dues à C. Burrau (*Astr. Nachr.*, t. 135, 1894, p. 233; *voir* aussi T. Thiele, *Astr. Nachr.*, t. 138, 1895, p. 1); et à G. Darwin (*Acta math.*, t. 21, 1897). Parmi les autres, nous mentionnerons les plus importantes : un ensemble de recherches faites par F. R. Moulton et ses collaborateurs (*Periodic Orbits*, publication n° 161 de l'Institut Carnegie, Washington, 1920) a permis de mettre en évidence les trajectoires de nature spéciale qui séparent les différentes classes de solutions périodiques; dans un cas particulier du problème restreint ($m_0 = m_1$), un examen complet des orbites périodiques et asymptotiques a été réalisé de 1924 à 1933 par E. Strömgren et ses collaborateurs (à ce sujet, *voir* dans *Bull. astron.*, t. 9, 1933, p. 87, un exposé de ces travaux et leurs références bibliographiques).

Intégrales uniformes.

La non-existence de nouvelles intégrales analytiques uniformes du problème restreint des trois corps est établie au paragraphe 22 de (21). L'extension de la propriété au problème général est faite dans les *Méthodes nouvelles* (t. 1, § 85). Il est à noter que le théorème de Bruns (1887) sur la non-existence de nouvelles intégrales algébriques, théorème dont Poincaré a complété la démonstration en 1896 dans (26), était au contraire relatif au problème général; sa validité pour le problème restreint n'a été reconnue que beaucoup plus tard, par C. L. Siegel, (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 39, 1936, p. 225). P. Painlevé a étendu la proposition de Poincaré en montrant (*C. R. Acad. Sc.*, t. 130, 1900, p. 1699) qu'il suffisait d'imposer la condition de régularité par rapport aux vitesses pour entraîner la non-existence des intégrales analytiques.

Le domaine d'application du théorème est bien plus réduit que ne pourrait le faire supposer l'énoncé qu'on en donne habituellement. La démonstration repose en effet sur la considération d'un système d'équations dont les seconds membres sont périodiques par rapport aux *variables angulaires*. Ces variables sont fonctions des éléments osculateurs des mouvements relatifs, lesquels, pour qu'il y ait périodicité, doivent être essentiellement supposés *elliptiques*. Or il n'y a en général aucun moyen de savoir si un mouvement possédant initialement cette propriété la conserve indéfiniment. Dans l'espace à douze dimensions des coordonnées et des vitesses, il n'y a aucun volume en tous les points duquel le théorème puisse

s'appliquer. T. Lévi-Civita l'a noté pour le problème restreint (*Acta math.*, t. 30, 1906, p. 327). J. Chazy a mis en évidence un grand nombre de familles d'intégrales analytiques du problème général des trois corps (*Bull. astron.*, t. 8, 1938, p. 403), et a fait ressortir la différence qu'offre à ce sujet le théorème de Poincaré et celui de Bruns.

Invariants intégraux.

La notion d'invariant intégral apparaît dans le Chapitre II de (21) en même temps que sa théorie. On sait que J. Liouville (*J. Math.*, t. 3, 1838, p. 348) puis L. Boltzmann (*Journal de Crelle*, t. 73, 1871, p. 111) avaient utilisé pour des problèmes d'hydrocinétique une intégrale multiple qui n'est autre que le plus simple des invariants de Poincaré, l'invariant intégral *de volume*. Bien que ce soit celui dont l'usage est le plus courant, le champ de ses applications ne s'est constitué qu'après que Poincaré l'eût redécouvert (21) en le généralisant.

La théorie des invariants intégraux, que Poincaré lui-même a approfondie dans le Tome III des *Méthodes nouvelles*, est aujourd'hui classique. Citons en deux Traités (leurs auteurs lui ont apporté par ailleurs une contribution essentielle au cours de nombreuses recherches): E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, 1922; Th. de Donder, *Théorie des invariants intégraux*, Paris, 1927. Nous nous bornerons ici à mentionner une propriété qui peut jouer dans l'étude quantitative des systèmes d'équations différentielles un rôle pratique qu'elle ne semble pas avoir tenu jusqu'ici : E. Goursat a montré (*J. Math.*, 6e série, t. 4, 1908, p. 331) que la connaissance d'un invariant intégral permet d'extraire d'un système donné un système d'équations plus simple dont toutes les intégrales appartiennent au système initial.

La première conséquence que Poincaré déduit de sa théorie est exprimée par le théorème I [§ 8 de (21)] ou *théorème de récurrence*. Les trajectoires qui y sont appelées *exceptionnelles*, et qui forment un ensemble de mesure nulle dans la région de l'espace à $2n$ dimensions où le théorème s'applique, ne peuvent remplir aucun continuum fini et fermé quel que soit le nombre de ses dimensions (J. Lévy, *Les approches dans le problème des trois corps, Thèses*, Paris, 1943). Le théorème de récurrence est à l'origine des recherches qui ont conduit G. Birkhoff, au *théorème ergodique*, dont l'exposé définitif a paru en 1932 (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 38, p. 361). Le théorème ergodique ayant été rattaché directement à la théorie des ensembles à partir de la notion de mesure de Lebesgue, il n'y a lieu ici que de le mentionner. Son utilisation pour l'étude des systèmes différentiels est subordonné à l'existence d'une propriété de *transitivité* dont il est dans le cas général extrêmement difficile de s'assurer. Une application en a été faite à divers systèmes de Mécanique céleste, à trois degrés de liberté, pouvant se ramener au mouvement d'une masse dans un champ de forces de révolution, par H. Fabre (*Bul. astron.*, t. 10, 1937, p. 297, et t. 11, 1938, p. 17).

L'emploi des invariants intégraux avait conduit Poincaré à des résultats positifs principalement en ce qui concerne les solutions du problème restreint; il leur avait reconnu la stabilité à la Poisson. Le problème général des trois corps a lui aussi bénéficié de cette théorie, dans les travaux de J. Chazy : l'ensemble des trajectoires

issues des points d'un certain volume de l'espace à douze dimensions des coordonnées et des vitesses présente la *stabilité à la Poisson;* toutes les autres trajectoires possèdent la propriété de *réversibilité*, c'est-à-dire que le mouvement relatif de deux quelconques des corps est de la même nature (elliptique, parabolique ou hyperbolique) pour les valeurs du temps infiniment grandes positives et négatives (*J. Math.*, 9e série, t. 8, 1929, p. 353; *Bull. astron.*, t. 8, 1934, p. 403). Ces propriétés, jointes à l'étude des points singuliers du système, ont permis à J. Chazy (*voir* les références dans la bibliographie donnée par Wintner, *loc. cit.*) une classification et une localisation relative de *toutes* les trajectoires possibles dans le problème des trois corps. Cette analyse n'a pas d'équivalent parmi celles qu'on a pu faire au sujet d'autres systèmes différentiels d'ordre élevé; elle doit être considérée comme le développement des résultats et des méthodes du Mémoire (21).

Différentes branches de la Physique mathématique, notamment la Mécanique statistique, la Théorie cinétique des gaz, la Mécanique atomique, l'Hydrodynamique, l'Electromagnétisme, font appel aux propriétés des invariants intégraux. La Mécanique analytique, grâce à eux, a été dotée par A. Lichnérowicz (*C. R. Acad. Sc.*, t. 217, 1943, p. 660) du principe suivant : *quelles que soient les forces mises en jeu, l'intégrale qui s'écrit*, avec les notations habituelles,

$$\iint \Sigma\, dp_i\, dq_i - dH\, dt + \Sigma Q_i\, dq_i\, dt,$$

étendue à la surface balayée au cours d'un déplacement arbitraire des états le long de leurs trajectoires respectives, *est nulle*. Ce principe pourra dans l'avenir jouer un rôle fondamental, comparable à celui qu'a tenu jusqu'ici le principe de moindre action.

Jacques Lévy.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME VII.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE.

Pages

AVANT-PROPOS.

Analyse de ses travaux scientifiques, par Henri Poincaré (*Acta Math.*, t. 38, 1921, p. 104-114) 1

Masses fluides en rotation.

1. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*C. R. Acad. Sc.*, t. 100, 1885, p. 346-348) 14
2. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Bull. astron.*, t. 2, 1885, p. 109-118) 17
3. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Bull. astron.*, t. 2, 1885, p. 405-413) 26
4. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*C. R. Acad. Sc.*, t. 100, 1885, p. 1068-1070) 34
5. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*C. R. Acad. Sc.*, t. 101, 1885, p. 307-309) 37
6. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Acta Math.*, t. 7, 1885, p. 259-380) 40
7. Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation (*C. R. Acad. Sc.*, t. 102, 1886, p. 970-972) 141
8. Sur un théorème de M. Liapounoff, relatif à l'équilibre d'une masse fluide (*C. R. Acad. Sc.*, t. 104, 1887, p. 622-625) 143
9. Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation (*C. R. Acad. Sc.*, t. 106, 1888, p. 1571-1574) 147
10. Sur l'équilibre d'un fluide en rotation (*Bull. astron.*, t. 16, 1899, p. 161-169) .. 151
11. Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation (*Proc. Roy. Soc. London*, vol. 69, 1901, p. 148-149) 159
12. Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation (*Phil. Trans.*, A, t. 198, 1901, p. 333-373) 161
13. Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation (*Revue générale des Sciences*, t. 3, 1892, p. 809-815) 203

Principes de Mécanique analytique.

14. Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, 1901, p. 369-371) 218
15. Sur une généralisation de la méthode de Jacobi (*C. R. Acad. Sc.*, t. 149, 1905, p. 1105-1108) 220

Pages.

16. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 915-918) 224
17. Les solutions périodiques et le principe de moindre action (*C. R. Acad. Sc.*, t. 124, 1897, p. 713-716) 227
18. Les idées de Hertz sur la Mécanique (*Revue générale des Sciences*, t. 8, 1897, p. 734-743) 231

Problème des trois corps.

19. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps (*C. R. Acad. Sc.*, t. 97, 1883, p. 251-252) 251
20. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps (*Bull. astron.*, t. 1, 1884, p. 65-74) 253
21. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique (Mémoire couronné du Prix de S. M. le roi Oscar II de Suède), (*Acta Math.*, t. 13, 1890, p. 1-270) 262
22. Sur le problème des trois corps (*Bull. astron.*, t. 8, 1891, p. 12-24) 480
23. Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps (*C. R. Acad. Sc.*, t. 114, 1892, p. 1305-1309) 491
24. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 1031-1035) 496
25. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps (*Bull. astron.*, t. 14, 1897, p. 53-67 et *Acta Math.*, t. 21, 1897, p. 83-97) 500
26. Sur la méthode de Bruns (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 1224-1228) 512
27. Sur l'intégration des équations du problème des trois corps (*Bull. astron.*, t. 14, 1897, p. 241-270) 517

Séries de la Mécanique céleste.

28. Sur une équation différentielle (*C. R. Acad. Sc.*, t. 98, 1884, p. 793-795) 543
29. Sur une méthode de M. Lindstedt (*Bull. astron.*, t. 3, 1886, p. 57-61) 546
30. Sur les séries de M. Lindstedt (*C. R. Acad. Sc.*, t. 108, 1889, p. 21-24) 551
31. Sur un procédé de vérification, applicable au calcul des séries de la Mécanique céleste (*C. R. Acad. Sc.*, t. 120, 1895, p. 57-59) 555
32. Sur la divergence des séries de la Mécanique céleste (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 497-499) 558
33. Sur la divergence des séries trigonométriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 557-559) 561
34. Sur la façon de grouper les termes des séries trigonométriques qu'on rencontre en Mécanique céleste (*Bull. astr.*, t. 15, 1898, p. 289-310) 564
35. Sur la méthode horistique de Gyldén (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 933-936). 583
36. Sur la méthode horistique de Gyldén (*Acta Math.*, t. 29, 1905, p. 235-271) 587
37. Sur la méthode horistique : Observations sur un Article de M. Backlund (*Bull. astron.*, t. 21, 1904, p. 292-295) 619

NOTES 624

TABLE DES MATIÈRES 633

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.

138265-51 Quai des Grands-Augustins, 55.

Dépôt légal, Imprimeur, 1951, n° 711
Dépôt légal, Éditeur, 1951, n° 395

ACHEVÉ D'IMPRIMER, LE 15 DÉCEMBRE 1951

Stechert-Hafner, Inc.
31 East 10TH Street
New York 3